

УДК 531.36

© 1999 г. В.И. Воротников

К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Усиливается ряд известных результатов, исходным пунктом в которых является теорема Ляпунова–Малкина об устойчивости и (одновременно) экспоненциальной асимптотической устойчивости по части переменных по линейному приближению в критических по Ляпунову случаях. А именно, сняты какие-либо дополнительные допущения (кроме допущения о непрерывности) на коэффициенты линейной части изучаемой нелинейной системы. Полученный результат распространяется на задачу полиустойчивости по части переменных. Также развивается метод сужения допустимой области изменения "неконтролируемых" переменных для изучения задач асимптотической устойчивости по части переменных. Рассматриваются примеры.

К настоящему времени большое число исследований посвящено задаче устойчивости по отношению не ко всем переменным, характеризующим состояние системы, а только к некоторой их *заданной части* [1, 2]. Такую задачу часто называют также задачей *частичной устойчивости* (partial stability). Определенное представление о состоянии данной проблемы можно составить, например, по работам [3–8], где приводится обширная библиография.

Задача частичной устойчивости тесно связана с другими интенсивно развиваемыми задачами устойчивости: по отношению к *двум мерам* [9–11] и по отношению к *заданным функциям состояния* [1, 12]. Кроме того, в последнее десятилетие выделились и стали изучаться задачи *полиустойчивости* (полиустойчивости по отношению к части переменных) [13, 14]; в этом случае различные группы фазовых переменных (или заданной части фазовых переменных) обладают различными видами устойчивости.

Ниже в рамках проблемы частичной устойчивости рассматриваются следующие задачи.

1°. *Задача экспоненциальной асимптотической у-устойчивости и (одновременно) равномерной устойчивости по Ляпунову невозмущенного движения $x = (y^T, z^T)^T = 0$ нелинейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения*

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0 \quad (0.1)$$

при достаточно общих допущениях относительно вектор-функции $X: R^{n+1} \rightarrow R^n$. При этом усиливается ряд известных результатов [3, 6, 8, 15, 16], основанных на теореме Ляпунова – Малкина [1, 17] об устойчивости по линейному приближению в критических по Ляпунову случаях. (Учитывая векторную запись системы (0.1) и последующих рассматриваемых систем дифференциальных уравнений, здесь и далее принимаем, что x, y, z – векторы-столбцы соответствующих размеров; t – знак транспонирования.)

Наряду с указанной задачей, которую можно трактовать как задачу полиустойчивости невозмущенного движения $x = 0$ системы (0.1), также рассматривается более общая задача полиустойчивости по отношению к части переменных.

2°. *Задача асимптотической у-устойчивости невозмущенного движения системы (0.1) без дополнительного предположения об устойчивости по Ляпунову этого движения. Развивается предложенный ранее [18] метод сужения допустимой области*

изменения "неконтролируемых" переменных для изучения задач асимптотической устойчивости по части переменных. В этом направлении модифицируются известные результаты [3, 19, 20], восходящие к теореме Марачкова [21].

1. Обобщение теоремы Ляпунова–Малкина. Учитывая отвечающее специфике задач частичной устойчивости разбиение фазового вектора системы на две части, представим систему (0.1) в виде двух групп уравнений

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)z + Y(t, y, z), \quad \dot{z} = C(t)y + D(t)z + Z(t, y, z) \quad (1.1)$$

Здесь A, B, C, D – матричные функции t соответствующих размеров, элементы которых являются непрерывными при $t \in [0, +\infty)$ функциями. Нелинейные возмущения Y, Z в области $t \geq 0, \|x\| \leq h = \text{const} > 0$ непрерывны и удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решений.

Обозначим $x(t; t_0, x_0)$ решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x_0 = x(t_0; t_0, x_0)$, и уточним изучаемое понятие полиустойчивости.

