

УДК 531.011+531.383

© 1999 г. Г.Б. Малыкин

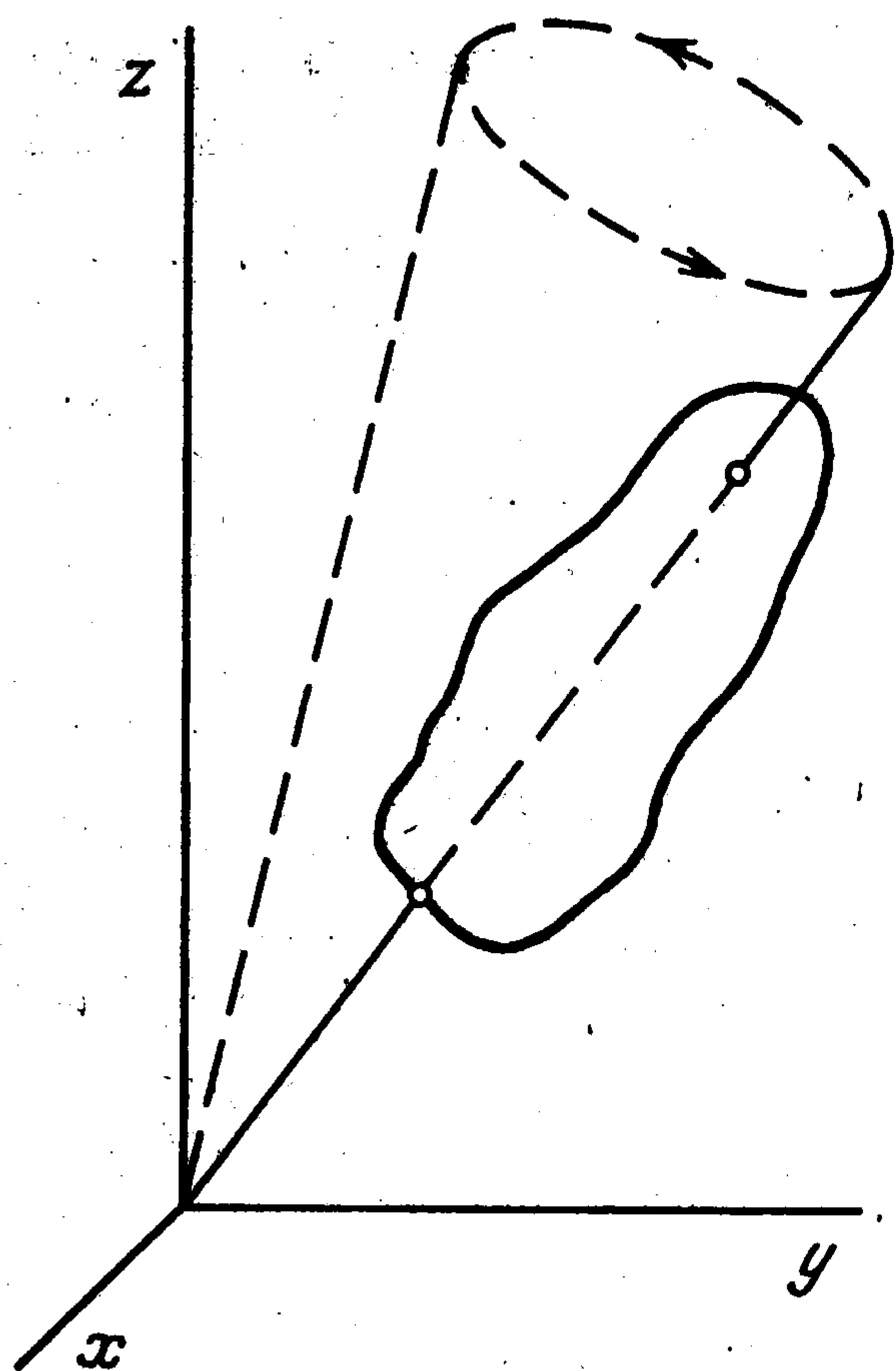
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ТЕЛЕСНОМ УГЛЕ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Известная в классической механике теорема А.Ю. Ишлинского утверждает, что если ось, выделенная в твердом теле, имеющем нулевую проекцию угловой скорости на эту ось, описала в процессе движения тела замкнутую коническую поверхность, то после возвращения оси в исходное положение тело оказывается повернутым вокруг нее на угол, численно равный телесному углу описанного конуса. Показано, что такое же соотношение имеет место и в специальной теории относительности – угол поворота, происходящего в процессе движения твердого тела по криволинейной траектории вследствие эффекта томасовской прецессии, численно равен наблюдаемому в неподвижной системе отсчета телесному углу, который описала связанная с телом ось вследствие изменения поворота изображения твердого тела. Последнее явление вызвано лоренцевским сокращением длины и запаздыванием света, испущенного различными участками тела.

