

УДК 531.36

© 1999 г. В.А. Самсонов

ПЕРЕСТРОЙКА КОНФИГУРАЦИОННОГО МНОГООБРАЗИЯ И КРИТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Отмечаются особенности описания динамики голономных механических систем в избыточных координатах со связями, зависящими от параметров. При некоторых (критических) значениях параметров конфигурационное многообразие системы может иметь, например, самопересечения, в окрестности такого особого подмногообразия невозможно ввести *лагранжевы* координаты системы и бывает трудно (и даже невозможно) корректно определить траектории "критической" системы с помощью предельного перехода по параметру. В таких случаях классическая теория Пуанкаре бифуркации равновесия консервативных систем также нуждается в некоторых дополнениях. В качестве примера рассматривается кривошипно-шатунный механизм.

Нелинейная автономная голономная связь

$$f(x, y, l) = 0 \quad (1)$$

налагаемая на совокупность материальных точек, обычно содержит не только координаты x, y , но и параметр l (x, y, f могут быть, вообще говоря, векторными величинами). Эта связь выделяет в пространстве x, y подпространство допустимых положений механической системы – конфигурационное многообразие S . Изменение параметра l определяет семейство механических систем и соответствующую ему совокупность $S(l)$ конфигурационных многообразий.

Существуют механические объекты, которые имеют критическое значение l_* параметра, такое, что $S(l_*)$ обладает самопересечением в некоторой особой точке O плоскости x, y (или на некотором многообразии P) и такое самопересечение у $S(l)$ при $l \neq l_*$ отсутствует. Механическую систему, соответствующую значению l_* , будем называть критической.

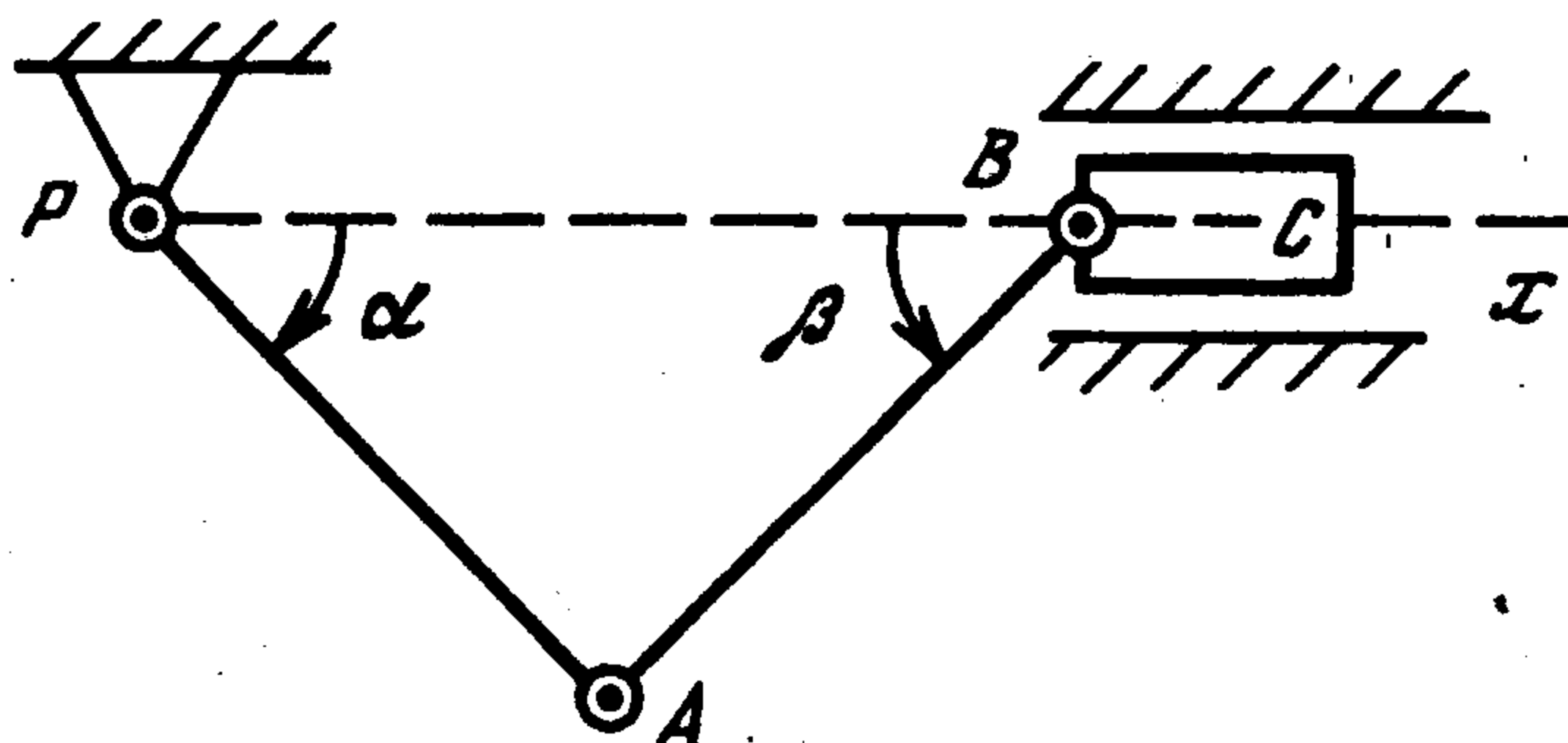
Первая особенность критической системы – невозможность выбора обобщенных лагранжевых координат на многообразии $S(l_*)$ (естественно, что в окрестности точки O невозможен выбор даже локальных координат).