Определение 1 [3, 22]. Невозмущенное движение $y = 0, z = 0$ системы (1.1) *равномерно устойчиво по Ляпунову* и (одновременно) *экспоненциально асимптотически у-устойчиво*, если для любых значений $\varepsilon > 0, t_0 \geq 0$ найдутся числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\gamma > 0$, такие, что при $\|x_0\| < \delta$ для всех $t \geq t_0$ имеют место неравенства

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \exp[-\gamma(t - t_0)]$$

Предположим, что выполнены условия [3]

$$Y(t, 0, 0) \equiv Y(t, 0, z) \equiv 0, \quad Z(t, 0, 0) \equiv Z(t, 0, z) \equiv 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\|Y(t, y, z)\| + \|Z(t, y, z)\|}{\|y\|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|y\| + \|z\| \rightarrow 0$$

Теорема 1. Пусть нулевое решение линейной системы

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)z, \quad \dot{z} = C(t)y + D(t)z \quad (1.3)$$

равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически у-устойчиво. Тогда, при выполнении условий (1.2), этим же свойством устойчивости обладает и невозмущенное движение $y = 0, z = 0$ нелинейной системы (1.1).

Доказательство. При условиях теоремы для линейной системы (1.3) найдется V -функция Ляпунова, при всех $t \geq 0, \|x\| < \infty$ удовлетворяющая условиям [22]

$$\|y\| \leq V(t, x) \leq M \|x\|, \quad \dot{V}_{(1.3)}(t, x) \leq -\alpha V(t, x) \quad (1.4)$$

$$|V(t, x'') - V(t, x')| \leq M \|x'' - x'\| \quad (\alpha, M = \text{const} > 0) \quad (1.5)$$

Производная этой V -функции в силу нелинейной системы (1.1) выражается следующим образом:

$$\dot{V}_{(1.1)}(t, x) \leq -\alpha V(t, x) + R(t, x), \quad R = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} X^*(t, x), X^* \right\rangle, \quad X^* = (Y^T, Z^T)^T$$

где $\langle \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения.

В силу условий (1.2), (1.5), в области $t \geq 0, \|x\| \leq h$ справедлива оценка $|R(t, x)| \leq \varepsilon M \|y\|$, которую при учете первого из неравенств в (1.4) запишем в виде

$$|R(t, x)| \leq \varepsilon M V (\varepsilon = \text{const} \rightarrow 0 \text{ при } \|x\| \rightarrow 0)$$

Поэтому существует число $\beta (0 < \beta < h)$, такое, что в области $t \geq 0, \|x\| \leq \beta$

выполняется неравенство

$$\dot{V}_{(1.1)}(t, x) \leq -\alpha_1 V(t, x) \quad (\alpha_1 = \text{const} > 0) \quad (1.6)$$

Рассмотрим произвольное решение $x(t; t_0, x_0)$ системы (1.1) с начальными условиями из области

$$t_0 \geq 0, \quad \|x_0\| \leq \delta \quad (0 < \delta = \text{const} < \beta) \quad (1.7)$$

Для этого решения условие

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \beta \quad (1.8)$$

выполняется по крайней мере на некотором интервале $T = (t_0, t^*)$. Поэтому в силу неравенства (1.6) и первой группы неравенств (1.4) при $t \in T$ имеем

$$\|y(t; t_0, x_0)\| \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq M \|x_0\| \exp[-\alpha_1(t - t_0)] \quad (1.9)$$

Условия (1.2) и неравенство (1.9) позволяют получить оценку

$$\|X(t, x(t; t_0, x_0))\| \leq \alpha_2 \|x_0\| \exp[-\alpha_1(t - t_0)] \quad (1.10)$$

$$t \in T, \quad \alpha_2 = \text{const} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow 0$$

Решение $x(t; t_0, x_0)$ нелинейной системы (1.1) может быть представлено формулой Коши

$$x(t; t_0, x_0) = K(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau)X(\tau, x(\tau; t_0, x_0))d\tau \quad (1.11)$$

где $K(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$ – матрица Коши, а $U(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной системы (1.3).

