

УДК 531.36:534.242

© 1999 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров, А.М. Шматков

**ОБОБЩЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Разработан эффективный численно-аналитический метод исследования параметрически возбуждаемых колебательных систем типа Хилла, описываемых обобщенными краевыми задачами. Предполагается, что коэффициенты уравнения произвольным нелинейным образом зависят от параметра, собственные значения которого требуется найти. Подход к решению обобщенной периодической краевой задачи основан на установленной дифференциальной связи между собственным значением и величиной периода (длиной интервала). Вычислительный алгоритм обладает свойством ускоренной сходимости, что позволяет успешно исследовать многие весьма тонкие и трудные проблемы построения зависимостей собственных значений и собственных функций (форм колебаний) от индекса и параметров системы, недоступные известным традиционным подходам. Для иллюстрации высокой эффективности метода построено решение задачи о пространственных угловых колебаниях динамически симметричного спутника, движущегося по круговой орбите.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания линейной системы, описываемой обобщенной периодической краевой задачей для уравнения типа Хилла [1]

$$\ddot{u} + r(t, \lambda)u = 0, \quad u(0) = u(1), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \quad (1.1)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad \lambda \in \Lambda \quad (r(t+1, \lambda) \equiv r(t, \lambda))$$

Здесь r – кусочно-непрерывная вещественная функция аргумента t , которая аналогичным (кусочно-непрерывным) образом может быть продолжена для всех $|t| \geq 0$. В частности, она может быть гладкой по t . Относительно вещественного параметра λ функция r предполагается достаточно гладкой, в частности, непрерывно дифференцируемой при $\lambda \in \Lambda$; Λ – множество (совокупность отрезков) допустимых значений искомого параметра λ .

Требуется найти решение обобщенной задачи (1.1), т.е. определить собственные значения λ и функции $u(t, \lambda)$. Особый интерес для приложений представляет случай дискретного спектра $\lambda \in \{\lambda_n\}$ и множества форм колебаний $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$. Обычно коэффициент r зависит также от других параметров системы γ (геометрических, инерционных, упругих и др.), т.е. $r = r(t, \lambda, \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Требуется построить кривые или поверхности $\lambda_n(\gamma)$ и соответствующие им формы колебаний $u_n(t, \gamma)$, см. далее.

Замечания. 1°. В случае классической постановки периодической задачи функция r линейна по λ ; обычно полагают $r \equiv \lambda + \gamma q(t)$ (уравнение Хилла), в частности, $q \equiv \cos 2\pi t$ (уравнение Матье) или $q \equiv \text{sign}(\cos 2\pi t)$ (уравнение Мейснера); требуется найти $\lambda_n(\gamma)$, $u_n(t, \gamma)$, см. [1–6].

2°. Уравнение более общего вида $a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 0$, где a, b, c – периодические функции t и зависят от параметров λ, γ , при соответствующих предположениях гладкости и знакоопределенности приводятся к виду (1.1) [1–6]. Аналогично система двух уравнений первого порядка с

периодическими коэффициентами (например, линейные уравнения Гамильтона) может быть представлена в форме (1.1). Ситуации, когда такое приведение затруднительно, также представляют интерес для прикладных задач.

3°. Наряду с главным резонансом $1/1$ и резонансами $1/n$ в системе (1.1) могут реализовываться резонансы вида $2/n$ и, возможно, более сложные комбинационные резонансы [5]. Определение соответствующих значений $\lambda_n(\gamma)$ и периодических решений $u_n(t, \gamma)$ представляет основной интерес и является целью дальнейших исследований.

4°. В постановках периодических краевых задач (в отличие от задачи Штурма – Лиувилля) обычно функция r не предполагается положительно определенной для рассматриваемых значений t, λ, γ . Это обстоятельство приводит к существенным трудностям применения осцилляционных теорем и теорем сравнения Штурма [4] и значительным осложнениям при построении решений и их анализе.

5°. Исследование обобщенной периодической задачи, описываемой уравнением типа Хилла (1.1), имеет важное значение для теории нелинейных колебаний и устойчивости [3, 5–7]. Такие задачи возникают в механике, прикладной небесной механике, электромеханике, гидродинамике, теории упругости, электродинамике и атомной физике и др. Основные аналитические и численные результаты получены для классических случаев уравнения Хилла: уравнений Матье и Мейснера [1–8]. Эффективные численно-аналитические методы и результаты исследований обобщенных периодических краевых задач отсутствуют; что связано с принципиальными трудностями их решения.

6°. Основные свойства и поведение собственных значений $\lambda_n(\gamma)$ и функций $u_n(t, \gamma)$ обобщенной задачи могут кардинальным образом отличаться от "стандартных", известных для указанных выше классических задач [1–9]. Проиллюстрируем это утверждение на простых примерах для уравнения типа Эйлера, допускающих полное аналитическое решение [4]

$$\begin{aligned} r(t, \lambda) &= (\lambda + t)^{-2}, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda : \lambda > 0, \lambda < -1\}, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \lambda_n &= \text{Arg} \left[\cos(\sqrt{3} \ln \chi) - \sqrt{3}(\chi^2 - 1)(\chi^2 + 1)^{-1} \sin(\sqrt{3} \ln \chi) - \right. \\ &\quad \left. - 2\chi(\chi^2 + 1)^{-1} \right], \quad \lambda_n \approx \left(\exp[2\pi(n + 1/3)/\sqrt{3}] - 1 \right)^{-1} \\ u_n(t) &= c_n \xi_n(t) [\chi_n \sin \theta_n(1) \cos \theta_n(t) + (1 - \chi_n \cos \theta_n(1)) \sin \theta_n(t)] \\ \xi_n(t) &= (1 + t/\lambda_n)^{1/2}, \quad \chi_n = \xi_n(1), \quad \theta_n(t) = \sqrt{3} \ln \xi_n(t), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь c_n – произвольные постоянные. Из (1.2) следует, что собственные значения λ_n сосредоточены вблизи $\lambda = +0$ ($n \geq 1$) и $\lambda = -1-0$ ($n \leq -1$), причем они экспоненциально стремятся к указанным значениям при $|n| \rightarrow \infty$. Собственные функции $u_n(t)$ (1.2) осциллируют по t при $|n|$ достаточно большом сколь угодно быстро и притом экзотическим образом.

