

УДК 531.539:534.1

© 1999 г. О.В. Холостова

О ДИНАМИКЕ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Рассматривается движение волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды; угловые скорости собственного вращения волчка и вращения его оси симметрии вокруг вертикали предполагаются малыми. Известно, что в случае классического волчка Лагранжа с неподвижной точкой подвеса при любых значениях параметров задачи (значений постоянных циклических интегралов) существует единственная регулярная прецессия волчка. При наличии вибраций точки подвеса установлен следующий результат, не имеющий аналогов в классической задаче: в плоскости тех же параметров выделены области, в которых при любом положении центра тяжести волчка на оси симметрии существует единственное периодическое (с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса) движение волчка, близкое к регулярной прецессии, а также области, в которых, в зависимости от положения центра тяжести, таких движений может быть одно или три. При помощи методов КАМ-теории дано строгое решение вопроса об устойчивости этих движений волчка.

Работа является развитием результатов, полученных в [1], где при аналогичных принятым здесь предположениям решена задача о периодических движениях сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса.

Различным аспектам задачи динамики тяжелого симметричного тела с вибрирующей точкой подвеса посвящен ряд исследований: изучалось движение быстровращающегося симметричного и близкого к симметричному гироскопа при вертикальных вибрациях точки подвеса [2, 3], рассматривалось поведение волчка Лагранжа в случае, когда точка подвеса совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости [4], движение вязкоупругого твердого тела с подвижным основанием [5], вращение волчка Лагранжа при случайных колебаниях точки опоры [6].

1. Постановка задачи. Преобразование функции Гамильтона. Рассмотрим динамически симметричное твердое тело, движущееся в однородном поле тяжести вокруг неподвижной точки O . Пусть центр масс тела находится на оси его динамической симметрии. Такое твердое тело называют волчком Лагранжа; его движение подробно изучено [7–9].

Предположим, что точка O совершает вертикальное движение по закону $O_*O = \xi(t)$ относительно некоторой неподвижной точки O_* . Пусть $OXYZ$ – система координат, движущаяся поступательно в абсолютном пространстве (ось OZ направлена вертикально вверх), а $Oxyz$ – жестко связанная с телом система координат, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O , причем ось Oz направлена по оси динамической симметрии и центр масс G тела лежит на положительной полуоси Oz ($OG = z_G$, $z_G > 0$). Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера.

Кинетическая энергия тела определяется выражением

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{G_{\text{rel}}} + \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] \quad (1.1)$$

где m – масса тела, A и C – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции, v_O – скорость точки O , $v_{G_{rel}} = \omega \times \vec{OG}$ – скорость точки G в системе координат $OXYZ$, ω – вектор абсолютной угловой скорости вращения тела, имеющий в связанной системе координат проекции p, q, r .

В проекциях на оси $Oxyz$ имеем $\vec{OG} = (0, 0, z_G)^T$, $v_{G_{rel}} = (qz_G, -pz_G, 0)^T$, $v_O = \dot{\xi}n$, где $n = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)^T$ – орт вертикальной оси OZ .

Из (1.1) и кинематических уравнений Эйлера имеем следующее выражение для кинетической энергии тела:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - m z_G \dot{\xi} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \quad (1.2)$$

Потенциальная энергия тела вычисляется по формуле

$$\Pi = m g z_G \cos \theta + m g \xi(t) \quad (1.3)$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что координаты ψ и φ циклические, а соответствующие им импульсы такие же, как в случае движения волчка Лагранжа с неподвижной точкой O :

$$p_\psi = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta \quad (1.4)$$

$$p_\varphi = C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})$$

Введем для постоянных величин p_ψ и p_φ обозначения $p_\psi = Aa$, $p_\varphi = Ab$ (a, b – постоянные). Тогда из (1.4) имеем

$$\dot{\psi} = \frac{a - b \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{A}{C} b - \frac{(a - b \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (1.5)$$

Импульс p_θ , отвечающий позиционной координате θ , зависит от движения точки O и определяется равенством

$$p_\theta = A \dot{\theta} - m z_G \dot{\xi} \sin \theta \quad (1.6)$$

Из (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6) получим следующее выражение для функции Гамильтона (отброшены несущественные слагаемые, являющиеся функциями времени либо постоянными):

$$H = \frac{A(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{(p_\theta + m z_G \dot{\xi} \sin \theta)^2}{2A} + m g z_G \cos \theta \quad (1.7)$$

Гамильтониан (1.7) отвечает системе с одной степенью свободы с обобщенной координатой θ .

Будем далее полагать, что $\xi(t) = a_* \cos \Omega t$. Введем безразмерное время $\tau = \Omega t$ и безразмерные параметры задачи и импульс p_θ согласно формулам $a = \Omega a'$, $b = \Omega b'$, $p_\theta = A \Omega p'_\theta$. Тогда гамильтониан (1.7) перепишется в виде

$$H' = \frac{(a' - b' \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} (p'_\theta - c \sin \tau \sin \theta)^2 + d \cos \theta, \quad (1.8)$$

где

$$c = \frac{m z_G a_*}{A}, \quad d = \frac{m g z_G}{A \Omega^2} \quad (c > 0, d > 0)$$

В дальнейшем будем считать, что: 1) амплитуда a_* колебаний точки O мала по сравнению с характерным размером тела; 2) собственная частота $\sqrt{g/l}$ ($l = A/(mz_G)$ – приведенная длина) малых колебаний тела как физического маятника (при $a' = b' = 0$) в окрестности устойчивого равновесия $\theta = \pi$ много меньше частоты Ω колебаний точки O ; 3) величины a' и b' , характеризующие угловые скорости собственного вращения тела ϕ и вращения его оси симметрии вокруг вертикали ψ , малы. Учитывая эти предположения, примем, что

$$c = a_*/l = \varepsilon^2 \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad d = g/(\Omega^2 l) = \varepsilon^4 \gamma \quad (\gamma > 0), \quad a' = \varepsilon^2 \alpha, \quad b' = \varepsilon^2 \beta$$

Параметры α и β могут принимать произвольные значения. Далее считаем, что $\alpha^2 \neq \beta^2$. Случай $\alpha^2 = \beta^2$, когда ось симметрии волчка может занимать вертикальное положение ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$), требует специального рассмотрения.