В силу равномерной устойчивости по Ляпунову нулевого решения линейной системы (1.3), найдется $N = \text{const} > 0$, такое, что $|K(t, t_0)| \leq N$ при $t \geq t_0, t_0 \geq 0$. Поэтому из равенства (1.11), на основании оценки (1.10), следует соотношение

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq N(1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2)\|x_0\| \quad (1.12)$$

Пусть ε – сколь угодно малое число, $0 < \varepsilon < \beta$. Выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ в (1.7) столь малым, чтобы $\delta < \min \{M^{-1}, [N(1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2)]^{-1}\}\varepsilon$. В этом случае из соотношений (1.9) и (1.12) при $t \in T$ имеем

$$\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \exp[-\alpha_1(t - t_0)], \quad \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad (1.13)$$

Таким образом, на всем промежутке времени, в течение которого выполняется условие (1.8), имеют место неравенства (1.13). Поскольку $\varepsilon < \beta$, то неравенства (1.13) справедливы при всех $t > t_0$. Следовательно, невозмущенное движение $y = 0, z = 0$ нелинейной системы (1.1) равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически y -устойчиво.

Обсуждение теоремы 1. 1°. Теорема 1 является развитием результатов работ [3, 6, 8, 15–17]. Так, в [6, 8, 15, 17] матричные функции A, B, C, D не зависят от t ; при этом в [17] $B \equiv 0, D \equiv 0$ (все компоненты матриц B и D тождественно равны нулю), а в [15] $B \equiv 0$. В [3, 16] матричные функции A, C, D зависят от t , однако $B \equiv 0$ и, кроме того, все компоненты матричных функций A и C ограничены при $t \in [0, +\infty)$.

2°. Для случая $B \equiv 0$ в [3, 16] рассмотрен более общий класс Z -нелинейностей, а в [6, 8] – более общий класс Y -нелинейностей. Однако при этом в [6, 8] матричные функции A, C, D не зависят от t .

3°. Утверждение теоремы перестает быть верным, если устойчивость по Ляпунову нулевого решения линейной системы (1.3) не является равномерной. Это показывает пример Перрона [17, 23], построенный для случая $B \equiv 0, C \equiv 0$.

Условия (1.2), накладываемые на Y, Z , можно несколько ослабить.

Следствие. Теорема 1 справедлива и при наличии в системе (1.1) добавочных нелинейных членов Y^0, Z^0 , таких, что в области $t \geq 0, \|x\| \leq h$ выполняется условие $|Y^0(t, x)| + |Z^0(t, x)| \leq \gamma V$. Здесь V – функция Ляпунова для линейной системы (1.3), удовлетворяющая условиям (1.4), (1.5); γ – достаточно малая положительная постоянная.

Доказательство. Первая часть доказательства, включая оценку (1.10), сохраняется. Далее представим решение $x(t; t_0, x_0)$ рассматриваемой нелинейной системы формулой Коши. Используя оценки (1.9), (1.10) и неравенство $V(t, x) \leq M\|x\|$, имеем

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq N[(1 + \alpha_2 \alpha_3^{-1}) \|x_0\| + \gamma M \int_{t_0}^t \|x_0(\tau; t_0, x_0)\| d\tau]$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла–Беллмана [3], получаем соотношение

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq N(1 + \alpha_2 \alpha_3^{-1}) \|x_0\| \exp(\gamma M)$$

Доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 1.

Замечания. 1°. Ранее [3, 16] предполагалось, что $B \equiv 0, Y^0(t, x) \equiv 0$, однако были рассмотрены более общие условия для Z^0 .

2°. Если коэффициенты матричных функций A, B, C, D являются аналитическими при $t \in [0, +\infty)$, периодическими функциями, то доказательство теоремы 1 можно провести по схеме работ [6, 8]. При этом также можно несколько ослабить условия на нелинейные возмущения Y, Z . Однако схема [6, 8] не переносится на общий случай зависящих от t матричных функций A, B, C, D .