Аналогично исследуется пример, когда функция $r = \lambda^2(1 + \lambda t)^{-2}$, где $\lambda > -1$. В выражениях (1.2) следует совершить замену $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$; для λ_n получим приближенные выражения

$$\lambda_n \approx \exp[2\pi(n + 1/3)/\sqrt{3}] - 1, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

Согласно (1.2), (1.3) значения $\lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$ и $\lambda_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow -\infty$. Соответствующие собственные функции при больших $|n|$ также быстро осциллируют.

Можно рассмотреть другие примеры, иллюстрирующие различные необычные свойства собственных значений и функций. Спектр обобщенной периодической краевой задачи (1.1) может быть дискретным (счетным или конечным), дискретно-континуальным или пустым. При этом дискретные значения спектра могут быть как простыми, так и двукратными (например при $r = \text{const}$), которым отвечает одна или две собственные функции.

7°. Обобщенная задача (1.1) относится к классу несамосопряженных операторов в отличие от соответствующего классического случая. Своеобразие заключается, в частности, в условии ортогональности

$$\int_0^1 [r(t, \lambda_n) - r(t, \lambda_m)] u_n(t) u_m(t) dt = 0, \quad r(t, \lambda_n) \neq r(t, \lambda_m) \quad (1.4)$$

Для дальнейших построений требуется понятие нормы функций $u_n(t)$ с некоторым весом. Предельным переходом в (1.4) при $\lambda_m \rightarrow \lambda_n$ получается выражение (см. далее)

$$N_n = \int_0^1 r'_\lambda(t, \lambda_n) u_n^2(t) dt \quad (1.5)$$

При дополнительных условиях знакоопределенности, налагаемых на производную r'_λ по λ , выражение N_n (1.5) имеет смысл квадрата нормы функции $u_n(t)$ с весом $r'_\lambda(t, \lambda_n)$. В случае линейной по λ функции r соотношения (1.4), (1.5) совпадают с общеизвестными для самосопряженных краевых задач [1, 2, 4].

С помощью формального приема задача (1.1) может быть представлена в виде непрерывного семейства классических задач, в котором $\lambda \in \Lambda$ – параметр семейства. Действительно, рассмотрим задачу для μ, U вида

$$\ddot{U} + [\mu + r(t, \lambda)]U = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad U(0) = U(1), \quad \dot{U}(0) = \dot{U}(1) \quad (1.6)$$

$$\mu \in \{\mu_m(\lambda)\}, \quad U_m(t, \lambda) = U(t, \mu_m(\lambda), \lambda), \quad \lambda \in \Lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$

Пусть достаточно полное семейство решений вспомогательной задачи построено согласно (1.6). Тогда искомое решение исходной задачи (1.1) получается в результате выполнения следующих операций:

$$\lambda_n = \text{Arg} \mu_m(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda \quad (\mu_m(\lambda_n) = 0, \quad n = n(m)) \quad (1.7)$$

$$u_n(t) = U(t, 0, \lambda_n)$$

Этот подход связан с построением дискретного множества функций $\mu_m(\lambda)$ и определением их вещественных нулей λ_n . Данные построения могут быть осуществлены, как правило, только численно для сравнительно небольшого множества значений индекса m (для низших мод колебаний) и соответствующих $n(m)$, что может потребовать значительного дорогостоящего программного обеспечения. Аналитические полные расчеты возможно провести в весьма редких случаях явной интегрируемости уравнений (1.1) или (1.6) (см. примеры (1.2), (1.3)). Подход, основанный на соотношениях (1.6), (1.7), представляется, однако, полезным на предварительной стадии исследования вопросов существования искомого решения, поскольку самосопряженная задача (1.6) допускает применение вариационных методов [3, 4]. Это обстоятельство позволяет получить эффективные оценки сверху величин $\mu_m(\lambda)$, например, с помощью метода Релея–Ритца. К задаче (1.6) также удобно применение хорошо разработанных методов пристрелки и конечных элементов в сочетании с процедурой продолжения по параметру λ для построения грубых оценок.

2. Метод ускоренной сходимости для решения вспомогательной задачи. Изложим кратко схему метода ускоренной сходимости, основанную на введении малого параметра и методе возмущений Ляпунова–Пуанкаре [5]. Предположим, что для некоторого фиксированного назначения $\lambda \in \Lambda$ найдена оценка $\mu_m^0(\lambda)$, например, с помощью вариационного подхода (метода Релея–Ритца, принципа Релея), методов конечных элементов, пристрелки и т.п. В ряде случаев удастся найти такое значение $\lambda \in \Lambda$, для которого известно точное или приближенное аналитическое решение (например, как в случае уравнений Матье, Мейснера и др.). Построим для данного $\mu_m^0(\lambda)$ общее решение V_{0m} уравнения (1.6) (индекс m фиксирован и для сокращения записи не указывается далее)

$$\ddot{V} + [\mu^0(\lambda) + r(t, \lambda)]V = 0, \quad V_0(t, \lambda) = C_1 V_1^0(t, \lambda) + C_2 V_2^0(t, \lambda)$$

$$1) V(0) = 0, \quad \dot{V}(0) = 1; \quad 2) V(0) = 1, \quad \dot{V}(0) = 0, \quad C_{1,2} = \text{const} \quad (2.1)$$

Здесь V_1^0, V_2^0 – частные линейно независимые решения двух задач Коши 1 и 2, которые для известного μ^0 при выбранном $\lambda \in \Lambda$ могут быть построены аналитически или численно, т.е. в виде вычислительной процедуры.