Цель работы – показать, что теорема А.Ю. Ишлинского о телесном угле [1–7] может быть применена в специальной теории относительности. Рассмотрение проводится на примере томасовской прецессии – релятивистского кинематического эффекта, заключающегося в том, что ось гироскопа (точечного компаса) поворачивается (прецессирует), когда точка его подвеса движется по криволинейной траектории [8, 9]. Иными словами, томасовскую прецессию можно интерпретировать как следствие наблюдаемого в неподвижной системе отсчета вращения (изменения поворота) изображения твердого тела в процессе его движения по криволинейной траектории. Рассматриваемый поворот связан с релятивистскими сокращениями длины и запаздыванием света, испущенного различными участками тела [10–13].

1. Теорема А.Ю. Ишлинского и ее приложения. Более полувека назад А.Ю. Ишлинским была доказана теорема, именуемая также теоремой о телесном угле [1–4] (см. также [5–7]), которую можно сформулировать следующим образом [7]: если некоторая ось, выделенная в твердом теле, имеющем три степени свободы, описала в процессе движения тела замкнутую коническую поверхность, и при этом проекция угловой скорости тела на эту ось была равна нулю, то после возвращения оси в исходное положение тело оказывается повернутым вокруг нее на угол, численно равный телесному углу описанного конуса (фиг. 1). Отметим, что данное равенство выполняется с точностью до $2\pi N$, где N – целое число [14]. Поступательное движение оси при этом не имеет значения.

Приведем частный пример проявления эффекта А.Ю. Ишлинского, который иногда именуется некоммутативностью, в классической механике. Если ось, на которую насажен без трения неподвижный в начальный момент времени маховик, описывает в пространстве некоторый телесный угол, то по возвращении оси в исходное положение маховик повернется на угол, численно равный телесному углу, который описала ось [2, 3]. Этот дополнительный угол поворота, приобретаемый телом в процессе пространственной эволюции было предложено [15] именовать углом Ишлинского (УИ). Было показано [15], что УИ – проявление геометрической (топологической) фазы, которую часто называют фазой Берри [16], в классической меха-



Фиг. 1

вертикальной оси, вокруг которой свободно вращается гирорама или, соответственно, внешний кожух гироскопа с сильной коррекцией, при перемещении гироскопа по земной поверхности [2, 3].

Отметим, что рассматриваемый эффект тесно связан с так называемым параллельным переносом вектора в римановой геометрии [2, 3].

2. Томасовская прецессия. Рассмотрим теперь эффект томасовской прецессии и его физические следствия. Как было отмечено выше, этот эффект приводит к повороту движущегося по криволинейной траектории гироскопа. В общем случае под гироскопом следует понимать некоторое твердое тело или материальную частицу, которые задают определенное направление в пространстве.

В качестве примера можно указать обладающее сферической симметрией относительно центра тяжести твердое тело, движущееся в гравитационном поле по криволинейной траектории – круговой или эллиптической орбите, или же по параболе, сохраняющее при этом свою пространственную ориентацию в силу закона инерции. В качестве другого примера можно указать материальную частицу со спином – электрон, нейтрон и другие.