Предположим, что критическая система находится в начальном состоянии покоя в положении O . Если это положение не является положением равновесия, то возникает вопрос: по какой из ветвей многообразия $S(l_*)$ будет происходить последующее движение системы? Рационального ответа на этот вопрос нет. Либо придется смириться с очевидным нарушением принципа детерминированности в этом случае, либо, наоборот, для "спасения" этого принципа принять "соглашение" и считать положение O особым равновесием системы. Любой из этих выходов с практической точки зрения не сулит никаких неприятностей, поскольку само событие представляется маловероятным.

Предыдущий вопрос имеет естественное продолжение. Система "входит" в положение O по некоторой ветви многообразия $S(l_*)$ с некоторой отличной от нуля скоростью. Какую из ветвей система "выберет" для своего дальнейшего движения? Пред-

ставляется естественным использовать для поиска ответа на этот вопрос фундаментальный закон механики – закон инерции. Иначе говоря, движение системы продолжится таким образом, чтобы скорости ее точек изменялись непрерывно! Это вносит определенность в выбор ветви для последующего движения и в случае одномерного многообразия позволяет считать, что в точке O пересекаются две траектории критической системы.

Сравним теперь траектории критической системы с траекториями "близких" систем при $l_1 = l_* - \varepsilon$ и $l_2 = l_* + \varepsilon$. В соответствии с известными положениями теории



Фиг. 1

ветвления решений нелинейных уравнений многообразие $S(l_*)$ при изменении параметра "распадается" на непересекающиеся части S_1 , S_2 , причем пара $S_1(l_* - \varepsilon)$, $S_2(l_* - \varepsilon)$ совсем не "похожа" на пару $S_1(l_* + \varepsilon)$, $S_2(l_* + \varepsilon)$. Налицо кардинальная перестройка, которую вполне можно назвать "катастрофической", конфигурационного многообразия при прохождении параметром l своего критического значения l_* . Из этого обстоятельства вытекают несколько следствий. Во-первых, связь (1) задает два конфигурационных многообразия при $l \neq l_*$. Одно из них соответствует заданной конфигурации изучаемого механизма, а другое, вообще говоря, соответствует другому механизму. Вторую систему назовем сопряженной. Во-вторых, $S_1(l_* - \varepsilon)$ и $S_1(l_* + \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ образуют два предельных множества, не совпадающих между собой и состоящих из кусков различных траекторий критической системы. Следовательно, предельная траектория механической системы при $l \rightarrow l_* - 0$ ($l_* + 0$) не совпадает с траекторией критической (предельной) системы.