Потребуем, чтобы для некоторого $t = \theta > 0$ выполнялись условия типа (1.6): $V_0(0) = V_0(\theta), \dot{V}_0(0) = \dot{V}_0(\theta)$. Из этих краевых условий следует, при учете теоремы Лиувилля, соотношение для θ :

$$\Delta^0(\theta, \lambda) = 0, \quad \Delta^0(t, \lambda) \equiv \dot{V}_1^0(t, \lambda) + V_2^0(t, \lambda) - 2 \quad (2.2)$$

Здесь Δ^0 – определитель матрицы коэффициентов при C_1, C_2 . Отметим, что определитель Вронского постоянен и равен единице.

Будем далее рассматривать (2.2) как уравнение относительно неизвестной θ (λ – фиксирована). При $\mu^0 = \mu$ (μ – точное значение) существует корень $\theta = 1$, а в силу непрерывной зависимости при μ^0 достаточно близком к μ существует корень θ^0 , близкий к $\theta = 1$. Величина θ^0 может быть определена конструктивно в результате численного или аналитического интегрирования задач Коши (2.1) и вычисления определителя $\Delta^0(t, \lambda)$ согласно (2.2).

Из вышеизложенного следует, что в качестве естественной меры близости начального приближения значения μ^0 к μ можно ввести величину ε :

$$\varepsilon = 1 - \theta^0, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \theta^0 = \arg \min_j |1 - \theta_j^0|, \quad \theta_j^0(\lambda) = \text{Arg} \Delta^0(\theta, \lambda) \quad (2.3)$$

Корни θ_j^0 (2.3) уравнения $\Delta^0 = 0$ (2.2) имеет смысл отыскивать в окрестности $\theta = 1$, $\theta \gtrsim 1$, что предполагает гладкую продолжимость функции r при $\theta > 1$. Свойства функции $\Delta^0(t, \lambda)$ устанавливаются с помощью численного эксперимента. Отметим, что при $\mu^0 + r > 0$ искомая величина θ^0 есть m -ый положительный корень. Однако в прикладных задачах функция r знакопеременна и, кроме того, искомое λ отвечает $\mu = 0$. Это затрудняет использование выводов из теорем сравнения Штурма [4] и требует тщательного численного исследования функции Δ^0 при определении величины θ^0 согласно (2.3).

Используя методы теории возмущений [3–5, 9], рассмотрим вопрос о локальном поведении μ при изменении длины интервала $0 \leq t \leq \theta$ вблизи значения $\theta = 1$. С помощью описанного ранее подхода [9] получим (λ – фиксированное число)

$$\mu = \mu^0 + \varepsilon M^0 + O(\varepsilon^2)$$

$$M^0 = -(\dot{V}_0^2(\theta^0, \lambda) + (\mu^0(\lambda) + r(\theta^0, \lambda))V_0^2(\theta^0, \lambda)) \|V_0\|^{-2} \quad (2.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu - \mu^0}{\varepsilon} = \mu'_\theta(\lambda) \Big|_{\theta=1} = -(\dot{U}^2(1, \lambda) + (\mu(\lambda) + r(1, \lambda))U^2(1, \lambda)) \|U\|^{-2}$$

Здесь $\|V_0\|^2, \|U\|^2$ – квадрат нормы функций V_0 и U , определяемый обычным образом.

Из (2.4) следует, что в ситуации общего положения, когда $M^0 \neq 0$, справедливы неравенства

$$|\varepsilon| \leq C_\mu |\mu - \mu^0|, \quad |\mu - \mu^0| \leq C_\varepsilon |\varepsilon|, \quad C_{\mu, \varepsilon} > 0 \quad (2.5)$$

Будем считать далее, что искомое значение θ^0 найдено. В ситуации общего положения оно является простым, т.е. $\Delta^0(\theta^0(\lambda), \lambda) \neq 0$. Ранг указанной выше матрицы тогда равен единице, а искомое решение V_0 (2.1) можно представить в двух эквива-

лентных формах

$$\begin{aligned} V_0(t, \lambda) &= C_1[V_1(t, \lambda) + (1 - \dot{V}_1(\theta^0, \lambda))\dot{V}_2^{-1}(\theta^0, \lambda)V_2(t, \lambda)] = \\ &= C_2[(1 - V_2(\theta^0, \lambda))V_1^{-1}(\theta^0, \lambda)V_1(t, \lambda) + V_2(t, \lambda)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $C_{1,2}$ – произвольные постоянные, которые можно выбрать из условия нормировки $\|V_0\|^2 = 1$. Оба выражения (2.6) удовлетворяют смешанным краевым условиям периодичности на интервале $0 \leq t \leq \theta^0$, что устанавливается непосредственно с учетом определения θ^0 (2.3).

В критической ситуации, когда θ^0 – кратный корень, т.е. $\Delta^0(\theta^0(\lambda), \lambda) = 0$, ранг матрицы равен единице или нулю. Во втором случае решение V_0 (2.1), удовлетворяющее краевым условиям, содержит две произвольные постоянные C_1, C_2 . Такая ситуация имеет место, в частности, при $r = \text{const}$ (уравнения Матье, Мейснера или Хилла при $\delta = 0$) и, возможно, в других случаях уравнений, эквивалентных уравнению с постоянными коэффициентами. Для функции V_0 в (2.4) подставляется одно из решений (при $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$); в общем случае имеет место расщепление собственного значения.

