

УДК 531.36:534.1

© 1999 г. А.П. Маркеев

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 2:1

Рассматриваются нелинейные колебания автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности ее устойчивого положения равновесия. Предполагается, что отношение частот линейных колебаний близко или равно двум, а функция Гамильтона является знакоопределенной в окрестности положения равновесия. Решена задача об орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из положения равновесия. Дан анализ условно-периодических движений приближенной системы, учитывающей члены до третьей степени включительно в нормализованном гамильтониане. При помощи КАМ-теории рассмотрен вопрос о сохранении этих движений при учете членов четвертой и более высоких степеней в разложении функции Гамильтона в ряд в достаточно малой окрестности положения равновесия. Результаты применены при исследовании нелинейных колебаний упругого маятника.

1. Введение. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Будем считать, что начало координат $q_i = 0, p_i = 0$ ($i = 1, 2$) фазового пространства является положением равновесия системы, а функция Гамильтона аналитична в некоторой его окрестности

$$H = H_2 + H_3 + \dots + H_k + \dots \quad (1.1)$$

где H_k – формы степени k относительно q_i, p_i ($i = 1, 2$). Квадратичную форму H_2 считаем определенно-положительной. Тогда положение равновесия устойчиво, а ли-неаризованная система представляет собой совокупность двух гармонических осцилляторов. Пусть σ_i ($i = 1, 2$) – их частоты.

Исследуются нелинейные колебания в окрестности положения равновесия в предположении, что имеет место резонанс третьего порядка, когда отношение частот линейных колебаний близко или равно двум. Полагаем, что $\sigma_1 = (2 + \mu)\sigma_2$, где $0 \leq |\mu| \leq 1$.

Анализ нелинейных колебаний гамильтоновых систем при наличии резонанса посвящено довольно много исследований. Были представлены результаты приближенных исследований для резонанса третьего порядка [1–7]. Выполнен строгий анализ задачи о существовании резонансных периодических движений в малой окрестности положения равновесия [8, 9], а также исследована их орбитальная устойчивость в первом приближении [9].

Цель работы – подробное рассмотрение общего характера нелинейных условно-периодических движений в малой окрестности положения равновесия в случае точной соизмеримости частот линейных колебаний ($\mu = 0$), а также решение нелинейной задачи об орбитальной устойчивости периодических движений (ПД), рождающихся из положения равновесия, в случае точной или неточной соизмеримости ($0 \leq |\mu| \leq 1$).

Будем считать, что канонически сопряженные переменные q_i, p_i ($i = 1, 2$) выбраны (при помощи нормализующего канонического преобразования) так, что в разложении (1.1) члены второй и третьей степеней приведены к нормальной форме. Это означает

(см., например, [10]), что ряд (1.1) может быть записан в следующий форме:

$$H = \frac{1}{2}\sigma_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\sigma_2(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{4}\sigma_2[q_1(p_2^2 - q_2^2) - 2p_1q_2p_2] + \dots$$

где многоточием обозначены члены выше третьей степени относительно q_i, p_i .

Если вместо времени t ввести независимую переменную $\tau = \sigma_2 t$ и, учитывая малость рассматриваемой окрестности начала координат, сделать каноническую замену переменных $q_i, p_i \rightarrow x_i, y_i$ по формулам

$$q_i = \varepsilon x_i, \quad p_i = \varepsilon y_i, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

то гамильтониан задачи примет вид

$$H = \frac{1}{2}(2 + \mu)(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{4}[x_1(y_2^2 - x_2^2) - 2y_1x_2y_2] + O(\varepsilon^2) \quad (1.2)$$

2. Короткопериодические движения Ляпунова и их устойчивость. Так как отношение $\sigma_2: \sigma_1$ не является целым, то, согласно теореме Ляпунова о голоморфном интеграле [11], существует семейство короткопериодических движений (КПД), рождающихся из положения равновесия $q_i = 0, p_i = 0$ ($i = 1, 2$). Это означает (см. [12, 13]), что для системы с гамильтонианом (1.2) существует сходящееся при достаточно малых ε каноническое преобразование $x_i, y_i \rightarrow x'_i, y'_i$, которое отличается от тождественного на величины порядка ε^2 и приводит гамильтониан к такой форме, когда в его разложении в ряд по степеням x'_i, y'_i нет членов, содержащих переменные x'_2, y'_2 в первой степени, а члены ряда, не зависящие от x'_2, y'_2 , являются функциями только от комбинации $x_1'^2 + y_1'^2$. При этом преобразовании явно выписанные в (1.2) члены нулевого и первого порядков относительно ε не изменяются. Соответствующие КПД решения преобразованной системы запишем в виде

$$x'_1 = \sqrt{c} \sin \Omega_1(\tau + \tau_0), \quad y'_1 = \sqrt{c} \cos \Omega_1(\tau + \tau_0), \quad x'_2 = 0, \quad y'_2 = 0 \quad (2.1)$$

где $c > 0$ и τ_0 — произвольные постоянные, а частота Ω_1 — функция от c , причем $\Omega_1 = (2 + \mu) + O(\varepsilon^2)$.

Решим вопрос об орбитальной устойчивости КПД Ляпунова. С этой целью сделаем предварительно каноническое преобразование $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \rightarrow \theta, \zeta, \xi_2, \eta_2$, позволяющее свести задачу об орбитальной устойчивости ПД (2.1) к эквивалентной задаче об устойчивости по части переменных автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Это преобразование представим как суперпозицию двух универсальных канонических замен переменных: замены $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \rightarrow \varphi^*, r^*, x_2^*, y_2^*$ вида

$$x'_1 = \sqrt{2r^*} \sin \varphi^*, \quad y'_1 = \sqrt{2r^*} \cos \varphi^*, \quad x'_2 = x_2^*, \quad y'_2 = y_2^*$$

и замены переменных $\varphi^*, r^*, x_2^*, y_2^* \rightarrow \theta, \zeta, \xi_2, \eta_2$, задаваемой формулами

$$\varphi^* = \theta, \quad r^* = \zeta - \frac{1}{4}(\xi_2^2 + \eta_2^2)$$

$$x_2^* = \cos \frac{\theta}{2} \xi_2 + \sin \frac{\theta}{2} \eta_2, \quad y_2^* = -\sin \frac{\theta}{2} \xi_2 + \cos \frac{\theta}{2} \eta_2$$

Уравнениям движения в новых переменных отвечает гамильтониан

$$\Gamma = (2 + \mu)\zeta - \frac{1}{4}\mu(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \varepsilon \xi_2 \eta_2 \sqrt{\zeta - \frac{1}{4}(\xi_2^2 + \eta_2^2)} + O(\varepsilon^2) \quad (2.2)$$

а ПД (2.1) записываются в виде

$$\theta = \Omega_1(\tau + \tau_0), \quad \zeta = c/2, \quad \xi_2 = 0, \quad \eta_2 = 0$$

Введем возмущения $\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$ по формулам

$$\xi_2 = \alpha_2, \quad \eta_2 = \beta_2, \quad \zeta = c/2 + \gamma_1$$

Задача об орбитальной устойчивости ПД (2.1) эквивалентна задаче об устойчивости системы с функцией Гамильтона (2.2) по отношению к переменным $\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$.