Сделав в гамильтониане (1.8) замену переменных $\theta, p'_\theta \rightarrow x, X$ по формулам $\theta = x, p'_\theta \rightarrow \varepsilon X$, перепишем его, с учетом принятых обозначений, в виде

$$H' = H_0 + \varepsilon H_1 + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 H_2 + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 H_3 \quad (1.9)$$

$$H_0 = 0, \quad H_1 = \frac{1}{2} X^2, \quad H_2 = -2X \sin \tau \sin x$$

$$H_3 = 3 \left[\sin^2 \tau \sin^2 x + 2\gamma \cos x + \frac{(\alpha - \beta \cos x)^2}{\sin^2 x} \right]$$

Далее осуществим 2π -периодическое по τ каноническое преобразование $x, X \rightarrow q, p$, такое, чтобы новая функция Гамильтона не содержала время τ в членах до третьего порядка включительно относительно ε . Получим это преобразование при помощи метода Депри – Хори [10].

Новый гамильтониан $K(q, p, \tau)$ должен иметь следующую структуру:

$$K = K_0 + \varepsilon K_1 + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 K_2 + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 K_3 + O(\varepsilon^4) \quad (1.10)$$

где $K_0 = 0$, а функции K_1, K_2, K_3 определяются из соотношений [10]

$$K_1 = H_1 - \partial W_1 / \partial \tau, \quad K_2 = H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \partial W_2 / \partial \tau$$

$$K_3 = H_3 + L_1 H_2 + 2L_2 H_1 + 2K_{1,2} + K_{2,1} - \partial W_3 / \partial \tau$$

Здесь $L_j f = (f, W_j)$ – скобка Пуассона функций f и W_j , $K_{1,1} = L_1 K_1$, $K_{1,2} = L_1 K_2$, $K_{2,1} = L_2 K_1 - L_1 K_{1,1}$, а функции $W_i(q, p, \tau)$ ($i = 1, 2, 3$) подбираются так, чтобы величины K_i ($i = 1, 2, 3$) не содержали τ . Вычисления показывают, что

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 2p \cos \tau \sin q, \quad W_3 = -\frac{3}{4} \sin 2\tau \sin^2 q - 6p^2 \sin \tau \cos q$$

$$K_1 = \frac{1}{2} p^2, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \frac{3}{2} \sin^2 q + 6\gamma \cos q + \frac{3(\alpha - \beta \cos q)^2}{\sin^2 q} \quad (1.11)$$

Одновременно с преобразованием гамильтониана ищется соответствующая каноническая замена переменных, имеющая вид

$$x = q + \varepsilon \dot{q}^{(1)} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \dot{q}^{(2)} + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 \dot{q}^{(3)} + O(\varepsilon^4)$$

$$X = p + \varepsilon \dot{p}^{(1)} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \dot{p}^{(2)} + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 \dot{p}^{(3)} + O(\varepsilon^4)$$

Функции $q^{(i)}(q, p, \tau)$ и $p^{(i)}(q, p, \tau)$ ($i = 1, 2, 3$) получаются при помощи формул метода Делпри–Хори [10] (которые здесь не приводятся) с использованием выражений для W_i ($i = 1, 2, 3$) из (1.11). Эти функции имеют вид

$$q^{(1)} = 0, \quad q^{(2)} = 2 \cos \tau \sin q, \quad q^{(3)} = -12p \sin \tau \cos q$$

$$p^{(1)} = 0, \quad p^{(2)} = -2p \cos \tau \cos q, \quad p^{(3)} = -0,75 \sin 2\tau \sin 2q - 6p^2 \sin \tau \sin q$$

После подстановки функций K_i из (1.11) в (1.10) осуществим еще одну каноническую унивалентную замену переменных $q, p \rightarrow u, v$, задаваемую формулами $u = \cos q, p = -v \sin q$, которая приведет гамильтониан (1.10) к алгебраической форме. Имеем

$$K = \varepsilon v^2 (1 - u^2) / 2 + \varepsilon^3 \Pi(u) + O(\varepsilon^4) \quad (1.12)$$

$$\Pi(u) = \frac{1}{4}(1 - u^2) + \gamma u + \frac{(\alpha - \beta u)^2}{2(1 - u^2)}$$

Соответствующие (1.12) уравнения движения имеют вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial u} \quad (1.13)$$

2. Приближенная система и ее положения равновесия. Если в (1.12) отбросить слагаемые $O(\varepsilon^4)$, то полученному укороченному гамильтониану будет отвечать автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du}{d\tau} = \varepsilon v (1 - u^2), \quad \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon u v^2 - \varepsilon^3 \frac{d\Pi}{du} \quad (2.1)$$

Найдем положения равновесия приближенной системы (2.1). Так как $u \neq \pm 1$, то в положении равновесия $v = 0$, а величина u удовлетворяет соотношению $d\Pi/du = 0$, где $d\Pi/du = f(u) - u/2 + \gamma$, а $f(u) = (\alpha - \beta u)(\alpha u - \beta)(1 - u^2)^{-2}$.

Уравнение

$$f(u) = \frac{1}{2}u - \gamma \quad (2.2)$$

которому удовлетворяют равновесные значения u , будем исследовать графически на интервале $(-1, 1)$, его корнями будут абсциссы точек пересечения кривой $y = f(u)$ и прямой $y = u/2 - \gamma$.

Как показывает анализ, функция $y = f(u)$ монотонно возрастает на промежутке $(-1, 1)$ при любых допустимых значениях α и β . Ее производная