Будем рассматривать конструктивно построенное решение (2.1) – (2.3), (2.6) краевой задачи на интервале $0 \leq t \leq \theta^0$ как приближенное решение исходной задачи (1.6). Используем его для вычисления уточненного с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ значения μ согласно (2.4)

$$\mu^{(1)}(\lambda) = \mu^0(\lambda) + \varepsilon M^0(\lambda), \quad |\mu^{(1)}(\lambda) - \mu(\lambda)| \leq C_\varepsilon \varepsilon^2 \quad (2.7)$$

$$M^0(\lambda) = -[\dot{V}_0^2(\theta^0, \lambda) + (\mu^0(\lambda) + r(\theta^0, \lambda))V_0^2(\theta^0, \lambda)] \|V_0\|^{-2}$$

Без потери точности по степеням малого параметра ε в выражении $M^0(\lambda)$ (2.7) можно положить $\theta^0 = 1$, поскольку $1 - \theta^0 = \varepsilon$. На основе уточненного значения $\mu^{(1)}(\lambda)$ строится общее решение $V_0^{(1)}$ задачи Коши (2.1) и из условий (2.2), (2.3) находится величина $\theta^{(1)}$, которая определяет величину $\varepsilon^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 1 - \theta^{(1)}(\lambda)$, причем согласно (2.5), (2.7) $|\varepsilon^{(1)}| \leq C_\mu C_\varepsilon \varepsilon^2$. Построенное в результате решение считается приближенным для исходной задачи (1.6) с точностью $O(\varepsilon^2)$. Эта простая процедура уточнения решения может быть продолжена в форме рекуррентного алгоритма [10]

$$\mu^{(k+1)}(\lambda) = \mu^{(k)}(\lambda) + \varepsilon^{(k)} M^{(k)}(\lambda), \quad \varepsilon^{(k)} = 1 - \theta^{(k)}(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$M^{(k)}(\lambda) = -[\dot{V}_0^{(k)2}(\theta^{(k)}, \lambda) + (\mu^{(k)}(\lambda) + r(\theta^{(k)}, \lambda))V_0^{(k)2}(\theta^{(k)}, \lambda)] \|V_0^{(k)}\|^{-2} \quad (2.8)$$

$$\theta^{(k)} = \arg \min_j |1 - \theta_j^{(k)}|, \quad \theta_j^{(k)}(\lambda) = \text{Arg } \Delta^{(k)}(\theta, \lambda)$$

$$|\mu^{(k+1)}(\lambda) - \mu(\lambda)| \leq C_\varepsilon \varepsilon^{(k)2}(\lambda), \quad |\varepsilon^{(k)}| \leq C^{-1}(\varepsilon C)^{\eta(k)}, \quad \eta(k) = 2^k$$

$$|V_0^{(k)} - U| + |\dot{V}_0^{(k)} - \dot{U}| \leq C_U \varepsilon^{(k)}, \quad C_U \sim 1, \quad C = C_\varepsilon C_\mu \sim 1, \quad |\varepsilon| \leq 1$$

Алгоритм (2.1), (2.2), (2.6), (2.8) обладает свойством ускоренной (квадратичной) сходимости по параметру ε . Две-три итерации по k позволяют построить практически точное решение $\mu(\lambda)$, $U(t, \mu, \lambda)$ вспомогательной задачи (1.6) при $|\varepsilon C| \sim 0,1$.

Таким образом, с помощью эффективного численно-аналитического метода ускоренной сходимости построено решение классической периодической краевой задачи (1.6) для любого допустимого значения λ . Рекуррентный алгоритм заключается в последовательном уточнении значения $\mu^{(k+1)}(\lambda)$ (2.8) на основе известной оценки

$\mu^{(k)}(\lambda)$, численном или аналитическом интегрировании двух задач Коши (2.1) $V_{1,2}^{(k+1)}$ и определении корня $\theta^{(k+1)}(\lambda)$, ближайшего к $\theta = 1$. Наряду с интегрированием и вычислением решения краевой задачи $V_0^{(k+1)}(t, \lambda)$ требуется вычисление квадрата нормы. Эта операция может быть осуществлена высокоточным методом численного интегрирования, например, методом Симпсона или в процессе интегрирования задач Коши, вычисления определителя и определения величины $\theta^{(k+1)}(\lambda)$. Известно [10], что квадрат нормы $\|V_0\|^2$ можно представить в конечном виде с помощью функции $W(t, \lambda)$:

$$\|V_0\|^2 = \int_0^{\theta} V_0^2 dt = \dot{V}_0(\theta, \lambda)W(\theta, \lambda) - V_0(\theta, \lambda)\dot{W}(\theta, \lambda) \quad (2.9)$$

$$\ddot{W} + [\mu(\lambda) + r(t, \lambda)]W = -V_0(t, \lambda), \quad W(0) = \dot{W}(0) = 0$$

Рассмотрим теперь исходную обобщенную задачу (1.1), решение которой может быть найдено численным или численно-графическим методом на основе решений вспомогательной задачи (1.6) для достаточно плотного множества значений $\lambda \in \Lambda$.

3. Решение обобщенной периодической задачи. Для построения искомой функции $\mu(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ используем методику продолжения по параметру. Найденное значение μ используем в качестве начального приближения μ^0 для $\lambda + \delta\lambda$, где добавка $\delta\lambda$ достаточно мала, что устанавливается в результате численного эксперимента из условия сходимости изложенного выше алгоритма. Знак добавки $\delta\lambda$ следует выбирать из условия уменьшения $|\mu|$:

$$\text{sign } \delta\lambda = -\text{sign } \mu'(\lambda)\mu(\lambda), \quad \mu'(\lambda) = \frac{1}{\|U\|^2} \int_0^1 r'_\lambda(t, \lambda)U^2 dt \quad (3.1)$$

Величина и знак производной $\mu'(\lambda)$ в (3.1) определяются с помощью известного решения при заданном ранее значении λ . Процедура продолжения по параметру λ выполняется до достижения значения $\mu(\lambda) = 0$ и определения соответствующего λ . Естественно предположить, что $\mu'(\lambda) \neq 0$ в окрестности рассматриваемых значений λ . При $\mu(\lambda) = 0$ требуется дополнительное исследование поведения функции $\mu(\lambda)$ и определение возможности существования других нулей, т.е. других собственных значений λ .

В результате получим численно-аналитическую методику построения искомого решения $\lambda, u(t)$ исходной обобщенной периодической краевой задачи (1.1) на основе решения семейства решений $\mu(\lambda), U(t, \mu, \lambda)$ классических периодических краевых задач типа задачи Хилла.