Гамильтониан возмущенного движения записывается в виде ряда

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots \quad (2.3)$$

где многоточием обозначена совокупность членов не ниже шестой степени относительно $\alpha_2, \beta_2, \sqrt{|\gamma_1|}$, а Γ_2 и Γ_4 – формы второй и четвертой степеней относительно этих переменных, причем $\Gamma_2 = \Omega_1 \gamma_1 + \Gamma_2^*$, а Γ_2^* и Γ_4 , если пренебречь величинами порядка ε^2 и выше, записываются в виде

$$\Gamma_2^* = -\frac{1}{4}\mu(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - \varepsilon\sqrt{c/2}\alpha_2\beta_2$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{4}\varepsilon(2c)^{-1/2}[\alpha_2\beta_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 4\alpha_2\beta_2\gamma_1]$$

В линеаризованной системе уравнений возмущенного движения переменные α_2, β_2 отделяются от θ, γ_1 . Пусть $\mu \sim \varepsilon^\delta$, где $\delta \geq 1$. Характеристическое уравнение системы с гамильтонианом Γ_2^* записывается в виде

$$\lambda^2 + \frac{1}{4}(\mu^2 - 2\varepsilon^2 c)(1 + O(\varepsilon)) = 0 \quad (2.4)$$

Если величина ε достаточно мала и $|\mu| < \varepsilon\sqrt{2c}$, то уравнение (2.4) имеет вещественный положительный корень и, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, имеет место орбитальная неустойчивость ПД (2.1). Если же выполняется неравенство

$$|\mu| > \varepsilon\sqrt{2c} \quad (2.5)$$

то корни уравнения (2.4) $\pm i\Omega_2$, где $\Omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 2\varepsilon^2 c}$, будут чисто мнимыми и для получения строгих выводов об устойчивости линейного анализа недостаточно. Здесь следует воспользоваться теоремой Арнольда–Мозера [12, 14].

Опуская несложные выкладки, выпишем сразу нормализованный гамильтониан возмущенного движения

$$\Gamma = \Omega_1 \rho_1 - \sigma \Omega_2 \rho_2 + c_{20} \rho_1^2 + c_{11} \rho_1 \rho_2 + c_{02} \rho_2^2 + O_3 \quad (2.6)$$

где O_3 – совокупность членов выше второй степени относительно ρ_1, ρ_2 , величина $\sigma = \text{sign } \mu$, а для коэффициентов c_{ij} справедливы следующие оценки:

$$c_{20} = O(\varepsilon^2), \quad c_{11} = \frac{\sigma \varepsilon^2}{2\Omega_2} + O(\varepsilon^2), \quad c_{02} = -\frac{3\sqrt{2c}\varepsilon\mu}{4\Omega_2^2} + O(\varepsilon) \quad (2.7)$$

Согласно известным результатам [12, 14], достаточным условием орбитальной устойчивости ПД (2.1) является условие изоэнергетической невырожденности гамильтониана (2.3), которое записывается в виде

$$\Delta \equiv c_{20}\Omega_2^2 + \sigma c_{11}\Omega_1\Omega_2 + c_{02}\Omega_1^2 \neq 0$$

Учитывая выражения (2.7), получаем, что

$$\Delta = -\frac{3\sqrt{2c}\Omega_1}{2\Omega_2^2}(\epsilon\mu + O(\epsilon^3))$$

Для достаточно малых ϵ величина Δ отлична от нуля, и поэтому из теоремы Арнольда–Мозера следует орбитальная устойчивость ПД (2.1) при выполнении условия (2.5) их устойчивости в линейном приближении.

3. Семейства долгопериодических движений и их устойчивость. Если сделать последовательно две унивалентные канонические замены переменных, задаваемые равенствами

$$x_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad y_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$Q_1 = \varphi_1 - 2\varphi_2, \quad Q_2 = \varphi_2, \quad P_1 = r_1, \quad P_2 = 2r_1 + r_2 \quad (3.2)$$

то функция Гамильтона (1.2) примет вид

$$H = \mu P_1 + P_2 + \epsilon(P_2 - 2P_1)\sqrt{P_1} \sin Q_1 + O(\epsilon^2) \quad (3.3)$$

причем, согласно (3.1) и (3.2), должно выполняться неравенство $P_2 \geq 2P_1$.

Рассмотрим приближенную систему, гамильтониан которой определяется равенством (3.3), если в нем отбросить величины $O(\epsilon^2)$. В этой системе координата Q_2 циклическая и существует интеграл $P_2 = c > 0 - \text{const}$. Изменение же переменных Q_1 , P_1 описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$H = \mu P_1 + \epsilon f(P_1) \sin Q_1, \quad f = (c - 2P_1)\sqrt{P_1} \quad (3.4)$$

В приближенной системе существуют положения равновесия $Q_1 = Q_1^*, P_1 = P_1^*$. Несложный анализ показывает, что 1) при $\mu < -\epsilon\sqrt{2c}$ существует одно положение равновесия, для которого $Q_1 = \pi/2$, $\mu + \epsilon f' = 0$, где f' – значение производной функции f , вычисленной при $P_1 = P_1^*$; 2) при $|\mu| < \epsilon\sqrt{2c}$ существуют два положения равновесия, для них $Q_1 = \pm \pi/2$, $\mu \pm f' = 0$; 3) при $\mu > \epsilon\sqrt{2c}$ будет одно положение равновесия, для которого $Q_1 = -\pi/2$, $\mu - \epsilon f' = 0$.

Далее, аналогично изложенному ранее подходу [15, 16], можно, используя изоэнергетическую редукцию, перейти к уравнениям Уиттекера и при помощи метода Пуанкаре показать, что в полной системе с гамильтонианом (3.3) из указанных положений равновесия рождаются семейства долгопериодических движений (ДПД). Период этих движений по τ стремится к 2π , когда $\epsilon \rightarrow 0$.

Принимая во внимание условие (2.5), приходим к известному (см. [9]) выводу о том, что в случае, когда семейство движений Ляпунова устойчиво, существует также семейство ДПД; при переходе через границу $|\mu| = \epsilon\sqrt{2c}$ области устойчивости движений Ляпунова в область $|\mu| < \epsilon\sqrt{2c}$ их неустойчивости возникает еще одно семейство ДПД. Было установлено [9], что семейства ДПД орбитально устойчивы в первом приближении.

