

УДК 531.36

© 1999 г. А.П. Блинов

О ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При изучении движения материальной точки на плоскости Жуковским [1] указан случай, когда, не разыскивая общих интегралов уравнений движения, можно дать частные интегралы этих движений. Для получения частных интегралов в явном виде на силовую функцию накладывалось некоторое ограничение. Изучается случай движения без указанного ограничения.

1. Следуя Жуковскому [1], рассмотрим такую задачу: пусть в некоторых криволинейных координатах на плоскости $q = \text{const}$ – уравнение семейства линий уровня потенциальной функции сил $f(q)$ и $q_1 = \text{const}$ – уравнение семейства линий, перпендикулярных к линиям уровня, v – скорость движения точки, Θ – угол между направлением скорости и направлением силы (отнесенной к единице массы), ψ и φ – углы, образованные этими направлениями и данной неподвижной осью Ox .

Когда линии уровня представляют собой изотермические координатные линии, при помощи теоремы живых сил

$$v^2 = 2f(q) + C \quad (1.1)$$

было получено [1] дифференциальное уравнение

$$d\psi / dq_1 = f'(q) / (2f(q) + C) \quad (1.2)$$

Далее, в предположении, что функция f удовлетворяет уравнению

$$f'(q) / (2f(q) + C) = \mu \quad (1.3)$$

где μ – величина постоянная, находятся частные интегралы [1] задачи.

Пусть теперь μ – величина не обязательно постоянная, а является некоторой дифференцируемой функцией q .

Учитывая, что $\psi = \psi(q_1, q)$, где q – функция q_1 , можно записать

$$\frac{d\psi}{dq_1} = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{dq}{dq_1}$$

Но $\psi = \pi - \Theta - \varphi$, где $\varphi = \varphi(q_1, q)$ – известная функция переменных q_1, q . Это позволяет придать уравнению (1.2) следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) \frac{dq}{dq_1} + \mu(q) = 0 \quad (1.4)$$

Так как $\text{ctg } \Theta = dq/dq_1$, то, дифференцируя по q_1 левую и правую часть последнего выражения, получим

$$-\frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{d\Theta}{dq_1} = -\frac{1}{\sin^2 \Theta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial q} \frac{dq}{dq_1} \right) = \frac{d^2 q}{dq_1^2}$$

Учитывая также, что $\sin^2 \Theta = [1 + (dq/dq_1)^2]^{-1}$, уравнение (1.4) приведем к виду

$$-\left[1 + \left(\frac{dq}{dq_1}\right)^2\right]^{-1} \frac{d^2 q}{dq_1^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{dq}{dq_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \mu(q) = 0 \quad (1.5)$$

Решения уравнения (1.5) определяют траектории движения материальной точки, а интеграл (1.1) позволяет определить скорость движения в каждой точке траектории (в том числе и в начальной точке).

2. Применим изложенное в разд. 1 к следующей задаче. Пусть на гладкой горизонтальной плоскости между двумя неподвижными точками натянута упругая невесомая нить. Зафиксируем на этой плоскости декартову систему координат Oxy так, чтобы точки крепления нити лежали на оси x на расстоянии l от начала координат симметрично. Пусть вдоль нити может скользить тяжелая точка (тяжелое твердое тело с центром динамической симметрии в центре невесомого карданова подвеса, имеющем направляющее отверстие для нити). Рассмотрим движение такой точки единичной массы с начальной скоростью v_0 , не совпадающей, вообще говоря, по направлению с осью x без учета трения. Такая задача может служить грубой моделью движения груза, посылаемого вдоль троса, связывающего два космических аппарата или две различные точки одного космического аппарата.

Вначале предположим, что нить не имеет предварительного натяжения. Потенциальная энергия нити дается выражением

$$V = g(r_1 + r_2 - 2l)^2/2 \quad (2.1)$$

Здесь g — коэффициент жесткости растяжения нити, r_1, r_2 — расстояния от материальной точки до левой и правой точки крепления соответственно.