Отметим, что в качестве начального приближения $\mu^0(\lambda + \delta\lambda)$ целесообразно взять величину, приводящую к погрешности $O(\delta\lambda^2)$:

$$\mu^0(\lambda + \delta\lambda) = \mu(\lambda) + \mu'(\lambda)\delta\lambda, \quad \text{sign}(\mu'\delta\lambda) = -\text{sign}\mu \quad (3.2)$$

где величина $\mu'(\lambda)$ определена согласно (3.1).

С помощью изложенной выше схемы уточнения $\mu(\lambda)$, выражения (3.1) для $\mu'(\lambda)$ и приближенного соотношения (3.2) может быть реализована процедура уточнения искомого значения λ , основанная на рекуррентной формуле ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \left[\epsilon^{(k)}(\lambda^{(k)})M^{(k)}(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)}) + \mu^{(k)}(\lambda^{(k)}) \right] / \mu^{(k)'}(\lambda^{(k)}) \quad (3.3)$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda^0, \quad \mu(\lambda^0) = O(\epsilon); \quad \mu^{(k)}(\lambda^{(k)}) = O(\epsilon^{(k)})$$

Здесь λ^0 — известное начальное приближение $\lambda \in \Lambda$, выбираемое из дополнительных соображений с помощью вариационных или других методов (см. выше) и обеспечивающее ϵ -малость величины $\mu(\lambda^0)$. Согласно (3.3) имеет место аналогичная (2.8) ускоренная сходимость $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda$, позволяющая весьма эффективно строить искомое решение $\lambda, u(t)$ задачи (1.1).

Следует, однако, отметить, что изложенная схема построения решения обобщенной задачи может приводить к излишним вычислениям, связанным с построением вспомогательной функции $\mu(\lambda)$ в, возможно, весьма широкой области допустимых значений $\lambda \in \Lambda$. Эта процедура существенно упрощается, если использовать метод ускоренной сходимости для непосредственного уточнения некоторой оценки λ^0 , приводящей к малому значению параметра ε :

$$\varepsilon = 1 - \theta^0, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \theta^0 = \arg \min_j |1 - \theta_j^0|, \quad \theta_j^0 = \underset{\theta}{\text{Arg}} \Delta(\theta, \lambda^0) \quad (3.4)$$

$$\Delta(t, \lambda^0) = \dot{v}_1(t, \lambda^0) + v_2(t, \lambda^0) - 2$$

$$\ddot{v} + r(t, \lambda^0)v = 0; \quad 1) v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 1; \quad 2) v(0) = 1, \quad \dot{v}(0) = 0$$

Решение $v_0(t, \lambda^0)$, удовлетворяющее условиям периодичности на интервале $0 \leq t \leq \theta^0$, в случае простого корня θ^0 определяется с помощью частных решений v_1, v_2 (3.4) аналогично (2.6). В случае кратного корня решение может иметь вид $v_0 = C_1 v_1 + C_2 v_2$, см. выше. Уточнение значения λ проводится по следующей рекуррентной схеме:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \varepsilon^{(k)} L(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad \theta^{(k)} = \theta(\lambda^{(k)}) = \arg \min_j |1 - \theta_j^{(k)}|$$

$$\theta_j^{(k)} = \theta_j(\lambda^{(k)}) = \underset{\theta}{\text{Arg}} \Delta(\theta, \lambda^{(k)}), \quad \varepsilon^{(k)} = \varepsilon(\lambda^{(k)}) = 1 - \theta^{(k)}$$

$$L(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)}) = -[r(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)}) v_0^2(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)}) + \dot{v}_0^2(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)})] / N(\theta^{(k)}, \lambda^{(k)}) \quad (3.5)$$

$$N(\theta, \lambda) = \int_0^\theta r'_\lambda(t, \lambda) v_0^2(t, \lambda) dt = \dot{v}_0(\theta, \lambda) w(\theta, \lambda) - v_0(\theta, \lambda) \dot{w}(\theta, \lambda)$$

$$\ddot{w} + r(t, \lambda)w = -r'_\lambda(t, \lambda)v_0, \quad w(0) = \dot{w}(0) = 0, \quad N \neq 0$$

Предполагается, что "квадрат нормы" N (3.5) (см. выражение (1.5)) функции v_0 с весом r'_λ на интервале $0 \leq t \leq \theta$ отличен от нуля. В классическом случае, когда $r(t, \lambda) \equiv \lambda \rho(t) + q(t)$, где $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$, имеет место стандартное выражение для квадрата нормы с положительным весом $\rho(t)$. Отметим также, что в случае кратного корня $\theta^0 = \theta(\lambda^0)$ возможно расщепление собственного значения задачи λ в малой окрестности $\lambda = \lambda^0$.

При сделанных предположениях рекуррентная методика (3.4), (3.5) обладает свойством ускоренной (квадратичной) сходимости по отношению к малому параметру ε . В сочетании с процедурой продолжения по параметрам обобщенной задачи (1.1) она позволяет весьма эффективно решить ряд содержательных задач теории колебаний, устойчивости и математической физики. Алгоритм может быть протестирован численным решением модельных задач, например, вида (1.2), (1.3), для которых известно аналитическое решение [10].

Для практических расчетов весьма полезно следующее замечание. Если функция $r(t, \lambda)$ — четная по t , то из тождества $u(t) \equiv u^+(t) + u^-(t)$, где функция $u^+(t) = (u(t) + u(-t))/2$ — четное решение, а функция $u^-(t) = (u(t) - u(-t))/2$ — нечетное решение, следует, что периодическая краевая задача (1.1) разбивается на две обобщенные задачи типа Штурма–Лиувилля [11, 12], т.е. имеем

$$r(t, \lambda) \equiv r(-t, \lambda); \quad 1) u(0) = u(1) = 0; \quad 2) \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \quad (3.6)$$

Аналогичное утверждение справедливо для вспомогательной классической задачи (1.6).