В лабораторной системе отсчета выражение для угловой скорости прецессии имеет вид [9]

$$\Omega_T = (1 - 1/\gamma)[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]/v^2, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ – скорость и ускорение в лабораторной системе отсчета, а c – скорость света. В частичном случае, при движении по окружности радиусом r с угловой скоростью $\omega = v/r$

$$\Omega_T = \omega(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) \quad (2.2)$$

В сопровождающей системе отсчета величины угловой скорости томасовской прецессии в γ раз больше, чем в лабораторной системе отсчета (2.1), (2.2).

За один оборот по окружности угол поворота тела составит

$$\alpha = 2\pi\Omega_T / \omega = 2\pi(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) \quad (2.3)$$

нике. В случае, если ось описывает одну и ту же коническую поверхность, но в противоположных направлениях, абсолютная величина УИ для противоположных направлений перемещения будет одинакова, а знак будет различным.

Величина УИ определяется не начальным и конечным положением оси в пространстве, а зависит от траектории, которую описала ось в процессе пространственной эволюции. Следовательно, накопление УИ неголономное явление [17]. Последнее следует также из того, что, как было показано [2, 3], проявление у механической системы эффекта А.Ю. Ишлинского происходит при наличии неголономных связей в данной системе.

Теорема А.Ю. Ишлинского находит приложения в гироскопии. В частности, она объясняет появление угловой ошибки у пространственного гироскопа – гирорама, внутри которой находятся два спаренных механических гироскопа, оси которых параллельны, а также гироскопов с сильной коррекцией. Эта ошибка связана с изменением пространственной ориентации

3. Наблюдаемый поворот быстро движущегося по круговой траектории объекта и томасовская прецессия. Было отмечено [11, 12] что световые кванты, пришедшие одновременно к наблюдателю, были испущены различными точками объекта в разное время – точки, расположенные дальше от наблюдателя, испустили кванты раньше, чем более близкие точки. По этой причине возникает эффект компенсации лоренцева сокращения и в случае, когда размеры объекта много меньше расстояния до него, объект, а точнее говоря, его изображение на сетчатке глаза наблюдателя или на пленке фотоаппарата, выглядит не искаженным, а только повернутым на некоторый угол. Данному вопросу посвящено большое число работ, наиболее подробно он рассмотрен в [13, 14].

В данном случае, представляет интерес вопрос об изменении регистрируемого неподвижным наблюдателем угла ориентации объекта, который движется по круговой траектории. Этот угол может быть задан формой объекта, например одной из его граней в случае, если он имеет форму многогранника, или связанной с объектом осью.

В простом случае, когда объект движется прямолинейно со скоростью v , выражение, связывающее угол Θ' , задающий некоторое направление на объекте в связанной с объектом системе отсчета, и угол Θ , под которым это направление наблюдается в лабораторной (неподвижной) системе отсчета, определяется известными формулами, определяющими релятивистскую аберрацию, и имеет вид [13, 18]

$$\sin \Theta = \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2} \sin \Theta'}{1 + \cos \Theta' v / c} \quad (3.1)$$