Покажем, что эти семейства орбитально устойчивы и в строгой нелинейной постановке задачи. Для этого, как и в разд. 2, получим нормальную форму гамильтониана возмущенного движения, а затем воспользуемся теоремой Арнольда–Мозера. Нормальная форма будет иметь следующий, аналогичный (2.6), вид:

$$H = \delta_1 p_1 + \delta_2 p_2 + c_{20} p_1^2 + c_{11} p_1 p_2 + c_{02} p_2^2 + O_3 \quad (3.5)$$

Довольно громоздкие вычисления показывают, что для ПД, отвечающих равно-

весиям $Q_1 = \pm \pi/2, P_1 = P_1^*$, коэффициенты функции (3.5) допускают такие оценки:

$$\delta_1 = \mp \epsilon \sqrt{|ff''|} + O(\epsilon^2), \quad \delta_2 = 1 \pm \epsilon \sqrt{P_1^*} + O(\epsilon^2)$$

$$c_{20} = \pm \epsilon \frac{3(c^2 + 4P_1^{*2})}{8ff''^2 P_1^{*2}} + O(\epsilon^2), \quad c_{11} = O(\epsilon), \quad c_{02} = O(\epsilon^2)$$

Здесь значение функции f и ее второй производной f'' вычисляются при $P_1 = P_1^*$.

Условие орбитальной устойчивости $c_{20}\delta_2^2 - c_{11}\delta_1\delta_2 + c_{02}\delta_1^2 \neq 0$ при малых ϵ , сводится к неравенству $c_{20} \neq 0$ и, очевидно, выполнено, если величина ϵ достаточно мала.

4. Условно-периодические движения. Рассмотрим теперь нелинейные колебания, отличные от изученных в разд. 2 и 3 периодических движений. Ограничимся случаем точной соизмеримости 2:1, полагая, что параметр μ в (3.3) равен нулю.

Приближенная система. При $\mu = 0$ приближенной системе соответствует функция Гамильтона

$$H^* = P_2 + \epsilon(P_2 - 2P_1)\sqrt{P_1} \sin Q_1 \quad (4.1)$$

В этой системе $P_2 = c = \text{const} > 0$, $dQ_2/d\tau = 1 + \epsilon \sqrt{P_1} \sin Q_1$, а уравнениям, описывающим изменение переменных Q_1, P_1 , отвечает гамильтониан вида

$$F = \epsilon f(P_1) \sin Q_1, \quad (4.2)$$

где f – функция из (3.4). При этом $0 < P_1 \leq c/2$. Соответствующие функции (4.2) уравнения

$$\frac{dQ_1}{d\tau} = \epsilon f' \sin Q_1, \quad \frac{dP_1}{d\tau} = -\epsilon f \cos Q_1 \quad (4.3)$$

имеют интеграл

$$F = \epsilon h = \text{const} \quad (4.4)$$

Из свойств функции f и неравенства $|\sin Q_1| \leq 1$ следует, что в интеграле (4.4) $|h| \leq \sqrt{2/27} c^{3/2}$.

При $h = \pm \sqrt{2/27} c^{3/2}$ имеем положения равновесия $Q_1 = \pm \pi/2, P_1 = c/6$ системы (4.3). В полной системе с гамильтонианом (3.3) им соответствуют семейства орбитально устойчивых ДПД, рассмотренные в разд. 3.

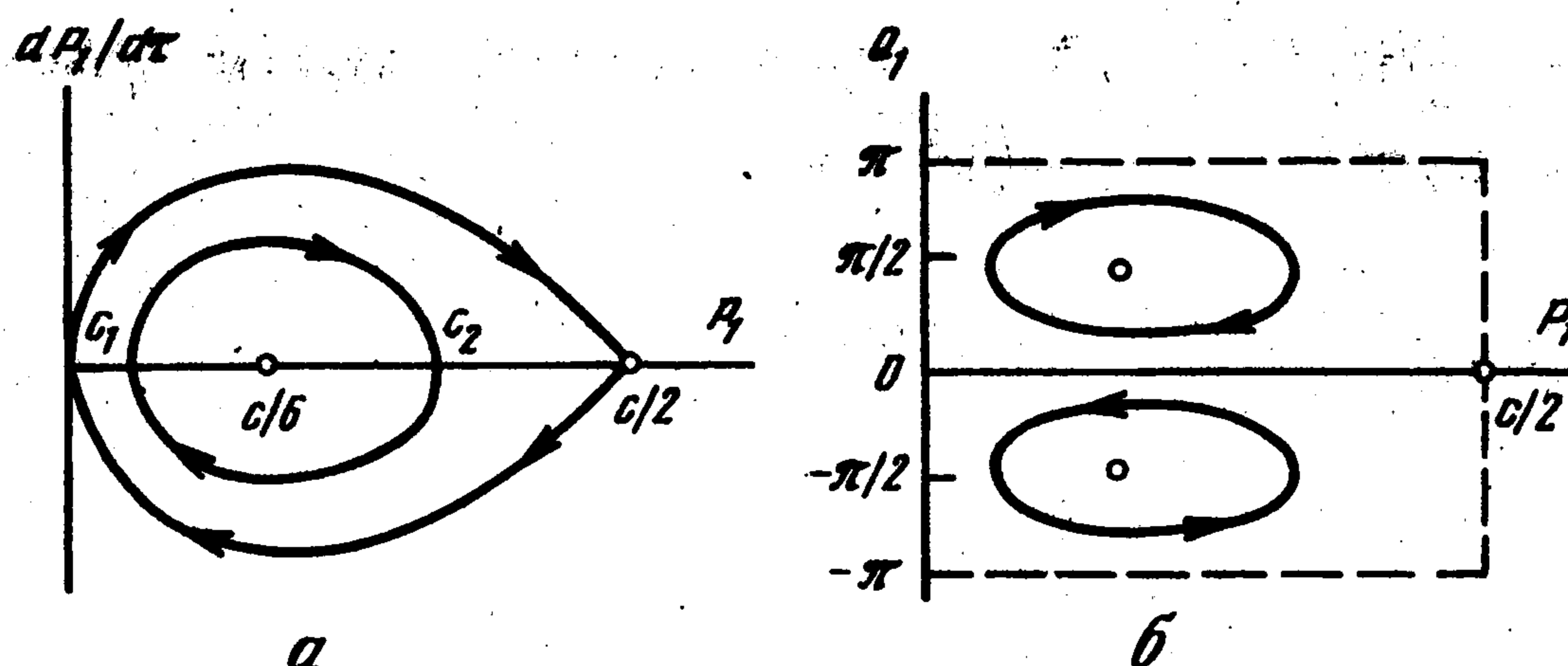
В случае $h = 0$ возможны два типа движений. Для движений одного типа $P_1 = c/2$, что соответствует ляпуновским КПД, которые, согласно сказанному в разд. 2, при $\mu = 0$ орбитально неустойчивы. Движения второго типа – это движения, асимптотические при $\tau \rightarrow \pm \infty$ к ляпуновским (фиг. 1, а).