Предположим теперь, что критическая система консервативна и ее особое положение O соответствует минимуму потенциальной энергии по отношению к возмущениям, принадлежащим как одной траектории из $S(l_*)$, так и другой. Следовательно, точка O отвечает устойчивому равновесию критической системы и ее малые движения около этого равновесия представляют собой малые колебания. Однако частота этих колебаний, вообще говоря, зависит от той траектории, по которой возбуждено движение. Иными словами, критическая система может обладать двумя формами и двумя частотами малых колебаний (но не их суперпозицией!). По-видимому, последнее свойство должно быть известно специалистам по теории машин и механизмов.

Отмеченные особенности механических систем, зависящих от параметра, вносят некоторые дополнения в классическую теорию Пуанкаре бифуркации равновесия консервативных механических систем.

Дополнение 1. Максимум (или минимум) функции $\Pi(x, y)$, существующий на многообразии $S_1(l)$ при $l < l_*$ (или при $l > l_*$), непродолжим по параметру через особую точку O , если в ней он "сливается" с минимумом (соответственно, максимумом) функции Π на $S_2(l)$.

Дополнение 2. Одноименные экстремумы функции $\Pi(x, y)$, существующие на многообразии $S_1(l)$, $S_2(l)$ при $l < l_*$ и сливающиеся в точке O при $l = l_*$, сохраняются на обоих многообразиях и при $l > l_*$.

Пример. Пусть (фиг. 1) кривошип PA ($|PA| = r$) может вращаться вокруг неподвижной оси P , а поршень C может совершать возвратно-поступательное движение вдоль неподвижной прямой Px . Кривошип PA и поршень C соединены шатуном AB ($|AB| = \chi$) с помощью цилиндрических шарниров A, B . Будем считать все элементы механизма абсолютно твердыми телами. Положение кривошипа определим углом α между отрезком PA и осью Px . Положение поршня зададим координатой x_B точки B . Для задания положения шатуна AB используем величину x_B и угол β между линиями AB и Px (фиг. 1).

Обсуждаемая система, как известно, голономна, так как величины α, β, x_B связаны очевидными геометрическими соотношениями