Пример 1. Уравнения углового движения твердого тела относительно центра масс под действием линейных моментов сил имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= L(t)x + X^*(x), \quad x = (y_1, y_2, z_1)^T \\ X^* &= [(J_2 - J_3)J_1^{-1}y_2\dot{z}_1, (J_3 - J_1)J_2^{-1}y_1\dot{z}_1, (J_1 - J_2)J_3^{-1}y_1y_2]^T \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь y_1, y_2, z_1 – проекции вектора x угловой скорости тела на главные центральные оси инерции; J_i – главные центральные моменты инерции; L – матрица размера 3×3 , элементы которой – непрерывные при $t \in [0, +\infty)$ функции, характеризующие действие на тело линейные моменты диссипативных и ускоряющих сил.

Пусть нулевое решение $x = (y_1, y_2, z_1)^T = 0$ линейной системы

$$\dot{x} = L(t)x \quad (1.15)$$

равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически (y_1, y_2) -устойчиво. Структура нелинейных членов в системе (1.14) такова, что для них выполнены условия (1.2). Поэтому на основании теоремы 1 заключаем, что указанным для линейной системы (1.15) свойством устойчивости также обладает и положение равновесия $x = (y_1, y_2, z_1)^T = 0$ нелинейной системы (1.14).

Заметим, что для системы (1.14) не выполнены все условия теоремы Ляпунова – Малкина в указанной работе [3, 6, 8, 15–17].

Пример 2. При достаточно общих допущениях движение голономной механической системы, находящейся под действием линейных, а также нелинейных сил общей природы, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = Q(t)x + P(t)\dot{x} + X^*(t, x, \dot{x}), \quad x = (y^T, z^T)^T \quad (1.16)$$

Считаем, что матричные функции Q и P непрерывны при $t \in [0, +\infty)$, а нелинейная вектор-функция X^* непрерывна в области $t \geq 0$; $\|x\| + \|\dot{x}\| \leq h$; причем для системы (1.16) выполнены условия теоремы существования и единственности решений.

Пусть положение равновесия $x = \dot{x} = 0$ линейной системы

$$\ddot{x} = Q(t)x + P(t)\dot{x} \quad (1.17)$$

равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически $(y, \dot{y})$ -устойчиво. Пусть, кроме того, структура нелинейных сил X^* такова, что выполняются условия

$$X^*(t, 0, 0) \equiv 0, \quad X^*(t, x, \dot{x}) \equiv 0 \text{ при } y = \dot{y} = 0 \quad (1.18)$$

$$\|X^*(t, x, \dot{x})\| [\|y\| + \|\dot{y}\|]^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } \|x\| + \|\dot{x}\| \rightarrow 0$$

Тогда на основании теоремы 1, указанным для линейной системы (1.17) свойством устойчивости также обладает и положение равновесия $x = \dot{x} = 0$ нелинейной системы (1.16).

Пусть, в частности, $\dim(x) = 2$ и система (1.16) имеет вид

$$\ddot{y}_1 = q_1 y_1 + q_2 \ddot{y}_1 + e^{-\alpha t} z_1 + p_2 \dot{z}_1 + Y_1(t, x, \dot{x}), \quad \ddot{z}_1 = p_1 \dot{z}_1 + Z_1(t, x, \dot{x}) \quad (1.19)$$

где q_i, p_i ($i = 1, 2$), α – некоторые постоянные. Если $q_i < 0, p_1 < 0, \alpha > 0$, то положение равновесия $y_1 = \dot{y}_1 = z_1 = \dot{z}_1 = 0$ линейной части системы (1.19) равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически $(y_1, \dot{y}_1)$ -устойчиво при любом p_2 . Если нелинейные силы Y_1 и Z_1 удовлетворяют условиям типа (1.18), то этим же свойством устойчивости обладает и положение равновесия самой нелинейной системы (1.19).

2. Частичная стабилизация стационарных движений твердого тела. В приложениях стабилизация стационарных движений твердого тела (космического аппарата) часто осуществляется посредством связанных с телом вращающихся масс: маховиков и (или) силовых гироскопов.

В процессе стабилизации указанные массы "принимают на себя" возмущения, появляющиеся в результате отклонения тела от заданного состояния [24–26].