При $0 < |h| < \sqrt{2/27} c^{3/2}$ движение имеет колебательный характер. Этим движениям на фиг. 1, б в плоскости Q_1, P_1 соответствуют замкнутые траектории, окружающие точки равновесия $(\pm \pi/2, c/6)$, а на фиг. 1, а в плоскости $P_1, dP_1/d\tau$ – траектории, окружающие точку $(c/6, 0)$. Получим явное выражение для функции $P_1(\tau)$ на этих траекториях.

Исключив при помощи интеграла (4.4) величину Q_1 из второго уравнения системы (4.3), приходим к уравнению

$$\left(\frac{dP_1}{d\tau}\right)^2 = \epsilon^2(f^2 - h^2) \quad (4.5)$$

Реальному колебательному движению отвечают значения P_1 , для которых $f^2 > h^2$.



Фиг. 1

Уравнение (4.5) интегрируется в эллиптических функциях. Получаем

$$P_1 = c\{x_1 + (x_2 - x_1)\text{sn}^2[\epsilon\sqrt{c(x_3 - x_1)}\tau, k]\} \quad (4.6)$$

$$k^2 = (x_2 - x_1)/(x_3 - x_1), \quad 0 < k^2 < 1$$

Здесь x_j ($j = 1, 2, 3$) – корни уравнения $\Phi(x) = 0$, где

$$\Phi(x) = x^3 - x^2 + x/4 - z^2/54 \quad (4.7)$$

В (4.7) введено обозначение $z = \sqrt{27/2}c^{-3/2}h$ ($0 < |z| < 1$). Для величин x_j , являющихся функциями от z , справедливы выражения

$$x_j = \frac{2}{3} \cos^2 \left[\frac{1}{6} \arccos(2z^2 - 1) + \frac{j\pi}{3} \right], \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

Можно проверить, что $0 < x_1 < 1/6 < x_2 < 1/2 < x_3 < 2/3$.

На фиг. 1, а для минимального и максимального значений функции $P_1(\tau)$ приняты соответственно обозначения $c_1 = c x_1$ и $c_2 = c x_2$.

При известной функции (4.6) величину Q_1 можно найти из интеграла (4.4). Частота ω_1 , с которой изменяются величины Q_1 и P_1 , вычисляется по формуле

$$\omega_1 = \omega_* \frac{\pi \sqrt{2(x_3 - x_1)}}{2K(k)} \quad (4.9)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, а $\omega_* = \epsilon \sqrt{2c}$ – частота малых колебаний приближенной системы в окрестности ее равновесных точек ($\pm \pi/2, c/6$). Величина ω_1/ω_* является функцией от z . Ее график представлен на фиг. 2. При $z \rightarrow 1$ (в окрестности равновесий) имеем

$$\omega_1 = \omega_* \left[1 - \frac{5}{18}(1 - z) + O((1 - z)^{3/2}) \right]$$

а при $z \rightarrow 0$ (когда замкнутая траектория на фиг. 1, а неограниченно приближается к асимптотическим траекториям) частота колебаний ω_1 стремится к нулю, причем

$$\omega_1 \approx -\pi \omega_* / \ln z$$

Переменные действие–угол. При исследовании колебаний в полной системе целесообразно ввести переменные действие–угол [17] для приближенного гамильтониана (4.1). Для определенности рассмотрим колебания, которым на фиг. 1, б в плоскости Q_1, P_1 отвечают замкнутые траектории, охватывающие точку $(\pi/2, c/6)$. На таких траекториях $0 < h < \sqrt{2/27}c^{3/2}$, или $0 < z < 1$.

Введем сначала переменные действие I_1 и I_2 . Так как Q_2 — циклическая координата, то $I_2 = P_2$. Величина же I_1 задается формулой

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint P_1 dQ_1 \quad (4.10)$$

где P_1 определяется следующим, вытекающим из (4.4), равенством:

$$(I_2 - 2P_1)\sqrt{P_1} \sin Q_1 = h \quad (4.11)$$

а интеграл вычисляется по упомянутой замкнутой траектории в плоскости Q_1, P_1 .

Используя соотношение (4.11) и уравнения (4.3), интеграл в (4.10) можно свести к интегралу по кривой в плоскости $P_1, dP_1/d\tau$, охватывающей на фиг. 1, а точку $(c/6, 0)$. В результате получим

$$I_1 = \frac{h}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \frac{P_1 f'}{f \sqrt{f^2 - h^2}} dP_1 \quad (4.12)$$

где f — функция из (3.4), в которой $c = I_2$.

Сделав в (4.12) замену $P_1 = I_2 x$ и учтя, что

$$h = z \sqrt{2/27} I_2^{3/2} \quad (4.13)$$

придем к интегралу

$$I_1 = \frac{\sqrt{6} I_2 z}{36\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1-6x}{(1-2x)\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

где $\Phi(x)$ — функция (4.7). Произведя интегрирование, найдем, что

$$I_1 = I_1^{(s)} \Psi(z) \quad (4.14)$$

где $I_1^{(s)} = -I_2/4$ — предельное значение переменной действие I_1 при $z \rightarrow 0$, а

$$\Psi(z) = 2\sqrt{6}z \frac{2\Pi(n, k) - 3(1-2x_1)K(k)}{9\pi(1-2x_1)\sqrt{x_3-x_1}}, \quad n = 2 \frac{x_2-x_1}{1-2x_1}, \quad 0 < n < 1 \quad (4.15)$$

где $\Pi(n, k)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода [18], величина k определена в (4.6). График функции $\Psi(z)$ показан на фиг. 2.