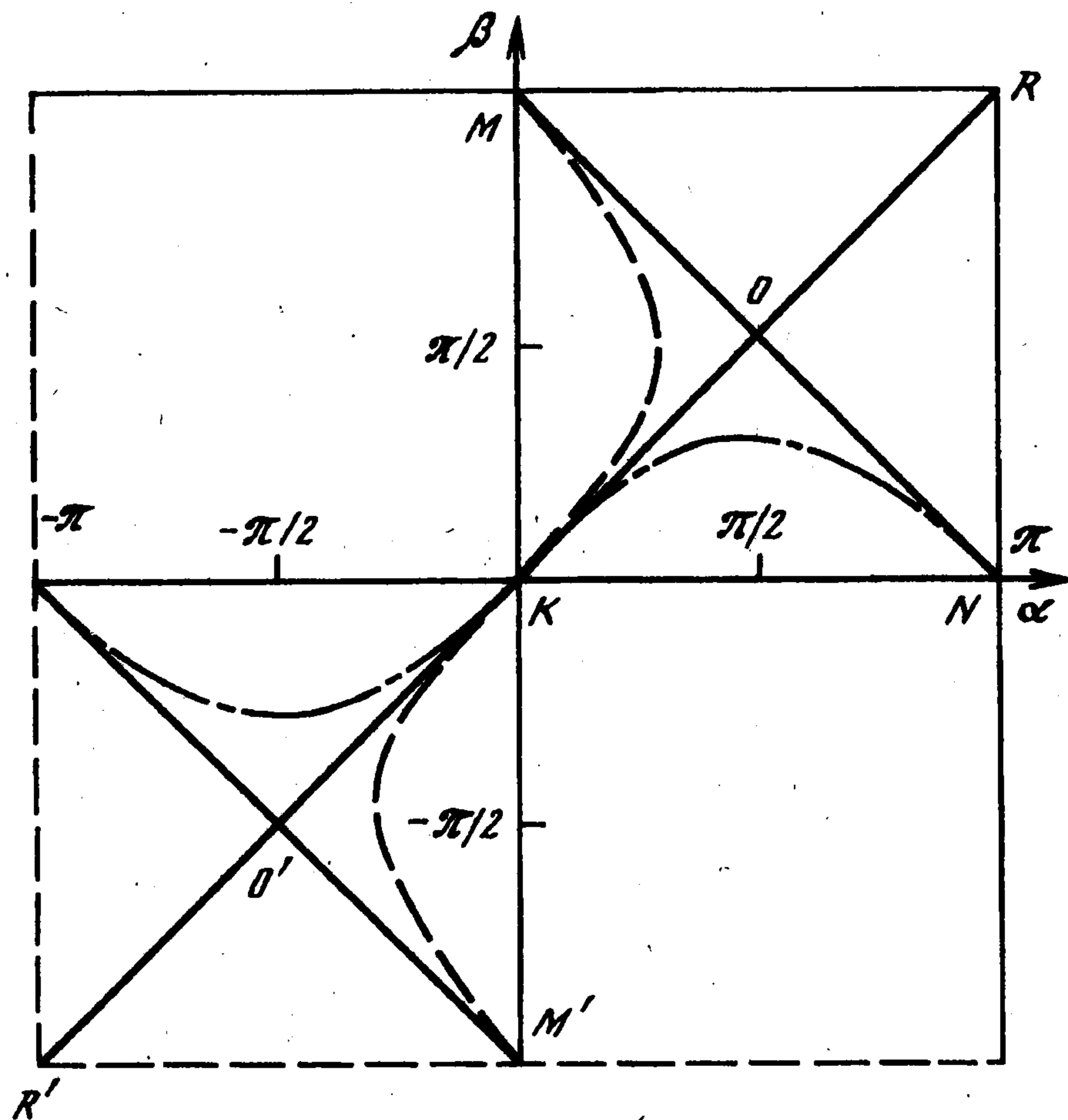
$$x_B = r \cos \alpha + \chi \cos \beta, \quad l \sin \alpha = \sin \beta, \quad l = r/\chi \quad (2)$$

Поскольку величина x_B однозначно определяется углами α, β , а связь (2) не содержит величины x_B , то конфигурационное многообразие S системы удобно изображать на плоскости (α, β) , точнее, на квадрате $(-\pi < \alpha \leq \pi, -\pi < \beta \leq \pi)$ (фиг. 2). При $0 < l < 1$ многообразие S_1 качественно изображается штрих-пунктирной кривой NKN' . При $1 < l$ многообразие S_1 имеет вид штриховой кривой MKM' . Налицо кардинальное изменение формы конфигурационного многообразия S_1 при "прохождении" параметром l значения $l_* = 1$.

Наконец, при "критическом" значении $l_* = 1$ многообразие $S(l_*)$ состоит из трех отрезков: $\alpha = \beta$, $\alpha + \beta = \pi$, $\alpha + \beta = -\pi$, причем два последних являются продолжением друг друга вследствие 2π -периодичности системы как по α , так по β .

Выбор лагранжевой обобщенной координаты q . Очевидно, что при $l < 1$ следует принять $q = \alpha$, а при $l > 1$, наоборот, $q = \beta$. Очевидно также, что при $l = 1$, лагранжевой обобщенной координаты нет (хотя многообразие S остается одномерным).