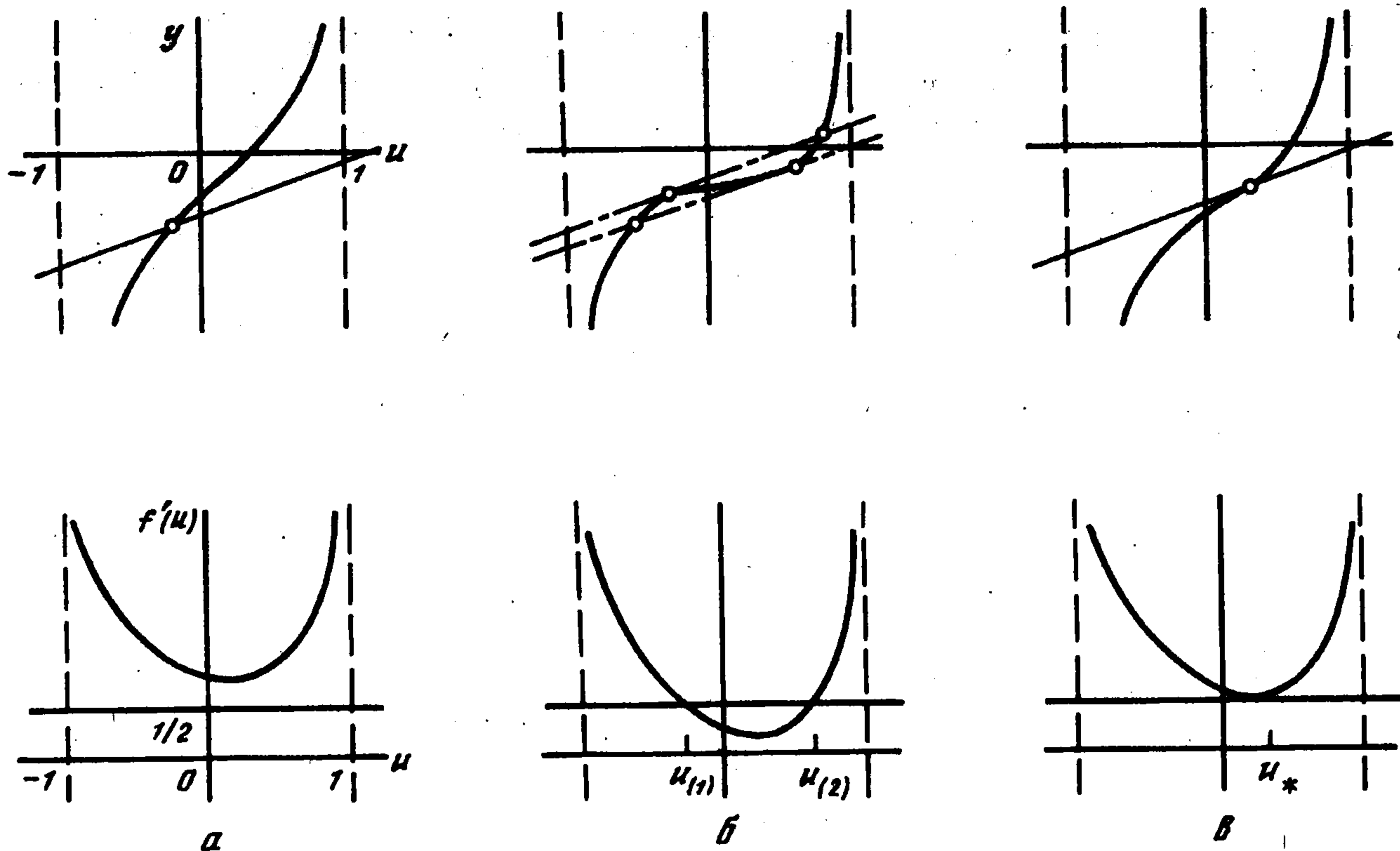
$$f'(u) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(1 + 3u^2) - 2\alpha\beta u(3 + u^2)}{(1 - u^2)^3} \quad (2.3)$$

имеет точку минимума $u = u_*$, являющуюся корнем уравнения $f''(u) = 0$, где

$$f''(u) = \frac{6[2(\alpha^2 + \beta^2)u(1 + u^2) - \alpha\beta(1 + 6u^2 + u^4)]}{(1 - u^2)^4}$$

причем $u_* \geq 0$ при $\alpha\beta \geq 0$ и $u_* < 0$ при $\alpha\beta < 0$. При $-1 < u < u_*$ функция $y = f'(u)$ монотонно убывает, при $u_* < u < 1$ — монотонно возрастает. Графики функций $y = f(u)$ и $y = f'(u)$ изображены на фиг. 1 для случая $\alpha\beta > 0$. Кривая $y = f(u)$ пересекает ось ординат в точке $(0, -\alpha\beta)$, а кривая $y = f'(u)$ — в точке $(0, \alpha^2 + \beta^2)$.

Возможны следующие случаи пресечения кривой $y = f(u)$ и прямой $y = u/2 - \gamma$.



Фиг. 1

Случай 1. Если $f'(u) > 1/2$ для всех $u \in (-1, 1)$ (фиг. 1, а), то кривая $y = f(u)$ в каждой точке идет "круче" прямой $y = u/2 - \gamma$, имеющей постоянный наклон. При этом для любого значения параметра γ ($\gamma > 0$) графики функций $y = f(u)$ и $y = u/2 - \gamma$ пересекаются в одной точке, абсциссу которой далее будем обозначать через $\hat{u}$, и система (2.1) имеет единственное положение равновесия.

Случай 2. Если $f'(u_*) < 1/2$, то прямая $y = 1/2$ пересекает график функции $y = f'(u)$ в двух точках (фиг. 1, б) и уравнение $f'(u) = 1/2$ имеет два решения, которые обозначим через $u_{(1)}$ и $u_{(2)}$ ($u_{(1)} < u_{(2)}$). В точках с абсциссами $u = u_{(i)}$ ($i = 1, 2$) прямые $y = u/2 - \gamma_{(i)}$ ($\gamma_{(i)} = u_{(i)}/2 - f(u_{(i)})$, $i = 1, 2$, $\gamma_{(1)} < \gamma_{(2)}$), показанные на фиг. 1, б штрих-пунктирными линиями, касаются кривой $y = f(u)$; величины $\gamma_{(i)}$ ($i = 1, 2$) являются функциями параметров α и β .

Если $\gamma_{(1)} > 0$ и $\gamma_{(2)} > 0$, то для значений параметра γ из интервалов $0 < \gamma < \gamma_{(1)}$ и $\gamma > \gamma_{(2)}$ графики функций $y = f(u)$ и $y = u/2 - \gamma$ пересекаются в одной точке, обозначим ее абсциссу через $\hat{u}$, а при $\gamma_{(1)} < \gamma < \gamma_{(2)}$ — в трех точках с абсциссами $u = u_i$, $i = 1, 2, 3$, причем $u_1 < u_{(1)} < u_2 < u_{(2)} < u_3$. При этом система (2.1) имеет соответственно одно и три положения равновесия. Если же $\gamma = \gamma_{(1)}$ или $\gamma = \gamma_{(2)}$, то система имеет два положения равновесия.

При $\gamma_{(1)} < 0$, $\gamma_{(2)} > 0$ имеем три положения равновесия, если $0 < \gamma < \gamma_{(2)}$, и одно положение равновесия, если $\gamma > \gamma_{(2)}$; если же $\gamma_{(1)} < 0$ и $\gamma_{(2)} < 0$, то при всех $\gamma > 0$ система имеет одно положение равновесия.