4. Пространственные колебания динамически симметричного спутника. Следуя подходу [12], рассмотрим возмущенные плоские нелинейные колебания осесимметричного спутника (твердого тела), движущегося по круговой орбите. Экваториальная

ось остается приближенно ортогональной плоскости орбиты, а полярная ось совершает малые-угловые колебания относительно этой плоскости. Эти колебания в линейном приближении описываются уравнением типа Хилла с периодическим коэффициентом [12]

$$q'' + f(\psi, p_\psi, \alpha, k) \omega^{-2}(\alpha, k) q = 0, \quad f \equiv (p_\psi + 1)^2 - 3(\alpha - 1) \sin^2 \psi \quad (4.1)$$

Здесь штрихами обозначены производные по аргументу угловой переменной w , относительно которой функция f 2π -периодична. Угловая координата ψ и импульс p_ψ характеризуют указанные плоские колебания полярной оси. Они выражаются при помощи эллиптических функций Якоби sn , cn и полного эллиптического интеграла K первого рода [13, 14]

$$\psi = \arcsin\{k \operatorname{sn}(v, k)\}, \quad v = (2/\pi)K(k)w, \quad p_\psi = k\sqrt{3(\alpha - 1)} \operatorname{cn}(v, k) \quad (4.2)$$

$$\omega = (\pi/2)(3(\alpha - 1))^{1/2}/K(k), \quad k^2 = 2h_0(3(\alpha - 1))^{-1}, \quad 0 \leq k < 1$$

Здесь α ($1 \leq \alpha \leq 2$) – отношение полярного и экваториального моментов инерции в случае "сплюснутого" эллипсоида; в случае "вытянутого" эллипсоида ($0 \leq \alpha \leq 1$) в (4.2) совершается замена $\psi \rightarrow \psi + \pi/2$. Как и в [12], ограничимся изучением первого случая. Далее, модуль k эллиптических функций определяется через постоянную энергию h_0 колебаний спутника, которая должна быть достаточно малой: $2h_0 < 3(\alpha - 1)$. Если $2h > 3(\alpha - 1)$, то тело совершает вращения [12], которые могут быть исследованы аналогичным образом. Согласно (4.2) модуль k определяет амплитуду ψ_0 плоских колебаний: $\psi_0 = \arcsin k$, $0 \leq \psi_0 < \pi/2$.

Таким образом, уравнение (4.1) содержит два независимых параметра: α и h_0 . Для приложений представляет интерес построение периодических решений, т.е. определение значений параметров, допускающих существование указанных решений. В механическом аспекте более наглядными оказываются параметры α и ψ_0 . Требуется определить зависимости $\alpha(\psi_0)$ (или $\psi_0(\alpha)$), для которых периодические решения существуют [12].

Для применения изложенного в разд. 3 метода ускоренной сходимости удобнее ввести параметры $\lambda = (3(\alpha - 1))^{-1/2}$ и k с учетом ограничений $\lambda \geq 3^{-1/2} \approx 0,577$, $0 \leq k < 1$ и безразмерное время $t = w/2\pi$, по отношению к которому коэффициент уравнения (4.1) имеет период, равный единице. В результате указанных преобразований приходим к следующей обобщенной периодической задаче вида (1.1):

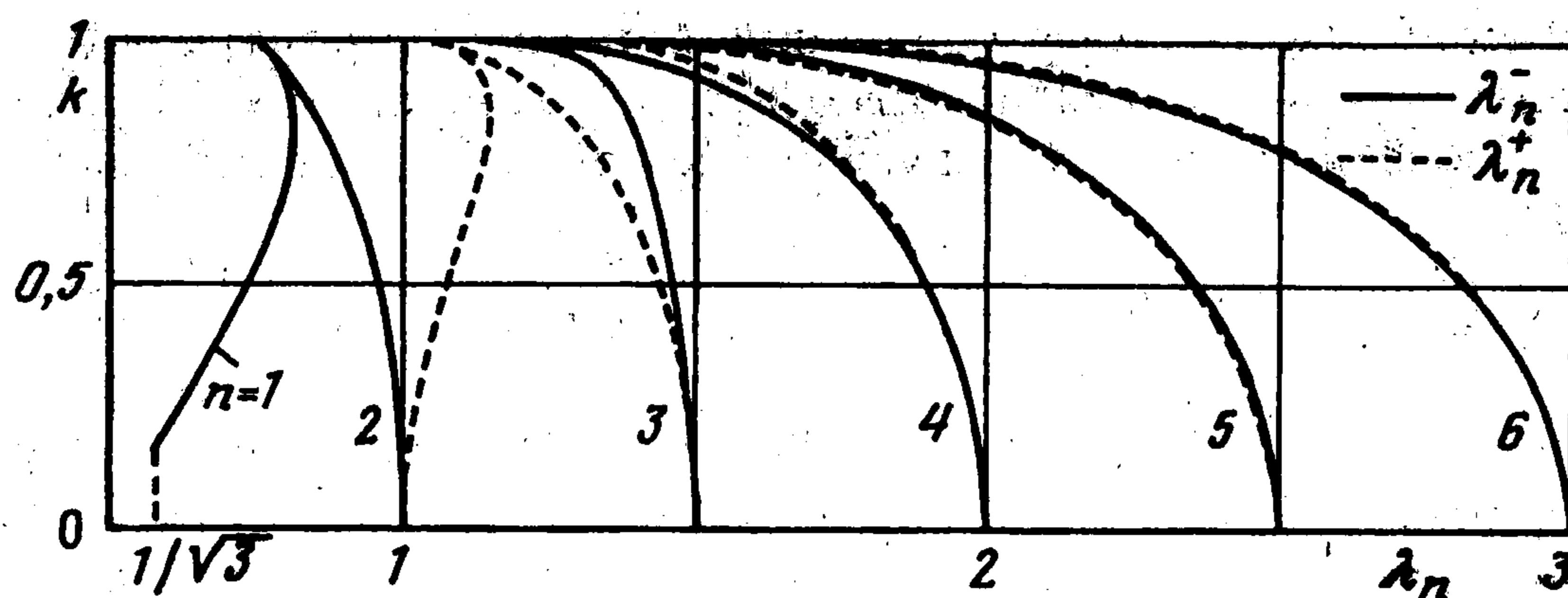
$$\ddot{q} + 16K^2(k)[(\lambda + k \cos \phi)^2 - k^2 \sin^2 \phi]q = 0, \quad q(t+1) \equiv q(t) \quad (4.3)$$

$$\dot{\phi} = 4K(k)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad \phi(0) = 0, \quad 3^{-1/2} \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq k < 1$$