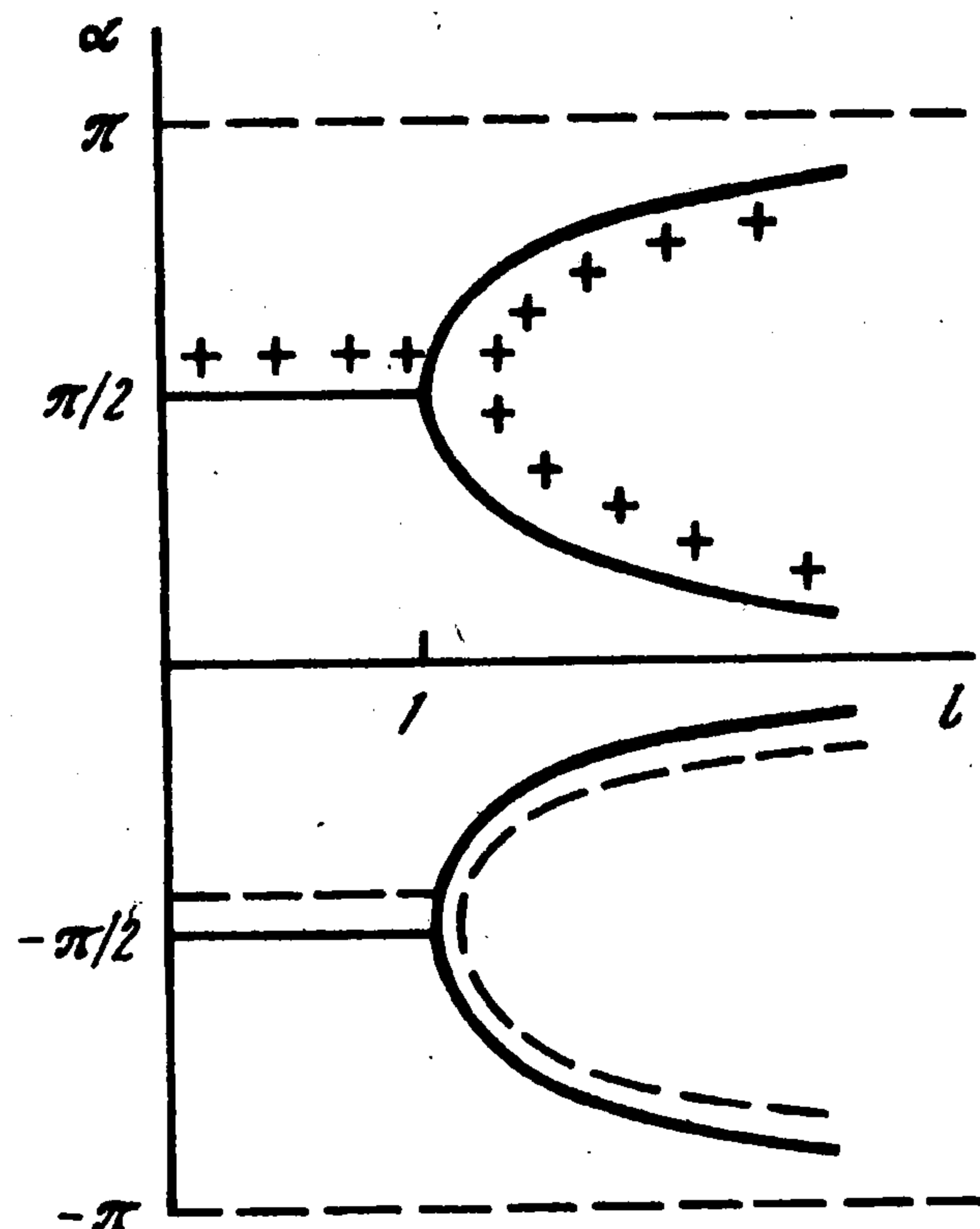
Траектории "критической" системы. При $l = 1$ существуют два особых положения системы: O : $\alpha = \beta = \pi/2$ и O' : $\alpha = \beta = -\pi/2$; система может "покинуть" их по двум совершенно разным траекториям $\alpha = \beta$ и $\alpha + \beta = \pi$ или $\alpha + \beta = -\pi$. Налицо неопределенность выбора траектории, если движение начинается из состояния покоя в одном из этих положений, не являющемся положением равновесия.