Граничной для описанных двух случаев является ситуация, когда $f'(u_*) = 1/2$, при этом $u_{(1)} = u_{(2)} = u_*$, а $\gamma_{(1)} = \gamma_{(2)} = \gamma_* = u_*/2 - f(u_*)$. Прямая $y = u/2 - \gamma_*$ касается кривой $y = f(u)$ в точке ее перегиба (в которой $u = u_*$), а система (2.1) имеет при всех значениях $\gamma > 0$ одно положение равновесия (фиг. 1, в).

Найдем геометрическое место точек плоскости параметров (α, β) , где реализуется эта граничная ситуация. Должны одновременно выполняться условия $f'(u) = 1/2$, $f''(u) = 0$, или, что равносильно,

$$(1 - u^2)^3 - 2(\alpha^2 + \beta^2)(1 + 3u^2) + 4\alpha\beta u(3 + u^2) = 0$$

$$\alpha\beta(u^4 + 6u^2 + 1) - 2(\alpha^2 + \beta^2)u(1 + u^2) = 0 \quad (2.4)$$

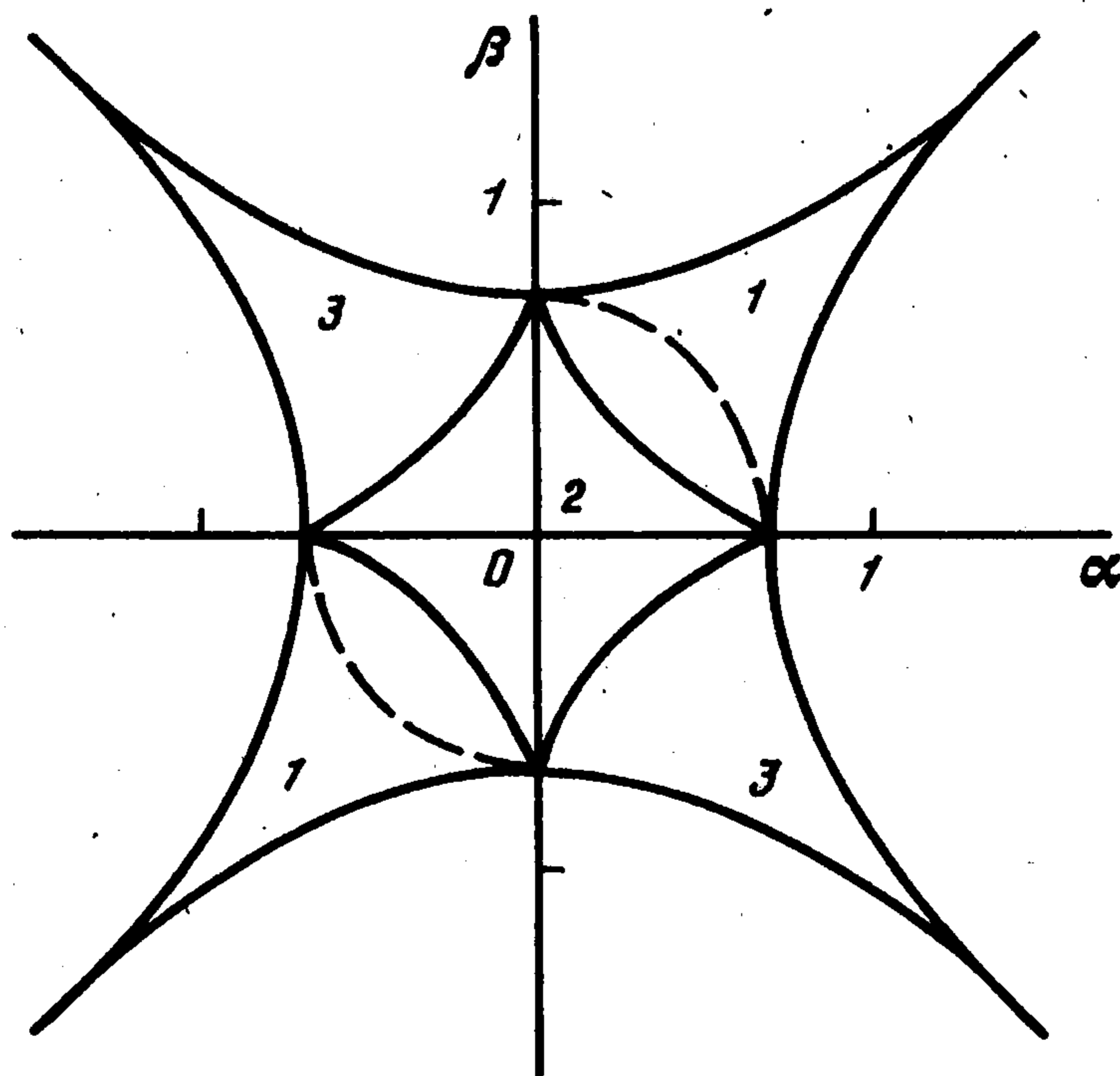
Задача сводится к определению тех значений параметров α и β , при которых два многочлена (2.4) имеют общие корни в интервале $(-1, 1)$. Для того чтобы два многочлена имели общие корни, необходимо и достаточно, чтобы их результат $R(\alpha, \beta)$ был равен нулю [11]. Вычисления показывают, что

$$R(\alpha, \beta) = 256(\alpha^2 - \beta^2)^6 [8\alpha^2 - (\beta^2 + 2)^2][(\alpha^2 + 2)^2 - 8\beta^2]$$

Так как по предположению $\alpha \neq \pm\beta$, то $R(\alpha, \beta) = 0$ при

$$\alpha = \pm \frac{\beta^2 + 2}{2\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \beta = \pm \frac{\alpha^2 + 2}{2\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

В плоскости параметров (α, β) соотношениям (2.5) отвечают параболы, имеющие



Фиг. 2

вершины в точках $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$ и $(0, \pm\sqrt{2}/2)$ и касающиеся друг друга в точках $(\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$. Анализ показывает, что для точек (α, β) парабол (2.5) при $|\alpha| \geq \sqrt{2}$, $|\beta| \geq \sqrt{2}$ общие корни многочленов (2.4) лежат вне интервала $(-1, 1)$, а при $|\alpha| < \sqrt{2}$, $|\beta| < \sqrt{2}$ находятся внутри него.

Поэтому переход от описанного выше случая 1 (когда система (2.1) имеет одно положение равновесия при всех $\gamma > 0$) к случаю 2 (одно или три положения равновесия, в зависимости от γ) и обратно происходит только при переходе через граничную кривую, представляющую собой криволинейный квадрат, сторонами которого являются части парабол (2.5) при $|\alpha| < \sqrt{2}$, $|\beta| < \sqrt{2}$, исключая его вершины, для которых $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{2}$ (фиг. 2).