Соотношение (4.14) можно разрешить относительно z . В результате получим

$$z = \varphi(I_1/I_2) \quad (4.16)$$

В частности, при малых I_1 (т.е. в малой окрестности положения равновесия) имеем

$$z = 1 + 3\sqrt{3}(I_1/I_2) + 15/4(I_1/I_2)^2 + \dots$$

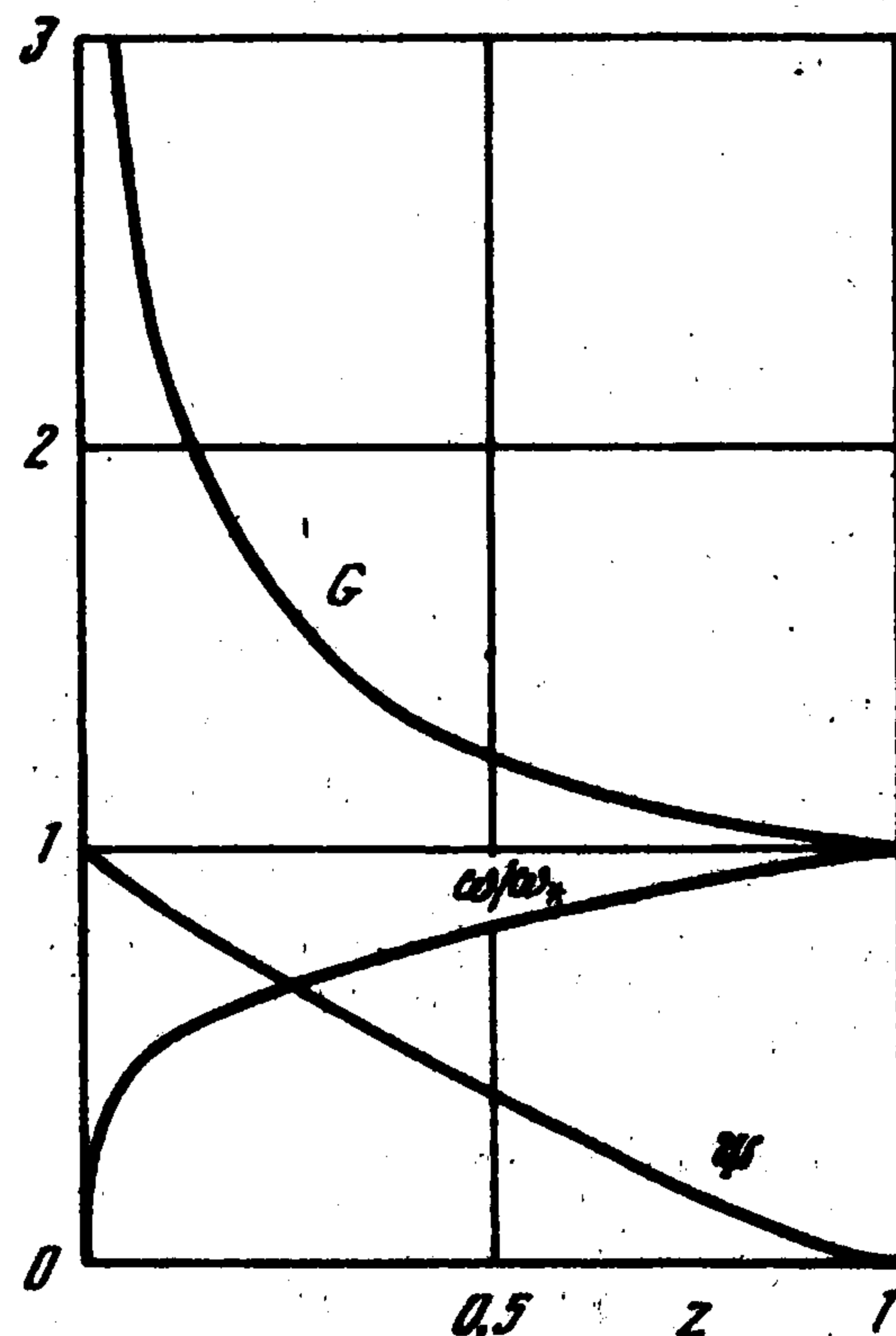
Соотношение (4.11), в силу равенств (4.13) и (4.16), принимает вид

$$(I_2 - 2P_1)\sqrt{P_1} \sin Q_1 = \sqrt{2/27} I_2^{3/2} \varphi(I_1/I_2) \quad (4.17)$$

а гамильтониан (4.1) приближенной системы может быть записан в следующей форме:

$$H^* = H^{(0)}(I_2) + \varepsilon H^{(1)}(I_1, I_2) \quad (4.18)$$

$$H^{(0)} = I_2, \quad H^{(1)} = \sqrt{2/27} I_2^{3/2} \varphi(I_1/I_2)$$



Фиг. 2

При этом частота ω_1 из (4.9) удовлетворяет равенству

$$\omega_1 = \varepsilon \partial H^{(1)} / \partial I_1 \quad (4.19)$$

а частота ω_2 определяется формулой

$$\omega_2 = 1 + \varepsilon \partial H^{(1)} / \partial I_2 \quad (4.20)$$

Для величины $\partial H^{(1)} / \partial I_2$ из (4.9), (4.18), (4.19) можно получить выражение

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} = \frac{z I_2 K - \pi \sqrt{6(x_3 - x_1)} I_1}{\sqrt{6 I_2} K}$$

Покажем теперь как найти каноническую замену переменных $Q_i, P_i \rightarrow I_i, w_i$ ($i = 1, 2$), вводящую переменные действие – угол. Необходимые вычисления сильно упрощаются, так как решение уравнений (4.3) для переменных Q_1, P_1 уже известно. Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение. Пусть $H(q, p)$ – функция Гамильтона системы с одной степенью свободы. Допустим, что в некотором интервале изменения постоянной h интеграла $H(q, p) = h$ движение имеет периодический характер и описывается формулами

$$q = q^*(t + t_0, h), \quad p = p^*(t + t_0, h)$$

Пусть I – переменная действие, а $h(I)$ – гамильтониан H , записанный в переменных действие – угол I, w . Тогда каноническая унивалентная замена переменных $q, p \rightarrow I, w$ может быть записана в виде

$$q = q^*(w/\omega, h), \quad p = p^*(w/\omega, h); \quad h = h(I), \quad \omega = dh/dI$$

В справедливости этого почти очевидного утверждения можно убедиться, например, при помощи непосредственной проверки того, что скобка Пуассона (q^*, p^*) равна единице.

На основании этого утверждения из (4.3), (4.4) и (4.6) получаем замену переменных $Q_1, P_1 \rightarrow I_1, w_1$ в виде

$$Q_1 = \pi - \arccos \frac{n \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1 - n \operatorname{sn}^2 u) \sqrt{s + k^2 \operatorname{sn}^2 u}} \quad (4.21)$$

$$P_1 = I_2 [x_2 + (x_2 - x_1) \operatorname{sn}^2 u]; \quad u = K w_1 / \pi, \quad s = x_1 / (x_3 - x_1)$$

причем k^2 задается равенством (4.6), величина n определена в (4.15); величины x_i вычисляются по формулам (4.8), (4.16).