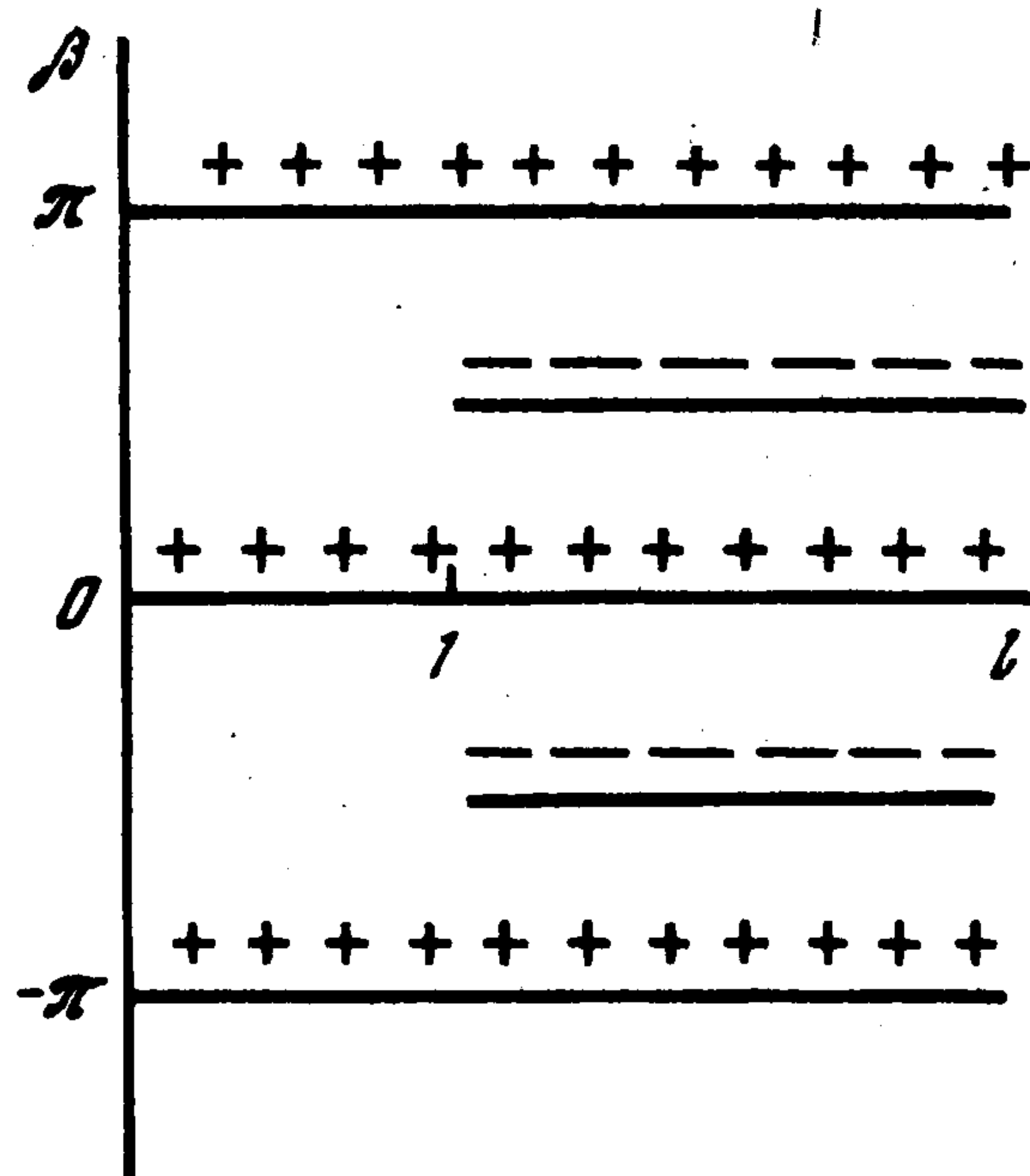
Фиг. 2

Предположим теперь, что движение начинается из некоторого неособого положения и в особую точку, для определенности, O изображающая точка "входит" с ненулевой скоростью. Если движение происходило по отрезку MO , то скорость поршня C во все время движения равна нулю, если же по KO , то скорость поршня отлична от нуля. Тогда, очевидно, продолжение движения "через" особую точку O определяется свойством инерции, т.е. в первом случае по ON , а во втором по OR . Таким образом, для почти всех начальных условий отрезки $R'R$, $MN \cup M'N'$ следует считать целыми траекториями критической системы.

Предельные свойства. Обратимся теперь к случаю $l < 1$ и выделим "предельную траекторию" при $l \rightarrow 1 - 0$ (слева). Изображение на фиг. 2 позволяет принять в качестве "предельной"



Фиг. 3



Фиг. 4

для траектории $N'KN$ ломаную $N'O'ON$. В то же время в случае $l \rightarrow 1 + 0$ (справа) "предельная траектория" имеет вид ломаной $M'O'OM$. Таким образом, "предельная траектория", вообще говоря, не совпадает с траекторией критической (т.е. предельной) системы. Это означает, что попытки изучения траекторий критических (предельных, вырожденных) систем путем построения предельных переходов в траекториях невырожденных систем могут оказаться некорректными.

Малые колебания "критической системы". Предположим, что рассматриваемый механизм находится в однородном поле тяжести с ускорением g , которое направлено ортогонально линии Ox (вниз на фиг. 1). Очевидно, что в этом случае особое положение $\alpha = \beta = \pi/2$ является устойчивым положением равновесия механизма. Но частота малых колебаний около этого равновесия, очевидно, зависит от того, остается поршень C на месте или нет.

Считая, для простоты, стержни невесомыми, поместим в шарнир A материальную точку массы m . Тогда первая частота λ_1 совпадает с частотой математического маятника длины $r = \chi$, а для второй имеем