Анализ показывает, что вне этого квадрата реализуется случай 1. При этом, если $\alpha\beta < 0$, то $\hat{u} < 0$ (ось симметрии волчка составляет тупой угол с вертикалью OZ , и центр масс тела расположен ниже точки подвеса O); если же $\alpha\beta \geq 0$, то $\hat{u} > 0$ (центр масс лежит выше точки подвеса) при $0 < \gamma < \alpha\beta$ и $\hat{u} \leq 0$ при $\gamma \geq \alpha\beta$.

Внутри криволинейного квадрата со сторонами-параболами (2.5) имеем случай 2. Выделим в этой области множество точек (α, β) , для которых обращаются в нуль величины $\gamma_{(i)}$ ($i = 1, 2$). Для таких точек должны одновременно выполняться условия $f(u) = u/2$ и $f'(u) = 1/2$. Это равносильно тому, что результат $G(\alpha, \beta)$ многочлена

$$(1 - u^2)^2 u + 2(\alpha - \beta u)(\beta - \alpha u)$$

и первого из многочленов (2.4) равен нулю. Расчеты показывают, что

$$G(\alpha, \beta) = -256(\alpha^2 - \beta^2)^4 g(\alpha, \beta)$$

$$g(\alpha, \beta) = 128(\alpha^6 + \beta^6) + 27\alpha^4\beta^4 - 48\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) - \\ - 192(\alpha^4 + \beta^4) + 696\alpha^2\beta^2 + 96(\alpha^2 + \beta^2) - 16$$

Так как $\alpha \neq \pm\beta$, то $G(\alpha, \beta) = 0$ при $g(\alpha, \beta) = 0$.

График кривой $g(\alpha, \beta) = 0$ (фиг. 2) представляет собой криволинейный квадрат, вершины которого $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$, $(0, \pm\sqrt{2}/2)$ лежат на сторонах криволинейного квадрата со сторонами-параболами (2.5) (являющегося границей рассматриваемой области). Указанные вершины являются для кривой $g(\alpha, \beta) = 0$ точками возврата; середины "сторон" (при $\alpha = \pm\beta$) имеют координаты $(\sqrt{6}/9, \pm\sqrt{6}/9)$, $(-\sqrt{6}/9, \pm\sqrt{6}/9)$.

На части кривой $g(\alpha, \beta) = 0$, лежащей в первой и третьей четвертях координатной плоскости (α, β) , где $\alpha\beta > 0$, обращается в нуль $\gamma_{(1)}$; на другой части кривой, во второй и четвертой четвертях, где $\alpha\beta < 0$, обращается в нуль $\gamma_{(2)}$. В областях 1 на фиг. 2 имеем $\gamma_{(1)} > 0$, $\gamma_{(2)} > 0$, в области 2 $\gamma_{(1)} < 0$, $\gamma_{(2)} > 0$, в областях 3 $\gamma_{(1)} < 0$, $\gamma_{(2)} < 0$; анализ числа положений равновесия системы (2.1) в зависимости от значения параметра γ для каждой из этих областей проводится так, как указано выше.

В областях 3 (единственное положение равновесия при всех $\gamma > 0$) имеем $\hat{u} < 0$.

В областях 1 и 2 для тех значений γ , при которых существует одно положение равновесия, имеем $\hat{u} > 0$ при $0 < \gamma < \gamma_{(1)}$ и $\hat{u} < 0$ при $\gamma > \gamma_{(2)}$ в областях 1 и $\hat{u} < 0$ при $\gamma > \gamma_{(2)}$ в области 2.

В случае трех положений равновесия $u = u_i$ ($i = 1, 2, 3$) в областях 1 при $\alpha^2 + \beta^2 > 1/2$ имеем $u_2 > 0$, $u_3 > 0$, а $u_1 \geq 0$ при $\gamma_{(1)} < \gamma \leq \alpha\beta$ и $u_1 < 0$ при $\alpha\beta < \gamma < \gamma_{(2)}$; на окружности $\alpha^2 + \beta^2 = 1/2$ имеем $u_1 < 0 < u_2 < u_3$; для точек внутри этой окружности $u_1 < 0$, $u_3 > 0$, а $u_2 < 0$ при $\gamma_{(1)} < \gamma < \alpha\beta$ и $u_2 \geq 0$ при $\alpha\beta \leq \gamma < \gamma_{(2)}$ (дуги окружности $\alpha^2 + \beta^2 = 1/2$ показаны на фиг. 2 штриховой линией).

В случае трех положений равновесия в области 2 имеем $u_1 < 0$, $u_3 > 0$, при этом, если $\alpha\beta \leq 0$, то $u_2 > 0$, а если $\alpha\beta > 0$, то $u_2 < 0$ при $0 < \gamma < \alpha\beta$ и $u_2 \geq 0$ при $\alpha\beta \leq \gamma < \gamma_{(2)}$.

Рассмотрим теперь случаи $\gamma = \gamma_{(1)}$ или $\gamma = \gamma_{(2)}$ в областях 1 и 2, когда система (2.1) имеет два положения равновесия. Если $\gamma = \gamma_{(1)}$ (в областях 1), то $u_1 = u_2 = u_{(1)} < u_{(2)} < u_3$; если $\gamma = \gamma_{(2)}$ (в областях 1 и 2), то $u_1 < u_{(1)} < u_2 = u_3 = u_{(2)}$. Вне окружности $\alpha^2 + \beta^2 = 1/2$ в этих областях имеем $u_{(1)} > 0$, $u_{(2)} > 0$, на окружности $u_{(1)} = 0$, $u_{(2)} \geq 0$ при $\alpha\beta \geq 0$ и $u_{(1)} > 0$, $u_{(2)} = 0$ при $\alpha\beta < 0$; внутри окружности $u_{(1)} < 0$, $u_{(2)} > 0$. Знаки некратных равновесных значений u определяются так же, как в случае трех положений равновесия.

Для точек (α, β) , принадлежащих криволинейному квадрату со сторонами-параболами (2.5) (граничная ситуация, когда при всех $\gamma > 0$ система (2.1) имеет одно положение равновесия), имеем $\hat{u} < 0$ при $\alpha\beta < 0$, а при $\alpha\beta \geq 0$ $\hat{u} > 0$, если $0 < \gamma < \alpha\beta$, и $\hat{u} \leq 0$, если $\gamma \geq \alpha\beta$.