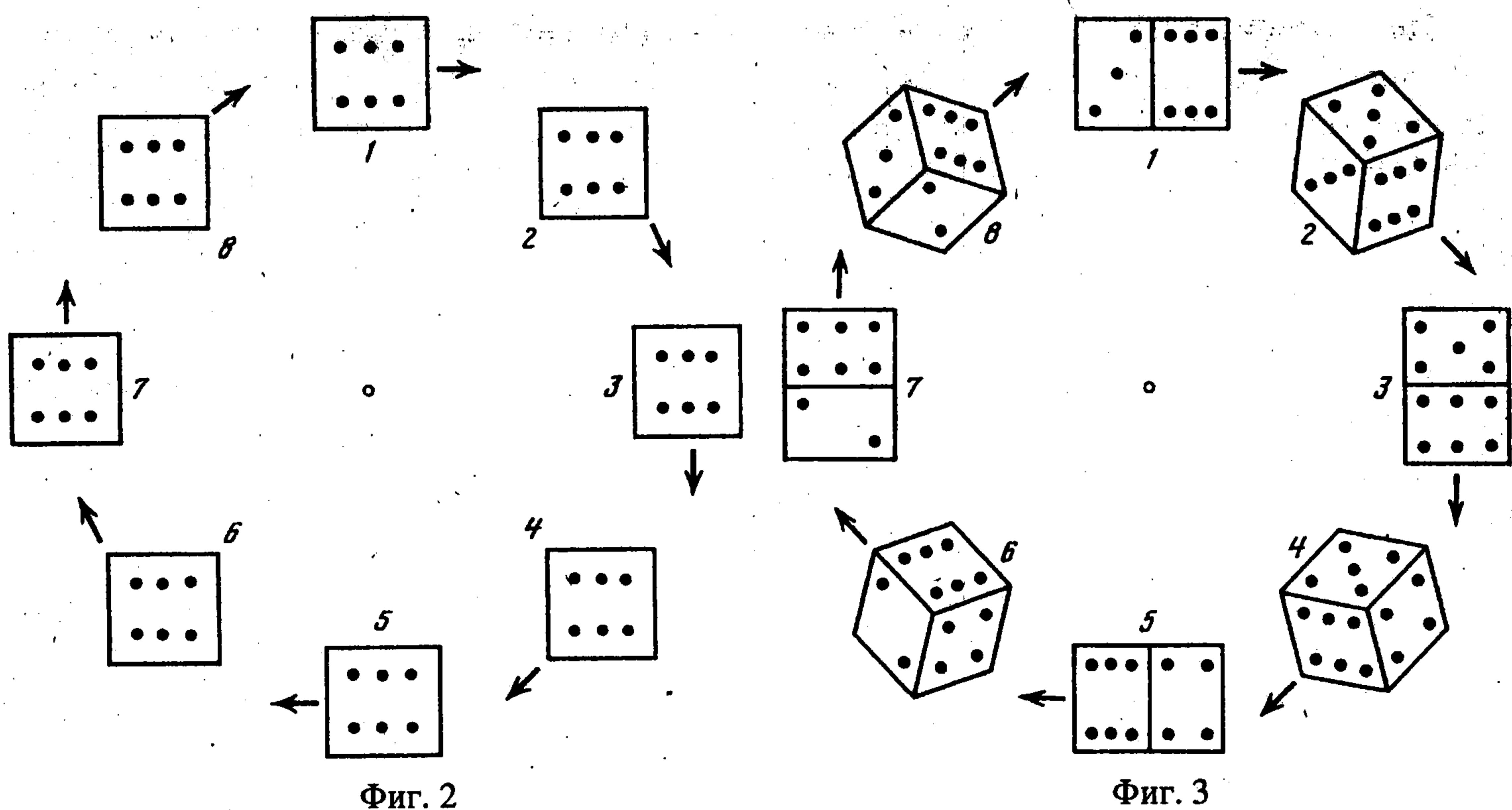
Неподвижный наблюдатель видит объект повернутым на угол аберрации $\Delta\Theta = \Theta - \Theta'$. Пусть объект движется прямолинейно в плоскости, которая ортогональна прямой, соединяющей объект и наблюдателя, а ось, задающая направление, также лежит в данной плоскости, т.е. $\Theta' = \pi/2$. Исходя из соотношения (3.1) имеем

$$\Delta\Theta = \Theta - \pi/2, \quad \cos(\Delta\Theta) = \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

Рассмотрим теперь случай, когда объект движется по круговой траектории в рассматриваемой плоскости, причем по-прежнему $\Theta' = \pi/2$. При этом видимое неподвижным наблюдателем направление оси будет меняться, изображение объекта будет вращаться, и за один оборот объекта ось опишет конус с углом при вершине $2\Delta\Theta$. Величина телесного угла, заключенного внутри конуса, численно равна площади, ограниченной на сфере единичного радиуса образующей конуса, вершина которого расположена в центре сферы. Отсюда получим выражение, связывающее величину телесного угла с углом при вершине конуса

$$\chi = 4\pi \sin^2(\Delta\Theta / 2) = 2\pi(1 - \cos(\Delta\Theta)) = 2\pi(1 - \sqrt{1 - v^2 / c^2}) \quad (3.2)$$