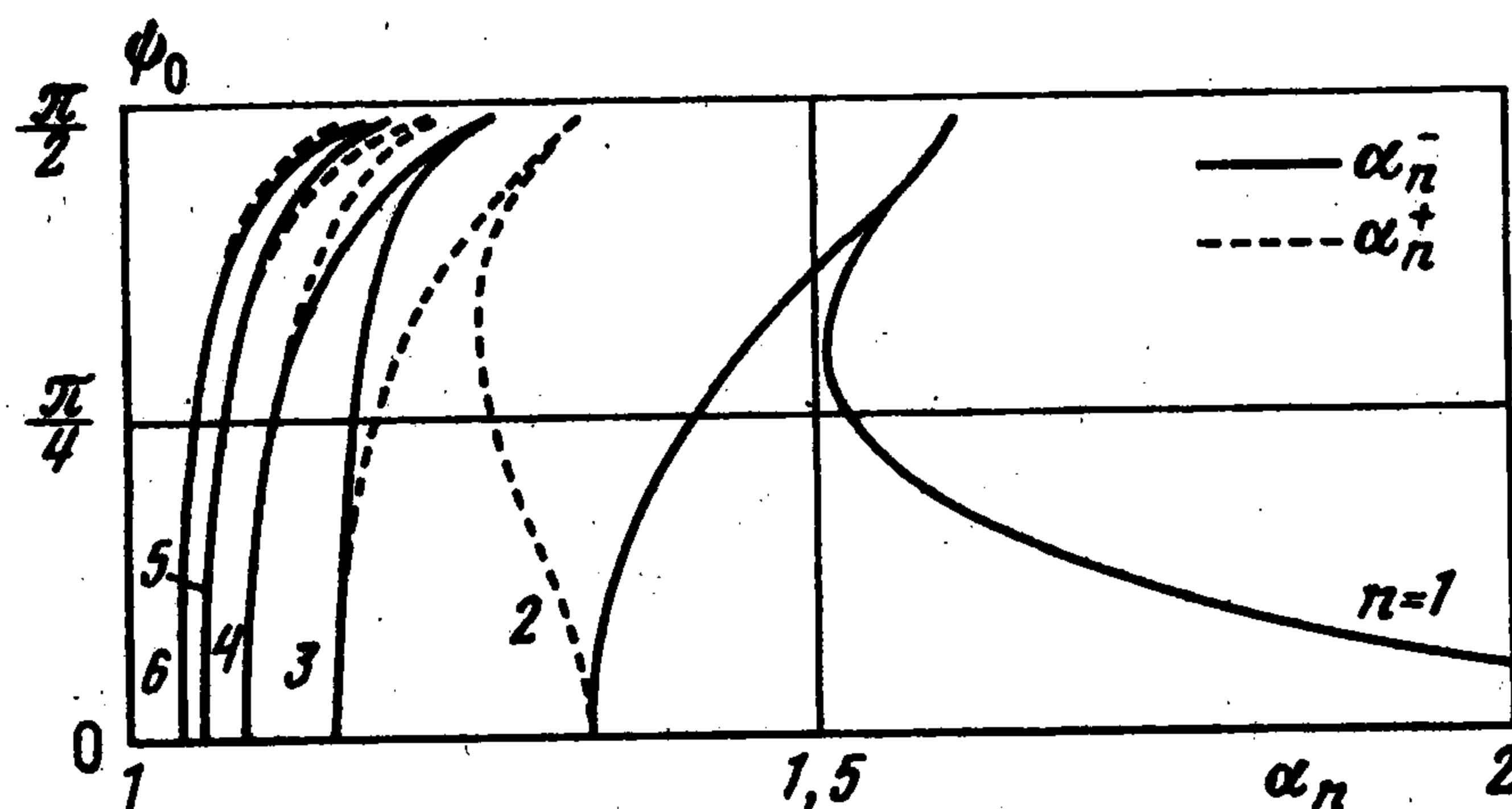
Отметим, что при малых значениях k , когда можно пренебречь слагаемыми $O(k^2)$, первое уравнение (4.3) приводится к виду уравнения Матье ($\lambda^2 \rightarrow \lambda$, $\lambda k \rightarrow \gamma$). Независимое численное интегрирование уравнения для ϕ позволяет существенным образом упростить расчет коэффициента перед q , который определяется через эллиптические функции Якоби, т.е. тригонометрическими рядами [13, 14]. Далее, полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ при $0 \leq k^2 \leq 0,99$ предпочтительно вычислять с помощью квадратуры согласно определению, а при $0,99 < k^2 < 1$ весьма удобно использовать асимптотику [14]

$$K(k) = \kappa + \frac{1}{4}(\kappa - 1)k'^2 + \frac{9}{64}\left(\kappa - \frac{7}{6}\right)k'^4 + \frac{25}{256}\left(\kappa - \frac{37}{30}\right)k'^6 + O(k'^8), \quad (4.4)$$

$$\kappa = \ln(4/k'), \quad k'^2 = 1 - k^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Представление (4.4) приводит к малой погрешности порядка $k'^8 \approx 10^{-8}$ при $k'^2 \leq 10^{-2}$. Отметим, что уравнение (4.3) при $k^2 \rightarrow 1$ обладает особенностью, поскольку $K(k) \rightarrow \infty$. Этот случай требует асимптотического анализа (см. далее).