Для точек криволинейного квадрата, описываемого уравнением $g(\alpha, \beta) = 0$, при $\alpha\beta < 0$ имеем $\hat{u} < 0$, а при $\alpha\beta \geq 0$ $u_1 < 0$, $u_3 > 0$, при этом $u_2 < 0$, если $0 < \gamma < \alpha\beta$ и $u_2 \geq 0$ при $\alpha\beta \leq \gamma < \gamma_{(2)}$.

3. О периодических движениях приведенной системы. Движения волчка Лагранжа, близкие к регулярным прецессиям. Рассмотрим теперь движения приведенной системы, описываемой гамильтонианом (1.12).

В окрестности положения равновесия $u = \text{const}$, $v = 0$ приближенной системы (2.1) приведенную систему (1.13) можно рассматривать как квазилинейную с 2π -периодическими по τ возмущениями порядка ε^4 . Корни характеристического уравнения линеаризованной в окрестности положения равновесия приближенной системы имеют

порядок ε^2 , поэтому при достаточно малых ε имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических движениях [12]. Исключим из рассмотрения случай $\gamma = \gamma_*$ для точек (α, β) , принадлежащих границе криволинейного квадрата со сторонами (2.5), а также случаи $\gamma = \gamma_{(1)}$ в областях 1 и $\gamma = \gamma_{(2)}$ в областях 1 и 2 на фиг. 2 (см. разд. 2). Для всех остальных допустимых значений параметров α, β и γ из каждого положения равновесия приближенной системы рождается единственное аналитическое по ε , 2π -периодическое по τ решение системы с полным гамильтонианом (1.12).

Произведя в обратном порядке последовательность замен переменных, описанных в разд. 1, получим, что $p_\theta = O(\varepsilon^4)$, а угол отклонения оси симметрии волчка от верхнего вертикального положения определяется выражением

$$\theta = \arccos u_0 + \varepsilon^2 \sqrt{1 - u_0^2} \cos \tau + O(\varepsilon^4) \quad (3.1)$$

где u_0 — равновесное значение u приближенной системы ($u_0 = \hat{u}$ в случае одного и $u_0 = u_i$ ($i = 1, 2$ или 3) в случае трех положений равновесия). Величины $O(\varepsilon^4)$ в выражении для p_θ и в (3.1) 2π -периодичны по τ .

Используя соотношения (1.5) и связь между постоянными a, b и α, β (см. разд. 1), найдем следующие выражения для угловых скоростей прецессии и собственного вращения:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \varepsilon^2 \frac{\alpha - \beta \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \varepsilon^2 \left[\frac{A}{C} \beta - \frac{(\alpha - \beta \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \quad (3.2)$$

Величина θ определена в (3.1).

Соотношения (3.1), (3.2) задают движения волчка Лагранжа с вибрирующей точкой O , близкие к регулярной прецессии: угол нутации θ отличается от постоянной на величину порядка ε^2 , а угловые скорости $d\psi/d\tau, d\phi/d\tau$, являясь малыми порядка ε^2 , отличаются от постоянных на величины порядка ε^4 ; эти "поправки" 2π -периодичны по τ .

Отметим, что в случае волчка Лагранжа с неподвижной точкой каждой паре (a, b) параметров задачи ($a \neq \pm b$) отвечает только одно значение угла θ , для которого существует регулярная прецессия волчка. При наличии вибраций точки O , рассматриваемых в данной работе, в зависимости от значений параметров α, β и γ существует одно или три движения, близких к регулярной прецессии.

4. Устойчивость движений волчка, близких к регулярным прецессиям. Рассмотрим устойчивость описанных в разд. 3 движений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой O , близких к регулярным прецессиям, по отношению к переменным θ и p_θ . Этим движениям волчка отвечают 2π -периодические по τ решения приведенной системы (1.13) вида $u^* = u_0 + O(\varepsilon^4), v^* = O(\varepsilon^4)$.

Полагая $u = u^* + x, v = v^* + y$, запишем гамильтониан возмущенного движения в виде ряда по степеням x, y

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots \quad (4.1)$$

где Γ_k — форма k -й степени относительно x, y с коэффициентами, являющимися 2π -периодическими по τ функциями; если пренебречь слагаемыми порядка ε^4 и выше, то имеем

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - u_0^2) y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \left[f'(u_0) - \frac{1}{2} \right] x^2$$

$$\Gamma_3 = -\varepsilon u_0 x y^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^3 f''(u_0) x^3$$

$$\Gamma_4 = -\frac{1}{2} \varepsilon x^2 y^2 + \frac{1}{24} \varepsilon^3 f'''(u_0) x^4$$

В линейном приближении вопрос об устойчивости рассматриваемых движений определяется знаком коэффициента $f'(u_0) - \frac{1}{2}$ формы Γ_2 : если $f'(u_0) > \frac{1}{2}$, то имеем устойчивость, если $f'(u_0) < \frac{1}{2}$ — неустойчивость.

Знак величины $f'(u_0) - \frac{1}{2}$ для случаев одного из трех положений равновесия $u = u_0$, $v = 0$ приближенной системы, которые порождают рассматриваемые периодические движения, находим на основании результатов разд. 2. В случае одного положения равновесия $u_0 = \hat{u}$, $v = 0$ имеем $f'(\hat{u}) > \frac{1}{2}$ (см. фиг. 1, а), и соответствующее периодическое решение устойчиво в линейном приближении. В случае трех положений равновесия, когда $u_0 = u_i$ ($i = 1, 2, 3$), учитывая, что $u_1 < u_{(1)} < u_2 < u_{(2)} < u_3$, а также что $f'(u) > \frac{1}{2}$ при $-1 < u < u_{(1)}$ и $u_{(2)} < u < 1$ и $f'(u) < \frac{1}{2}$ при $u_{(1)} < u < u_{(2)}$ (фиг. 1, б), получим, что периодические движения, отвечающие большему (u_3) и меньшему (u_1) равновесным значениям u , устойчивы, а движение, отвечающее среднему (u_2) равновесному значению u , неустойчиво в линейном приближении.

Это неустойчивое в линейном приближении периодическое движение останется неустойчивым и в нелинейной задаче, что следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [13].

Дадим строгое решение задачи об устойчивости периодических движений приведенной системы, являющихся устойчивыми в линейном приближении. Для ее решения проведем нелинейный анализ с использованием результатов КАМ-теории [14].