Данное явление можно проиллюстрировать на примере видимых неподвижным наблюдателем изображений движущейся по круговой траектории игровой кости (куба), которая в процессе движения сохраняет свою ориентацию в пространстве (фиг. 2, 3). Игральная кость вращается в плоскости, которая ортогональна линии, соединяющей центр окружности с точкой, в которой находится наблюдатель (зрачок глаза наблюдателя), причем расстояние от наблюдателя до плоскости много больше диаметра окружности. Когда игральная кость находится в верхней точке окружности (положение 1 на фиг. 2, 3), она ориентирована таким образом, что повернута к наблюдателю гранью, на которой изображена "шестерка", впереди по движению находится "четверка", позади "тройка", вверху "пятерка", внизу "двойка", а на стороне, противоположной расположению наблюдателя, – "единица". Направление движения игровой кости в каждой точке отмечено стрелкой. В случае, если скорость игровой кости $v \ll c$, неподвижный наблюдатель во всех положениях игровой кости видит сторону с изображением "шестерки", причем ориентация изображения в процессе движения не меняется (фиг. 2). В случае $v \sim c$ в различных точках окружности наблюдатель видит игральную кость повернутой к нему под разными углами (фиг. 3). Таким образом, наблюдатель видит, что за



один оборот игральной кости связанная с ней ось (например, ребро куба) описала некоторый телесный угол. Приведенное на фиг. 3 изображение соответствует случаю $\gamma = 2$.

Сравнивая выражения (2.3) и (3.2), получим, что $\alpha \equiv \chi$, т.е. угол поворота тела вследствие томасовской прецессии равен УИ, который приобретает тело при движении по круговой траектории в случае, если реальное изменение угла его ориентации равно изменению наблюдаемого в лабораторной системе отсчета угла поворота релятивистски движущегося по криволинейной траектории тела. Таким образом, томасовскую прецессию можно интерпретировать как следствие формального применения теоремы А.Ю. Ишлинского к телесному углу, соответствующему изменению наблюдаемого поворота изображения твердого тела в процессе его движения по криволинейной траектории относительно неподвижного наблюдателя.

Подчеркнем, что в данном случае речь идет не о реальном телесном угле, который описала связанная с телом ось, а о наблюдаемом телесном угле, соответствующем изменению поворота изображения твердого тела в процессе его движения по криволинейной траектории.

Отметим, что томасовская прецессия возникает не потому, что в лабораторной системе отсчета тело наблюдается повернутым на некоторый угол, а потому, что этот угол меняется в процессе движения тела по криволинейной траектории, что и приводит к тому, что выделенная в теле ось описывает телесный угол.

4. Обсуждение результатов. Выводы. Проведем сравнение физических причин, вызывающих рассматриваемые в эффекты.

Эффект А.Ю. Ишлинского связан с тем, что кинематика твердого тела — системы материальных точек — в классической механике не сводится к кинематике материальной точки. Кинематические уравнения твердого тела, записанные в любой форме, имеют существенно более сложную структуру, чем кинематические уравнения материальной точки. Если проекция скорости точки на какую-либо ось равна нулю, то и изменение соответствующей координаты отсутствует. Не так обстоит дело с твердым телом. Если угловая скорость тела в проекции на какую-либо ось равна нулю, то тело относительно этой оси неподвижным не остается [7].

Томасовская прецессия объясняется относительностью понятия криволинейного поступательного движения системы материальных точек. Если в одной инерциальной системе отсчета K скорости всех точек тела в момент времени t одинаковы, то в другой инерциальной системе отсчета K' в момент времени t' при ускоренном движении

тела они будут различными [9]. Наличие этого эффекта свидетельствует о том, что в специальной теории относительности (СТО) не существует криволинейного поступательного движения твердого тела.

Итак, оба рассматриваемых эффекта как в классической механике, так и в СТО вызваны спецификой криволинейного движения твердого тела, системы материальных точек.