Линии равного уровня, определяемые параметром d_2 , $g(r_1 + r_2 - 2l)^2 = 2d_2$, образуют семейство софокусных эллипсов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - l^2} = 1; \quad 2a = 2l + \sqrt{\frac{2d_2}{g}} \quad (2.2)$$

которому отвечает ортогональное семейство софокусных гипербол

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{l^2 - b^2} = 1; \quad 0 \leq b < l$$

От декартовых координат перейдем к эллиптическим [2], приведя уравнение (2.2) заменой $\lambda = l^2 - a^2$ к виду

$$\frac{x^2}{l^2 - \lambda} - \frac{y^2}{\lambda} = 1 \quad (2.3)$$

и полагая в качестве новых координат $\tilde{q}_1 = \lambda$ при $0 < \lambda < l^2$ и $\tilde{q}_2 = \lambda$ при $\lambda < 0$. При этом формулы

$$x^2 = (l^2 - \tilde{q}_1)(l^2 - \tilde{q}_2)l^{-2}, \quad y^2 = -\tilde{q}_1\tilde{q}_2l^{-2} \quad (2.4)$$

определяют соответствие между эллиптическими координатами $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ и всеми положительными декартовыми координатами.

Делая новую замену переменных $\tilde{q}_1 = l^2 \sin^2 q_1$, $\tilde{q}_2 = -l^2 \operatorname{sh}^2 q$, приходим к координатам q_1, q , которые связаны с исходными координатами (не принимаем во внимание двойной знак при извлечении корня) выражениями

$$x = l \cos q_1 \operatorname{ch} q, \quad y = l \sin q_1 \operatorname{sh} q \quad (2.5)$$

Координаты q_1, q являются изотермическими, так как квадрат элемента дуги линии

$$ds^2 = l^2(\operatorname{ch}^2 q - \cos^2 q)(dq_1^2 + dq^2)$$

Потенциальная энергия в этих координатах и функция $\mu(q)$ имеют вид

$$V = 2l^2 g(\operatorname{ch} q - 1)^2, \quad \mu(q) = -\frac{(\operatorname{ch} q - 1)\operatorname{sh} q}{d_1 - (\operatorname{ch} q - 1)^2}, \quad d_1 = \frac{h}{4l^2 g}.$$

Интеграл живых сил записывается в виде

$$h = v^2 + 2V(q) \quad (2.6)$$

Далее выясним зависимость φ от q_1, q . Величина $\varphi = \varphi(x, y)$ — угол наклона касательной к некоторой гиперболе — координатной линии $\tilde{q}_{10} = \operatorname{const}$ ($x \geq 0, y > 0$) (или $\tilde{q}_{10}(x, y) = \operatorname{const}$).

Из выражения (2.4) имеем $\tilde{q}_2 = -l^2 y^2 / \tilde{q}_1$ и $x^2 = (l^2 - \tilde{q}_1)(1 + y^2 / \tilde{q}_1)$. Зафиксировав в последнем выражении $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_{10}$, получим уравнение ветви гиперболы в декартовых координатах для $x > 0, y \geq 0$

$$y = \sqrt{x^2 \tilde{q}_{10} / (l^2 - \tilde{q}_{10}) - \tilde{q}_{10}}$$

Для этой гиперболы

$$\operatorname{tg} \varphi = dy/dx = \sqrt{\tilde{q}_{10} x [x^2 (l^2 - \tilde{q}_{10}) - (l^2 - \tilde{q}_{10})^2]}^{-1/2}$$

Рассматривая полученное выражение для произвольных $\tilde{q}_1$ (т.е. заменяя $\tilde{q}_{10}$ на $\tilde{q}_1$) и используя формулы (2.4), (2.5), получим (после некоторых упрощений)

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} q_1 \operatorname{cth} q) \quad (2.7)$$

Далее, вычислив $\partial\varphi/\partial q$ и $\partial\varphi/\partial q_1$, запишем уравнение (1.5) для рассматриваемого примера

$$\frac{q''}{1+q'^2} + \frac{q' \sin q_1 \cos q_1}{\Delta_1} - \frac{\operatorname{ch} q \operatorname{sh} q}{\Delta_1} - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{q}{2} \operatorname{sh} q \left(4 \operatorname{sh}^4 \frac{q}{2} - d_1 \right)^{-1} = 0 \quad (2.8)$$

$$q' = dq/dq_1, \quad \Delta_1 = \cos^2 q_1 \operatorname{sh}^2 q + \sin^2 q_1 \operatorname{ch}^2 q$$