При помощи канонического преобразования Биркгофа $x, y \rightarrow X, Y$ функцию Гамильтона (4.1) можно привести к нормальной форме вида [15]

$$\Gamma = \frac{1}{2}\omega(X^2 + Y^2) + \frac{1}{4}c(X^2 + Y^2)^2 + O_5$$

где O_5 — 2π -периодическая по τ совокупность членов, степень которых по X и Y не ниже пятой; ω и c — постоянные коэффициенты, имеющие, как показывают вычисления, следующий вид:

$$\omega = \varepsilon^2 \sqrt{(1 - u_0^2)(f'(u_0) - \frac{1}{2})} + O(\varepsilon^4)$$

$$c = -\frac{\varepsilon c_1}{16(f'(u_0) - \frac{1}{2})^2(1 - u_0^2)^6} + O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} c_1 = & 4(3u_0^4 + 15u_0^2 - 2)(\alpha^4 + \beta^4) - 8u_0(3u_0^4 + 20u_0^2 + 9)\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \\ & + 4(u_0^6 + 39u_0^4 + 45u_0^2 + 11)\alpha^2\beta^2 + 2(15u_0^4 + 32u_0^2 + 1)(1 - u_0^2)^2(\alpha^2 + \beta^2) - \\ & - 8u_0(u_0^4 + 17u_0^2 + 6)(1 - u_0^2)^2\alpha\beta + (2u_0^2 + 1)(1 - u_0^2)^5 \end{aligned}$$

Если $c \neq 0$, то по теореме Арнольда — Мозера [14] имеет место устойчивость рассматриваемого периодического движения. При достаточно малых ε условие устойчивости будет нарушаться при выполнении равенства $c_1 = 0$, причем входящая в c_1 величина u_0 является корнем уравнения (2.2).

Для исследования системы, образованной уравнениями (2.2) и $c_1 = 0$, введем новые параметры

$$\sigma_1 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \sigma_2 = \alpha\beta \quad (\sigma_1 > 0) \quad (4.2)$$

Величины σ_1 и σ_2 должны удовлетворять очевидным неравенствам

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 > 0, \quad \sigma_1 - 2\sigma_2 > 0 \quad (4.3)$$

причем знак равенства в (4.3) невозможен, так как по предположению $\alpha \neq \pm\beta$.

Уравнение $c_1 = 0$ квадратное, а уравнение (2.2) линейное относительно σ_1 и σ_2 ; они имеют вид

$$\begin{aligned} & 4(3u_0^4 + 15u_0^2 - 2)\sigma_1^2 + 4(u_0^6 + 33u_0^4 + 15u_0^2 + 15)\sigma_2^2 - \\ & - 8u_0(3u_0^4 + 20u_0^2 + 9)\sigma_1\sigma_2 + 2(15u_0^4 + 32u_0^2 + 1)(1 - u_0^2)^2\sigma_1 - \\ & - 8u_0(u_0^4 + 17u_0^2 + 6)(1 - u_0^2)^2\sigma_2 + (2u_0^2 + 1)(1 - u_0^2)^5 = 0 \\ & u_0\sigma_1 - (1 + u_0^2)\sigma_2 = (u_0/2 - \gamma)(1 - u_0^2)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выразив из второго уравнения (4.4) σ_2 через σ_1 и подставив в первое, получим уравнение

$$\begin{aligned} & 8\sigma_1^2 - 2[15u_0^4 + 1 + 8u_0\gamma(3 - u_0^2)]\sigma_1 - [4(u_0^6 + 33u_0^4 + 15u_0^2 + 15)\gamma^2 - \\ & - 4u_0(3u_0^6 + 69u_0^4 + 61u_0^2 + 27)\gamma + (3u_0^8 + 102u_0^6 + 108u_0^4 + 42u_0^2 + 1)] = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Рассмотрим его как квадратное относительно σ_1 . Будем интересоваться условиями, при которых корни этого уравнения вещественны, положительны и, кроме того, удовлетворяют соотношениям, вытекающим из неравенств (4.3). Указанные соотношения имеют вид

$$\sigma_1 > (u_0 - 2\gamma)(1 - u_0)^2, \quad \sigma_1 > -(u_0 - 2\gamma)(1 + u_0)^2 \quad (4.6)$$

Уравнение (4.5) имеет вещественные решения, если его дискриминант

$$\begin{aligned} D &= 12(1 + u_0^2)^2 D_1 \\ D_1 &= 32(u_0^2 + 5)\gamma^2 - 16(7u_0^2 + 17)u_0\gamma + (83u_0^4 + 106u_0^2 + 3) \end{aligned}$$

неотрицателен. Рассмотрим D_1 как квадратный трехчлен относительно γ ; его дискриминант $-1920(1 - u_0^2)^3 < 0$ при $|u_0| < 1$, поэтому условие $D_1 > 0$, а значит, $D > 0$ выполняется при всех допустимых значениях параметров γ и u_0 . Поэтому уравнение (4.5) имеет два корня, равные

$$[15u_0^4 + 1 + 8u_0\gamma(3 - u_0^2) \pm (1 + u_0^2)\sqrt{3D_1}]/8 \quad (4.7)$$

Исследование их знаков показывает, что больший корень (который далее будем обозначать σ_1^*) всегда положителен; меньший корень либо отрицателен, либо положителен, но при этом не удовлетворяет условиям (4.6). Корень же σ_1^* удовлетворяет условиям (4.6) при любых допустимых значениях параметров u_0 и γ .

Таким образом, уравнение (4.5) имеет одно решение $\sigma_1 = \sigma_1^*$, удовлетворяющее всем поставленным условиям. Ему отвечает значение

$$\sigma_2 = \sigma_2^* = \frac{\sigma_1^* u_0 - (u_0/2 - \gamma)(1 - u_0^2)^2}{1 + u_0^2} \quad (4.8)$$