$$\lambda_2^2 = mg/[r(m + 4M)]$$

где M — масса поршня.

Бифуркация положений равновесия. Изобразим картину распределения положений равновесия рассматриваемого механизма на плоскости α, l (фиг. 3). Нетрудно видеть, что в указанных выше условиях при $l < 1$ положение равновесия $\alpha = \pi/2$ устойчиво (на фиг. 3 отмечено знаком плюс), а $\alpha = -\pi/2$ неустойчиво (отмечено знаком минус).

При $l > 1$ картина равновесий и распределение свойства устойчивости (фиг. 3) не соответствует, очевидно, положениям теории Пуанкаре.

Выше (см. *Дополнение 1*) этому дано объяснение. С одной стороны, координата α при $l > 1$ уже не может играть роль обобщенной *лагранжевой*, так как она изменяется в ограниченных пределах (как раз в полосе $(-\pi/2) < \alpha < (\pi/2)$). С другой стороны, второй, как бы соседний одноименный экстремум потенциальной энергии (например, в полосе $(\pi/2) < \alpha < \pi$ принадлежит уже многообразию S_2 сопряженного механизма, у которого поршень C располагается слева от точки P .

Для иллюстрации *Дополнения 2*, будем считать, что однородное поле тяжести действует лишь на стержень PA вдоль оси Px . В этом случае при $l > 1$ связь (2) определяет не только механизм, изображенный на фиг. 1 (нижний), но и "сопряженную" систему (верхнюю), для которой ползун C расположен "над" точкой P . Распределение равновесий изображено на фиг. 4.

Таким образом, видим, что механические системы, конфигурационное пространство которых может испытывать катастрофическую перестройку, и сопутствующие этому критические системы обладают рядом любопытных свойств.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция" (2.1-294) и программы "Университеты России. Фундаментальные исследования" (5421).

Москва
e-mail: samson@inmech.msu.su

Поступила в редакцию
12.III.1999