Замена (4.21) могла бы быть также получена при помощи производящей функции вида

$$S_1(I_1, I_2, Q_1) = \int_{\pi/2}^{Q_1} P_1 dQ_1$$

Функция $P_1 = P_1(I_1, I_2, Q_1)$ определяется из соотношения (4.17).

Каноническая по I_1, w_1 замена переменных (4.21) преобразует левую часть равенства (4.17) к ее правой части, равной $H^{(1)}$. Эта замена содержит I_2 как параметр. Для получения преобразования $Q_i, P_i \rightarrow I_i, w_i$ ($i = 1, 2$), каноническое также и по переменным I_2, w_2 и приводящее функцию Гамильтона (4.1) к виду (4.18), возьмем производящую функцию в виде

$$S(I_1, I_2, Q_1, Q_2) = I_2 Q_2 + S_1$$

Тогда, как и должно быть, $P_2 = I_2$, а

$$w_2 = Q_2 + \int_{\pi/2}^{Q_1} \frac{\partial P_1}{\partial I_2} dQ_1$$

Отсюда и из соотношений (4.3), (4.17) и (4.21) можно найти $Q_2 = w_2 + g(I_1, I_2, w_1)$. Явный вид функции g не выписываем, так как он далее не требуется.

Сохранение условно-периодических движений в полной системе. При $0 < h < \sqrt{2/27}c^{3/2}$ в приближенной системе движение имеет колебательный характер. Частоты колебаний определяются формулами (4.9), (4.20). Если для заданных начальных условий отношение $\omega_1 : \omega_2$ не является рациональным числом, то движение будет условно-периодическим.

Обратимся теперь к полной системе, гамильтониан которой задается равенством (3.3), если в нем положить $\mu = 0$. В переменных I_i, w_i ($i = 1, 2$) этот гамильтониан имеет вид

$$H = H^{(0)}(I_2) + \varepsilon H^{(1)}(I_1, I_2) + \varepsilon^2 H^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \varepsilon) \quad (4.22)$$

где $H^{(0)}, H^{(1)}$ – функции из (4.18), а функция $H^{(2)}$ в области колебаний $0 < h < \sqrt{2/27}c^{3/2}$ является 2π -периодической по w_1, w_2 и аналитической по всем своим аргументам.

При $\varepsilon = 0$ гамильтониан (4.22) зависит только от одной из переменных действие I_2 . Следовательно, имеет место случай собственного вырождения [14]. При этом выполняются неравенства

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_1^2} \neq 0 \quad (4.23)$$

Справедливость первых двух неравенств сразу следует из (4.9), (4.18), (4.19). Проверим выполнение третьего неравенства. Вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_1^2} = \frac{5G(z)}{\sqrt{6I_2}}$$

$$G(z) = \pi^2 z \frac{K(x_3 - x_2)[2(x_2 - x_1)(3x_2 - 1) - 1] + E(x_3 - x_1)}{60K^3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)^2(x_2 - x_1)^2}$$

где $E = E(k^2)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

При $0 < z < 1$ функция $G(z)$ положительна и монотонно убывает, причем, если $z \rightarrow 1$, то $G(z) \rightarrow 1$, а когда $z \rightarrow 0$, имеем

$$G \approx -\frac{18\pi^2}{5z \ln^3 z}$$

График функции $G(z)$ представлен на фиг. 2.

Таким образом, все три неравенства (4.23) выполнены.

Следовательно, согласно известным результатам [14, 19], при $0 < h < \sqrt{2/27}c^{3/2}$ движение в полной системе с гамильтонианом (3.3) для большинства начальных условий будет условно-периодическим с частотами ω_1 и ω_2 , только доля $Q(\exp(-a_1\varepsilon^{-1}))$, где $a_1 = \text{const} > 0$, фазового пространства не заполнена условно-периодическими траекториями. При этом для всех начальных условий величины $I_i(\tau)$ ($i = 1, 2$) при всех τ близки к их начальным значениям

$$|I_i(\tau) - I_i(0)| < a_2\varepsilon \quad (a_2 = \text{const})$$

5. Колебания упругого маятника. Следуя описанному ранее подходу [3], рассмотрим задачу о нелинейных резонансных колебаниях упругого маятника. Маятник представляет собой материальную точку, прикрепленную к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой закреплен в неподвижной точке O . Движение происходит в фиксированной вертикальной плоскости в однородном поле тяжести. Пусть

m – масса точки, g – ускорение свободного падения, l_0 – длина недеформированной пружины, k – ее жесткость. Через ρ и θ обозначим полярные координаты точки, угол θ отсчитывается от оси, проходящей через точку O закрепления пружины и направленной вертикально вниз.

Маятник может находиться в равновесном состоянии на этой оси. Тогда $\theta = 0$, а $\rho = l$, причем $l_0 = l(1 - \chi^2)$. Здесь $\chi = \sqrt{mg/(kl)}$ – отношение частоты $\sqrt{g/l}$ малых горизонтальных колебаний точки в окрестности равновесия к частоте $\sqrt{k/m}$ ее малых колебаний вдоль вертикали.

Будем исследовать движение маятника в окрестности этого положения равновесия. В качестве обобщенных координат примем безразмерные величины ξ и η , определяемые равенствами

$$\xi = \rho/l - 1, \quad \eta = \sqrt{\chi}\theta$$

Введя еще безразмерные импульсы по формулам

$$p_\xi = \sqrt{m/k}\dot{\xi}, \quad p_\eta = \sqrt{l/g}(1+\xi)^2\dot{\eta}$$

и перейдя к безразмерному времени $\tau = \sqrt{g/l}t$, получим функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2\chi} \left[p_\xi^2 + \chi \frac{p_\eta^2}{(1+\xi)^2} \right] - \chi(1+\xi) \cos \frac{\eta}{\sqrt{\chi}} + \frac{1}{2\chi} (\chi^2 + \xi)^2 \quad (5.1)$$

Равновесию точки на вертикали соответствует решение $\xi = \eta = p_\xi = p_\eta = 0$ уравнений движения. Разложение гамильтониана (5.1) в окрестности этого решения имеет вид

$$H = \frac{1}{2\chi} (\xi^2 + p_\xi^2) + \frac{1}{2} (\eta^2 + p_\eta^2) + \frac{1}{2} \xi (\eta^2 - 2p_\eta^2) + \dots \quad (5.2)$$

Несущественное постоянное слагаемое в разложении (5.2) отброшено.