Поскольку коэффициент $r(t, \lambda, k)$ перед q в уравнении (4.3) есть симметричная функция t , то согласно (3.6) построение решения обобщенной периодической задачи сводится к двум обобщенным задачам типа Штурма–Лиувилля: 1) задачи первого рода для нечетной функции q^- и 2) задачи второго рода для четной функции q^+ , т.е.

$$1) \quad q^-(0) = q^-(1) = 0, \quad \lambda = \lambda_n^-(k), \quad \lambda_n^-(0) = n/2$$

$$q_n^-(t, k) = q^-(t, \lambda_n^-(k), k), \quad q_n^-(t, 0) = (n\pi)^{-1} \sin n\pi t \quad (4.5)$$

$$2) \quad \dot{q}^+(0) = \dot{q}^+(1) = 0, \quad \lambda = \lambda_n^+(k), \quad \lambda_n^+(0) = n/2$$

$$q_n^+(t, k) = q^+(t, \lambda_n^+(k), k), \quad q_n^+(t, 0) = \cos n\pi t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для значений $k > 0$ ($0 \leq k^2 \leq 0,999$) применяется процедура продолжения по параметру k и схема метода ускоренной сходимости, изложенная в разд. 3. Вычисление коэффициента N (3.5) проводится совместным интегрированием уравнения $\dot{N} = r'_\lambda(t, \lambda, k)q^2$ для каждого n и указанным в (4.5) ветвям решений. Соответствующие высокоточные расчеты $\lambda_n^\pm(k)$ представлены на фиг. 1 для $n = 1, 2, \dots, 6$. Следует отметить, что $\lambda_1^+(k) \leq 1/2$. Это приводит к физически нереализуемым значениям $\lambda_1^+(\alpha_1^+ > 2)$. Часть ветви $\lambda_1^-(k)$ при $0 \leq k \leq 0,15$ также приводит к физически нереализуемым значениям $\lambda_1^-(\alpha_1^- > 2)$, однако при $k > 0,15$ значения $\lambda_1^+(k) > 0,577$, т.е.

$\alpha_1^- < 2$. Все остальные ветви резонансных кривых $\lambda_n^\pm$, $n \geq 2$ оказываются физически реализуемыми ($1 \leq \alpha_n^\pm < 2$) и имеют соответствующий порядок касания при $k = 0$.

В теоретическом и прикладном аспектах интересна асимптотика $\lambda_n^\pm(k)$ при $k \rightarrow 1$. Из вида коэффициента $r(t, \lambda, k)$ при $k \rightarrow 1$ и свойств эллиптических функций ($\operatorname{sn} \rightarrow 0$, $\operatorname{sn} \rightarrow 1$, $0 < t < 1/2$, $1/2 < t < 1$) с учетом (4.4) получим, что $\lambda_n^\pm(k) \rightarrow 1$. В отличие от классических кривых (см., например, диаграммы Айнса–Стретта [1–3], Гаупта [1]) четные и нечетные кривые чередуются парами.

Резонансные кривые $\alpha_n^\pm(\psi_0)$ для имеющих более наглядное механическое содержание параметров α , ψ_0 приведены на фиг. 2. Они получаются простым пересчетом по формулам $\alpha_n = 1 + (3\lambda_n^2)^{-1}$, $\psi_0 = \arcsin k$. Целесообразно представить оба набора резонансных кривых (фиг. 1, 2). Интересно отметить, что резонансная кривая $\alpha_1^-(\psi_0)$ при $\psi_0 \geq 0,16$ отсекает значительную часть области допустимых значений параметров α , ψ_0 . Из проведенного выше анализа следует, что $\alpha_n^\pm(\psi_0) \rightarrow 4/3$ при $\psi_0 \rightarrow \pi/2$. Кривые α_n^- , α_n^+ также чередуются парами.

Вопрос об устойчивости и неустойчивости колебаний спутника по отношению к пространственным возмущениям как в линейном приближении, так и в рамках полной нелинейной модели [12], требует дальнейшего обстоятельного изучения. Анализ линейных колебаний может быть эффективно проведен с помощью изложенного в разд. 3 метода ускоренной сходимости и методов теории устойчивости движений гамильтоновых систем.

Аналогично изложенному выше проводится расчет резонансных кривых $\lambda(k)$ или $\alpha(\psi_0)$ в случае вращений спутника ($2h_0 > 3(\alpha - 1)$). Приведенные результаты вычислений свидетельствуют о несомненной высокой эффективности метода ускоренной сходимости для решения сложных обобщенных периодических задач, недоступной другим известным подходам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Strutt M.J.O. Lamésche–Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik.* Berlin: Springer, 1932. 116 s. = *Стрэтт М.Д.О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике.* Харьков; Киев: Гостехиздат Украины, 1935. 238 с.
2. *McLachlan N.W. Theory and Application of Mathieu Functions.* Oxford: Clarendon Press, 1947. 401 p. = *Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье.* М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
3. *Blaquière A. Nonlinear System Analysis.* N.Y.; L.: Acad. Press, 1966. XV + 392 p. = *Блакьер О. Анализ нелинейных систем.* М.: Мир, 1969. 400 с.
4. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1965. 703 с.
5. *Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.* М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
6. *Magnus K. Schwingungen.* Stuttgart: Teubner, 1976. 251 s. = *Магнус К. Колебания.* М.: Мир, 1982. 303 с.
7. *Малкин И.Г. Теория устойчивости движения.* М.: Наука, 1966. 530 с.
8. *Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering.* Toronto et al.: Nostrand, 1955. 468 p. = *Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.* М.: Наука, 1967. 444 с.
9. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.*

10. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Метод ускоренной сходимости для решения периодической краевой задачи // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 56–68.
11. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
12. Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322–336.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.

Москва
e-mail: shmatkov @ ipmnet.ru

Поступила в редакцию
21.I.1999