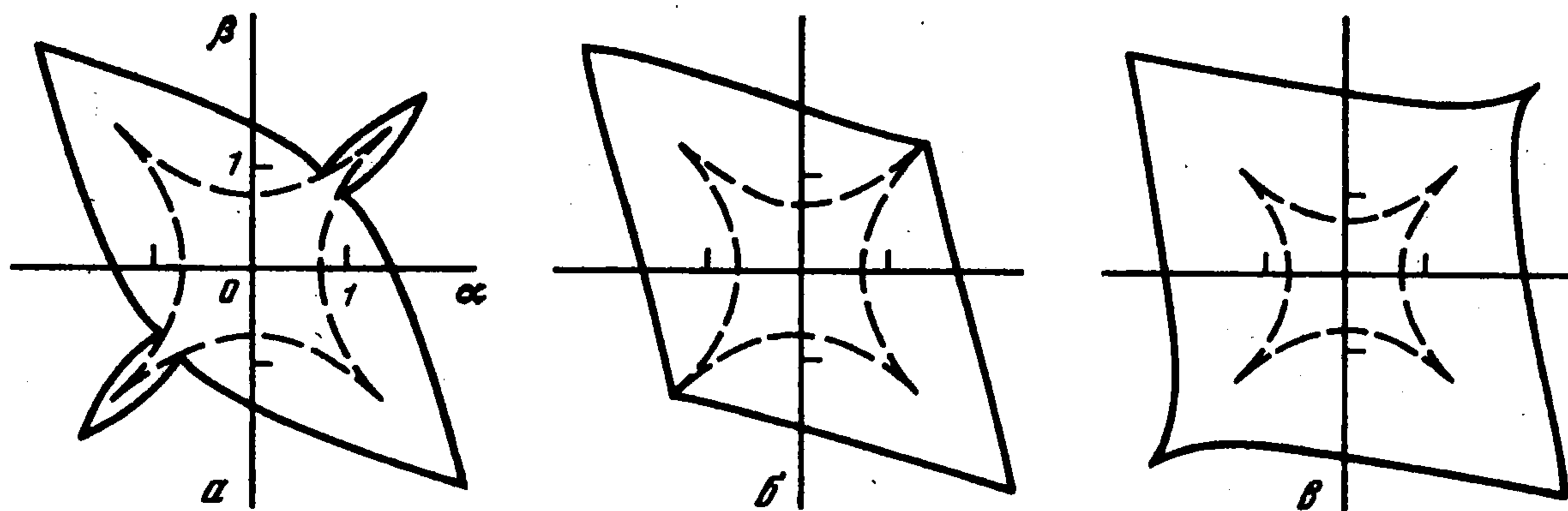
полученное из второго уравнения (4.4).

Возвращаясь вновь к параметрам α и β согласно соотношениям (4.2), найдем соответствующие паре величин σ_1^* , σ_2^* четыре пары значений α , β :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= (A \pm B)/2, \quad \beta_{1,2} = (A \mp B)/2 \\ \alpha_{3,4} &= (-A \pm B)/2, \quad \beta_{3,4} = (-A \mp B)/2 \\ A &= \sqrt{\sigma_1^* + 2\sigma_2^*}, \quad B = \sqrt{\sigma_1^* - 2\sigma_2^*} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Пусть величина γ фиксирована, тогда соотношения (4.9) при учете выражений (4.7) и (4.8) задают в параметрическом виде кривые в плоскости (α, β) (параметром служит величина u_0 , изменяющаяся в пределах от -1 до 1), где нарушается достаточное условие устойчивости рассматриваемого периодического движения приведенной системы.

Вид этих кривых зависит от значения параметра γ . Анализ показывает, что качественно различными будут случаи, когда $0 < \gamma < 1$ и $\gamma > 1$. На фиг. 3, а, б, в показаны соответственно случаи $0 < \gamma < 1$, $\gamma = 1$, $\gamma > 1$. Во всех этих случаях кривые (4.9)



Фиг. 3

образуют замкнутый контур, изображенный на фиг. 3 сплошной линией. Контур имеет вершины в точках с координатами $(\pm\sqrt{2(2-\gamma)}, \pm\sqrt{2(2-\gamma)})$ при $\gamma < 1$ и $(\pm\sqrt{2(2\gamma-1)}, \pm\sqrt{2(2\gamma-1)})$ при $\gamma \geq 1$, когда $\alpha = \beta$ (им отвечает $u_0 = 1$), а также вершины $(\pm\sqrt{2(2+\gamma)}, \mp\sqrt{2(2+\gamma)})$, когда $\alpha = -\beta$ (при этом $u_0 = -1$).

Штриховой линией на фиг. 3 показан криволинейный квадрат со сторонами-параболами (2.5), внутри которого в каждой точке (α, β) существует одно или три периодических движения приведенной системы (в зависимости от γ), а вне — только одно такое движение. При $\gamma > 1$ контур из кривых (4.9) целиком содержит в себе криволинейный квадрат и его границу (фиг. 3, в). При $0 < \gamma < 1$ каждая из кривых (4.9) также лежит вне области, занимаемой этим квадратом, но имеет с одной из парабол (2.5) общую точку, являющуюся для кривой точкой возврата (фиг. 3, а); координаты точек возврата $(\pm(1+\gamma^2)/\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\gamma)$ и $(\pm\sqrt{2}\gamma, \pm(1+\gamma^2)/\sqrt{2})$, этим точкам отвечает значение $u_0 = \gamma$ параметра u_0 . При $\gamma = 1$ точки возврата кривых (4.9) попарно сливаются и совпадают с вершинами образуемого этими кривыми контура (фиг. 3, б).

Таким образом, 2π -периодические движения приведенной системы, являющиеся устойчивыми в линейном приближении и отвечающие точкам (α, β) внутри криволинейного квадрата со сторонами (2.5), при любых значениях γ устойчивы и в нелинейной задаче. Единственное и устойчивое в линейном приближении периодическое движение для точек вне этого квадрата также устойчиво, за исключением, быть может, точек (α, β) , лежащих на кривых (4.9).

Полученные выводы об устойчивости периодических движений приведенной системы переносятся на отвечающие им движения волчка Лагранжа, близкие к регулярным прецессиям: для точек (α, β) внутри квадрата со сторонами (2.5) существуют (в зависимости от γ) либо одно устойчивое движение волчка, либо три таких движения, два из которых устойчивы, а одно неустойчиво; вне квадрата существует одно движение, которое устойчиво для всех допустимых значений параметров α, β, γ , за исключением, быть может, точек, принадлежащих кривым (4.9).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.
2. Федорченко А.М. О движении тяжелого несимметричного гироскопа с вибрирующей точкой опоры // Укр. мат. журн. 1958. Т. 10. № 2. С. 209–218.
3. Федорченко А.М. Об одном динамическом методе повышения устойчивости быстро-вращающегося симметричного гироскопа // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 938–940.
4. Журавлев В.Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.
5. Марков Ю.Г. О движении вязкоупругого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 16–23.
6. Ковалева А.С. Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 44–52.
7. Розе Н.В. Динамика твердого тела. Л.: КУБУЧ, 1932. 305 с.
8. Grammel R. Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Berlin: Springer, 1950. = Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 352 с.
9. Magnus K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin et al.: Springer, 1971. = Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир, 1974. 526 с.
10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 431 с.
12. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
13. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
14. Moser J.K. Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968. = Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир. 1973. 167 с.
15. Birkhoff J.D. Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927. = Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941. 320 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1999