В соответствии с предположением о том, что исследуются движения маятника, близкие к его положению равновесия, введем малый параметр ε при помощи замены переменных

$$\xi = \varepsilon \tilde{\xi}, \quad \eta = \varepsilon \tilde{\eta}, \quad p_\xi = \varepsilon \tilde{p}_\xi, \quad p_\eta = \varepsilon \tilde{p}_\eta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Эта замена переменных является канонической с валентностью ε^{-2} . Уравнениям движения в новых переменных отвечает гамильтониан

$$H = \frac{1}{2\chi} (\tilde{\xi}^2 + \tilde{p}_\xi^2) + \frac{1}{2} (\tilde{\eta}^2 + \tilde{p}_\eta^2) + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\xi} (\tilde{\eta}^2 - 2\tilde{p}_\eta^2) + O(\varepsilon^2) \quad (5.3)$$

Пусть удвоенная частота малых горизонтальных колебаний маятника близка к частоте его малых вертикальных колебаний. Введя еще один малый параметр, "расстройку" μ , положим, что

$$\sqrt{k/m} = \sqrt{g/l}(2 + \mu), \quad (0 \leq |\mu| \leq 1)$$

Будем считать, что относительно ε величина μ имеет порядок, не меньший первого.

Сделаем еще одно каноническое (с валентностью, равной 9/8) преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} x_1 - \frac{\varepsilon}{18} (x_2^2 - 5y_2^2) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{\eta} &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} x_2 + \varepsilon \frac{5}{9} y_1 y_2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\tilde{p}_\xi = -\frac{2\sqrt{2}}{3} y_1 + O(\epsilon^2)$$

$$\tilde{p}_\eta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} y_2 + \frac{\epsilon}{9} x_2 y_1 + O(\epsilon^2)$$

В новых переменных x_i, y_i ($i = 1, 2$) движение описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом (1.2). Анализ колебаний маятника можно теперь провести, опираясь на изложенные выше в разд. 2–4 общие выводы о колебаниях автономной гамильтоновой системы при резонансе 2 : 1.

Короткопериодические движения. В рассматриваемой задаче о колебаниях упругого маятника с линейным законом упругой силы КПД Ляпунова представляют собой гармонические колебания материальной точки вдоль вертикали, проходящей через точку O закрепления пружины. Для этих колебаний

$$\theta = 0, \quad \rho = l \left\{ 1 - \epsilon \frac{2\sqrt{2}c}{3} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} (t + t_0) \right] \right\} \quad (5.5)$$

где t_0, c – произвольные постоянные ($c > 0$). Если выполняется неравенство (2.5), то при достаточно малых ϵ эти колебания орбитально устойчивы. Если же неравенство (2.5) выполняется с противоположным знаком, то имеет место орбитальная неустойчивость. Это находится в соответствии с известными результатами аналитического исследования устойчивости вертикальных колебаний малой амплитуды (см., например, [20]). Орбитальная устойчивость вертикальных колебаний произвольной амплитуды была исследована в [21] при помощи численных расчетов.

Долгопериодические движения. Согласно сказанному в разд. 3, ДПД отвечают положения равновесия приближенной системы, для которых $Q_1 = \pm \pi/2$, а соответствующие значения P_1 являются корнями уравнения $\mu \pm f' = 0$. Обозначив эти значения через $P_1^\pm$ (верхний знак для $Q_1 = \pi/2$, а нижний для $Q_1 = -\pi/2$), найдем, что

$$P_1^\pm = [\sqrt{(\mu/\epsilon)^2 + 6c} \pm \mu/\epsilon]^2 / 36$$

Отвечающие равновесиям $Q_1 = \pm \pi/2, P_1 = P_1^\pm$ ДПД полной системы обозначим через $\Pi^\pm$. В соответствии с каноническими преобразованиями данного раздела и разд. 3 эти ПД материальной точки в исходных полярных координатах ρ, θ описываются формулами

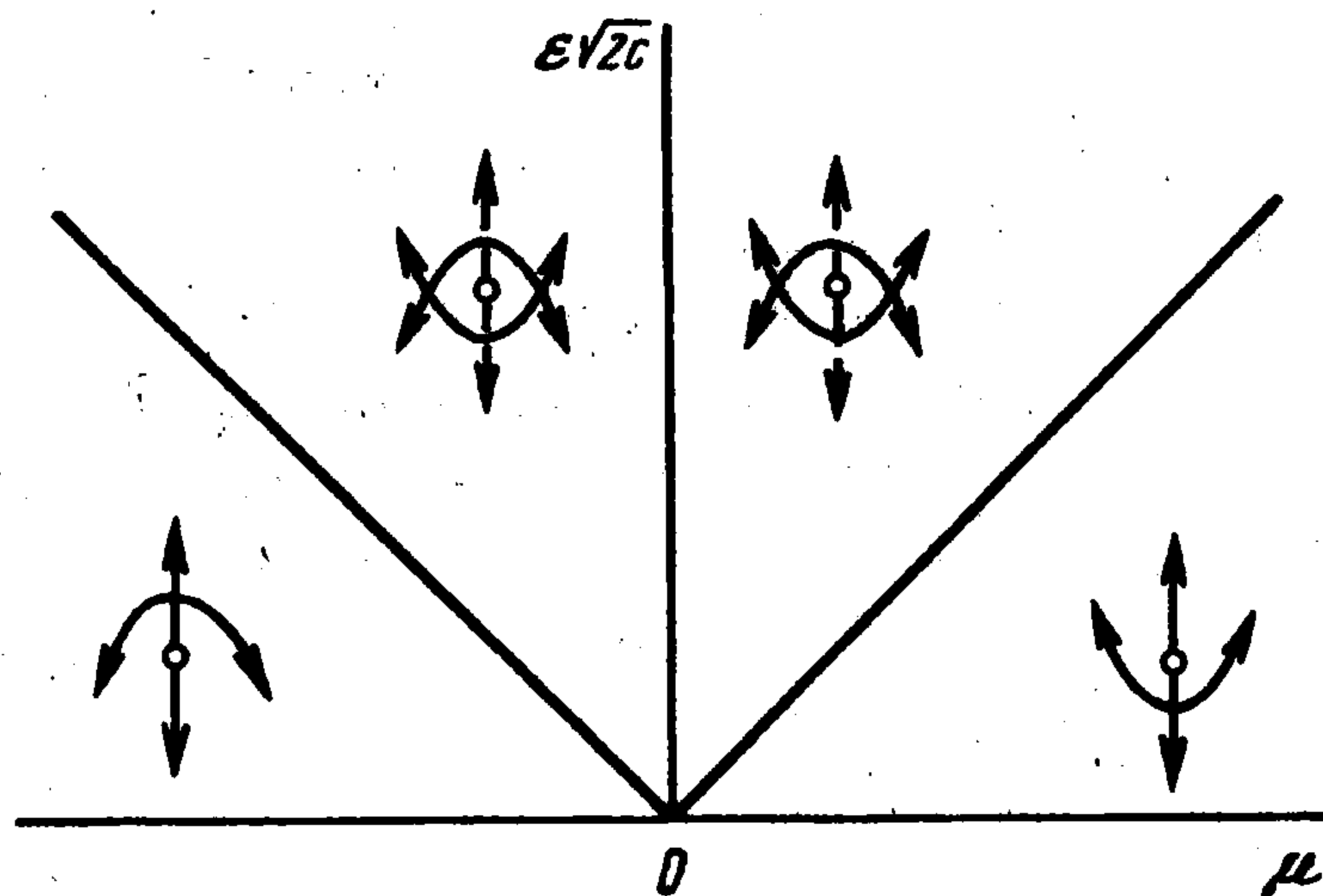
$$\begin{aligned} \rho &= l \left(1 \mp \frac{4}{3} \epsilon \sqrt{P_1^\pm} \cos 2Q_2 + O(\epsilon^2) \right) \\ \theta &= -\frac{4}{3} \epsilon \sqrt{2(c - 2P_1^\pm)} \sin Q_2 + O(\epsilon^2) \\ Q_2 &= \left(1 \pm \epsilon \sqrt{P_1^\pm} + O(\epsilon^2) \right) \sqrt{g/l} (t + t_0) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Если в (5.6) пренебречь величинами $O(\epsilon^2)$, то траектории материальной точки в движениях $\Pi^\pm$ будут дважды проходимыми за период параболами. Для Π^+ ветви параболы направлены вниз, а для Π^- – вверх. Существование движений $\Pi^\pm$ отмечалось ранее [3] (см. также лекции [22]).