Здесь можно привести аналогию двум рассматриваемым эффектам. Это классический и релятивистский (именуемый также квадратичным) эффекты Доплера. Они вызваны различными причинами – удалением объекта с некоторой скоростью от неподвижного наблюдателя и, соответственно, релятивистским замедлением времени на движущемся объекте, излучающем волну (например электромагнитную), относительно неподвижного наблюдателя. Однако следствия в обоих случаях одинаковы – наблюдатель регистрирует уменьшение частоты излучения. Отметим, что при условии $v \ll c$ томасовская прецессия, так же как и релятивистский эффект Доплера, квадратично зависит от скорости (см. выражение (2.2)). Таким образом, по аналогии с релятивистским эффектом Доплера, томасовскую прецессию можно рассматривать как релятивистский эффект А.Ю. Ишлинского.

Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом:

1°. Показано, что теорему А.Ю. Ишлинского можно применять в СТО. Как следствие, существует физическая аналогия между двумя различными кинематическими эффектами – эффектом Ишлинского в классической механике и томасовской прецессией в СТО. Последний эффект можно рассматривать как релятивистский эффект А.Ю. Ишлинского.

2°. Причины изменения пространственной ориентации твердого тела для обоих эффектов различны: для первого – это следствие реального поворота тела (оси, связанной с телом) при его коническом движении, для второго – изменение наблюдаемого в лабораторной системе отсчета вращения твердого тела (оси, связанной с телом) при его криволинейном движении. Однако следствия действия как первого, так и второго эффекта на твердое тело одинаковы: после того как связанная с телом ось вернется в исходное положение, тело оказывается повернутым на угол, численно равный телесному углу, который описала ось.

3°. Оба рассматриваемых эффекта как в СТО, так и в классической механике вызваны спецификой криволинейного движения твердого тела как системы материальных точек.

Автор благодарит Я.И. Ханина за внимание к работе, Вл.В. Кочаровского и Г.В. Пермитина за ряд замечаний. Работа была доложена на заседании семинара при Научном совете РАН по механике систем и Научном совете РАН по проблемам управления движением и навигации 19.10.1998 г., в ходе которого был также высказан ряд полезных замечаний.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (96-15-96742).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Бортовая и килевая качка и изменение курса при качке корабля вокруг произвольно ориентированной оси // Приборостроение. 1944. № 4–5. С. 3–8.
2. Ишлинский А.Ю. Механика специальных гироскопических систем. Киев.: Изд-во АН УССР, 1952. 432 с.
3. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
4. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 2. М.: Наука, 1986. 415 с.
5. Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф. О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 9–14.
6. Журавлев В.Ф. Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.

7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
8. Möller C. The theory of relativity. Oxford: Clarendon Press, 1972. 557 p. = Мёллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
9. Малыкин Г.Б., Пермитин Г.В. Томасовская прецессия // Физич. энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. Т. 5. С. 123.
10. Penrose R. The apparent shape of a relativistically moving sphere // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1959. V. 55. Pt. 1. P. 137–139.
11. Terrell J. Invisibility of the Lorentz contraction // Phys. Rev. 1959. V. 116. № 4. P. 1041–1045.
12. Weisskopf V.F. Problems of nuclear structure. Physics in the twentieth century. Cambridge and London: MIT Press, 1972. = Вайскопф В. Наблюдаемый вид быстро движущихся объектов // Физика в двадцатом столетии. М.: Атомиздат, 1977. С. 179–187.
13. Болотовский Б.М. О видимой форме движущегося тела // Эйнштейновский сборник 1986–1990. Под ред. Кобзарева И.Ю. М.: Наука, 1990. С. 279–328.
14. Goodman L.E., Robinson A.R. Effect of finite rotations on giroscopic sensing devices // Appl. Mech. 1958. V. 25. № 2. P. 210–213. = Гудман Л.Е., Робинсон А.Р. Влияние конечных вращений на гироскопические чувствительные элементы // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1959. № 5. С. 133–142.
15. Малыкин Г.Б. Применение сферы Пуанкаре в поляризационной оптике, классической и квантовой механике // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 3. С. 265–307.
16. Веницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М. и др. Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160. Вып. 6. С. 1–49.
17. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголомомных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.

Нижний Новгород
e-mail: malykin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию
1.XII.1998