где Δ_1 — якобиан перехода к новым координатам. При этом область возможного движения определяется неравенством

$$2l^2 g(1 + \operatorname{ch} q)^2 < h$$

Ограничимся далее рассмотрением движения при малых отклонениях материальной точки от оси x , т.е. при малых значениях координаты q и энергии h . Для этого введем безразмерный малый параметр $\varepsilon = 2d_1$ и произведем замены $q = \varepsilon w$, $q_1 = z$. Тогда, если в уравнении (2.8) после подстановки новых переменных сохранить слагаемые не выше первого порядка относительно ε , то получим

$$w'' + \operatorname{ctg} z w' - \frac{1}{\sin^2 z} w = -\varepsilon w^3 \quad (2.9)$$

Общее решение невозмущенного уравнения (при $\varepsilon = 0$) представляют два линейно независимых решения $w_{10} = \operatorname{ctg} z$ и $w_{20} = 1/\sin z$. Решая уравнение (2.9) методом

вариации произвольных постоянных относительно величины w_1 , входящей в разложение $w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots$, и возвращаясь к переменным q_1, q , получим в первом приближении

$$q = \varepsilon \left(C_1 \operatorname{ctg} q_1 + C_2 \frac{1}{\sin q_1} \right) + \varepsilon^2 \left[\operatorname{ctg} q_1 \left(-C_1^3 Q_1(q) + \frac{3}{2} C_1^2 C_2 Q_2(q) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} C_1 C_2^2 \frac{1}{\sin^2 q_1} + C_2^3 q_1 + C_{10} \right) + \frac{1}{\sin q_1} \left(C_1^3 Q_3(q) + 3 C_1^2 C_2 Q_1(q) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} C_1 C_2^2 Q_2(q) - C_2^3 \sin q_1 + C_{20} \right) \right]$$

$$Q_1(q) = \frac{1}{2 \sin^2 q_1} + \ln \sin q_1 \quad Q_2(q) = \ln \operatorname{ctg} \frac{q_1}{2} - \frac{\cos q_1}{\sin^2 q_1}$$

$$Q_3(q) = q_1 - \frac{3}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{q_1}{2} + \frac{\cos q_1}{2 \sin^2 q_1}$$

Постоянные C_1, C_2 определяются по начальным условиям задачи из нулевого приближения (т.е. при отбрасывании выражения с множителем ε^2), а постоянные C_{10}, C_{20} — из условия обращения в нуль выражения в квадратных скобках при данных начальных условиях, причем начальные условия не следует задавать в точках крепления нити, т.е. при $q_1 = 0$. (Точка $q_1 = 0, q = 0$ является регулярной особой точкой уравнения (2.9) [3], а точки отрезка $[-l, l]$ оси x — положениями равновесия динамической системы.)

Отметим, следуя Жуковскому, что определенное выше движение материальной точки соответствует только частному случаю, когда скорость в каждой точке траектории, а значит, и начальная скорость дается уравнением (2.6).

Замечания. 1°. Если нить, при которой движется тяжелая точка, имеет предварительное натяжение Δl (движение точки по натянутой невесомой струне $(2l - \Delta l) > 0$), то потенциальная энергия определяется выражением

$$V = g[(r_1 + r_2 + \Delta l - 2l)^2/2 + (r_1 + r_2 - 2l)\Delta l]$$

Видно, что линиями равного уровня по-прежнему будут софокусные эллипсы. Это позволяет произвести вычисления, аналогичные изложенным, причем предположение о малом отклонении материальной точки от оси x в этом случае будет более естественным.

2°. По аналогии с рассмотренным примером можно изучать плоские движения заряженных частиц в электростатическом поле заряженных поверхностей эллиптических цилиндров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н.Е. Полное собр. соч. Т. 1. Общая механика. М.: ОНТИ, НКТП СССР, 1937. 636 с.
2. Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1, Mechanik. Leipzig: Teubner, 1897. = Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
3. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1999