Для описания бифуркаций ПД, в соответствии со сказанным в разд. 3, рассмотрим три случая.

1°. $\mu < -\epsilon\sqrt{2c}$. В этом случае КПД Ляпунова (5.5) орбитально устойчивы и существует еще семейство Π^+ орбитально устойчивых ДПД. При этом $0 < P_1^+ < c/18$.

2°. $|\mu| < \varepsilon\sqrt{2c}$. При переходе через границу $\mu = -\varepsilon\sqrt{2c}$ области устойчивости движений Ляпунова в область $|\mu| < \varepsilon\sqrt{2c}$ их неустойчивости рождается семейство Π^- ДПД. И, таким образом, в области $|\mu| < \varepsilon\sqrt{2c}$ существует три семейства ПД: орбитально неустойчивое семейство КПД Ляпунова и два орбитально устойчивых



Фиг. 3

семейства $\Pi^\pm$ ДПД. Справедливы соотношения

$$c/18 < P_1^+ < c/6 < P_1^- < c/2 \text{ при } -\varepsilon\sqrt{2c} < \mu < 0$$

$$P_1^+ = P_1^- = c/6 \text{ при } \mu = 0$$

$$c/18 < P_1^- < c/6 < P_1^+ < c/2 \text{ при } 0 < \mu < \varepsilon\sqrt{2c}$$

3°. $\mu > \varepsilon\sqrt{2c}$. При переходе через границу $\mu = \varepsilon\sqrt{2c}$ области неустойчивости движений Ляпунова в область $\mu > \varepsilon\sqrt{2c}$, где они устойчивы, исчезает семейство Π^+ ДПД. И, таким образом, в области $\mu > \varepsilon\sqrt{2c}$ существует два семейства ПД: движения Ляпунова и движения Π^- , причем $0 < P_1^- < c/18$. Оба семейства орбитально устойчивы.

Описанная бифуркационная картина схематично иллюстрируется на фиг. 3 в плоскости $\mu, \varepsilon\sqrt{2c}$. Границам области неустойчивости КПД Ляпунова отвечают на фиг. 3 биссектрисы первого и второго координатных углов. Движения $\Pi^\pm$ изображены параболлами, а движения Ляпунова – вертикальными отрезками, причем сплошные линии отвечают орбитально устойчивым ПД, а штриховые – неустойчивым.

О "перекачке" энергии между вертикальными и горизонтальными колебаниями. Один из важнейших нелинейных эффектов в движении автономной гамильтоновой системы в окрестности ее устойчивого положения равновесия при резонансе 2 : 1 состоит в возможности периодической перекачки энергии между ее степенями свободы. Случай системы с двумя степенями свободы, на примере упругого маятника, подробно исследовался [3]. При этом использовались асимптотические методы типа метода усреднения.

Интересно выяснить, как обстоит дело с перекачкой энергии в полной, а не в приближенной системе. Из результатов последней части разд. 4 следует, что в достаточно малой окрестности положения равновесия упругого маятника явление периодической перекачки энергии между его вертикальными и горизонтальными колебаниями существует на бесконечном интервале времени для большинства начальных условий. В фазовом пространстве мера множества начальных условий, для которого перекачка энергии может отсутствовать, экспоненциально мала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405).

ЛИТЕРАТУРА

1. Korteweg D.J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, vibrations de relation, dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté // Arch. Néderl. sci. exactes et natur. 1898. Sér. 2. T. 1. P. 229–260.
2. Beth H.J.E. The oscillations about a position of equilibrium where a simple linear relation exists between the frequencies of the principal vibrations // Phil. Mag. 1913. Ser. 6. V. 26. P. 268–324.
3. Вумм А., Горелик Г. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем // Журн. техн. физики. 1933. Т. 3. Вып. 2–3. С. 294–307.
4. Breakwell J., Pringle R. Nonlinear resonances affecting gravity gradient stability // Proc. 16 th Intern. Astronaut. Cong., Athens, 1965. Paris: Gauthier-Villars, 1966. P. 305–325.
5. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
6. Цельман Ф.Х. О "перекачке энергии" между нелинейно-связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 957–962.
7. Henrard J. Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium // Celest. Mech. 1970. V. 1. № 3–4. P. 437–466.
8. Henrard J. Lyapunov's center theorem for resonant equilibrium // J. Different. Equat. 1973. V. 14. № 3. P. 431–441.
9. Schmidt D.S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a hamiltonian system // Celest. Mech. 1974. V. 9. № 1. P. 81–103.
10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
12. Moser J.K. Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968 = Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
13. Siegel C.L. Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956. = Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
14. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
15. Маркеев А.П. О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 372–382.
16. Маркеев А.П. Об устойчивости и нелинейных колебаниях гамильтоновой системы в одном резонансном случае // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 38–49.
17. Goldstein H. Classical Mechanics. Cambridge: Addison – Wesley, 1951. = Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
18. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
19. Нейштадт А.И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
20. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.
21. Маркеев А.П., Чеховская Т.Н. О колебаниях упругого маятника // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 18–26.
22. Duistermaat J.J. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of hamiltonian systems // Lect. Notes in Math. 1984. № 1057. P. 57–105.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1999