Покажем, однако, что при проведении *частичной* (по части переменных) стабилизации стационарных движений твердого тела, достаточной во многих практически важных случаях, связанные с телом массы могут *только "переводить"* (не "принимая на себя") возмущения на неконтролируемую при стабилизации часть переменных.

Пусть имеем асимметричное твердое тело, вдоль одной из главных центральных осей инерции которого закреплена ось вращения однородного симметричного маховика. Угловое движение этой системы (гиростата) вокруг центра масс описывается уравнениями [25]

$$(J_1 - A_1)\dot{x}_1 = (J_2 - J_3)x_2x_3 - u_1, \quad J_2\dot{x}_2 = (J_3 - J_1)x_1x_3 - A_1x_3\dot{\phi} \\ J_3\dot{x}_3 = (J_1 - J_2)x_1x_2 + A_1x_2\dot{\phi}, \quad A_1(\ddot{\phi} + \dot{x}_1) = u_1 \quad (2.1)$$

Здесь J_i – главные центральные моменты инерции гиростата; x_i – проекции вектора угловой скорости основного тела на главные центральные оси s_i инерции гиростата; $A_1, \dot{\phi}$ – осевой момент инерции и угловая скорость собственного вращения маховика; u_1 – управляющий момент, приложенный к маховику.

Уравнения (2.1) допускают решение

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \omega = \text{const} > 0, \quad \dot{\phi} = 0, \quad u_1 = 0 \quad (2.2)$$

соответствующее перманентному вращению ("закрутке") основного тела гиростата с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси s_3 . При этом маховик, ось вращения которого закреплена вдоль оси s_1 , неподвижен относительно основного тела, а направление вектора K кинетического момента гиростата совпадает с направлением оси s_3 .

Вводя новые переменные $y_j = x_j$ ($j = 1, 2$), $y_3 = \phi$, $z_1 = x_3 - \omega$, составим систему в отклонениях от решения (2.2).

$$\begin{aligned}(J_1 - A_1)y_1 &= (J_2 - J_3)y_2(z_1 + \omega) - u_1, & J_2 y_2 &= [(J_3 - J_1)y_1 - A_1 y_3](z_1 + \omega) \\ (J_1 - A_1)\dot{y}_3 &= (J_3 - J_2)y_2(z_1 + \omega) + J_1 A_1^{-1} u_1 \\ J_3 \dot{z}_1 &= [(J_1 - J_2)y_1 + A_1 y_3]y_2\end{aligned}\quad (2.3)$$

Рассмотрим задачу *частичной* стабилизации невозмущенного движения $y = (y_1, y_2, y_3)^T = 0$, $z_1 = 0$ системы (2.3): y -стабилизацию посредством управления u_1 . При этом стабилизация по y_1, y_2 означает гашение малых прецессионных и нутационных колебаний вектора K кинетического момента гиростата по отношению к связанным с телом осям s_i . Дополнительная стабилизация по y_3 означает, что в процессе стабилизации по y_1, y_2 маховик лишь "переводит" малые возмущения в "дополнительное вращение" гиростата вокруг оси вращения s_3 .

Утверждение. При $J_2 \neq J_3$ решение задачи y -стабилизации невозмущенного движения $y = 0$, $z_1 = 0$ системы (2.3) дает закон управления

$$u_1 = Ky \quad (2.4)$$

где K — некоторый постоянный вектор-строка размера 1×3 .

Доказательство. Рассмотрим линейную подсистему, описывающую поведение y -переменных линейной части системы (2.3). При $J_2 \neq J_3$ эта подсистема полностью управляема [27]. Поэтому коэффициенты вектора K в выражении (2.4) можно выбрать так, что нулевое решение $y = 0$, $z_1 = 0$ нелинейной части системы (2.3) будет равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически y -устойчиво.

Правые части системы (2.3) обращаются в нуль при $y = 0$. Поэтому, на основании теоремы 1, указанным для линейной части системы (2.3) свойством устойчивости обладает и невозмущенное движение $y = 0$, $z_1 = 0$ нелинейной системы (2.3).

Замечания. 1°. Рассмотренная задача представляет интерес в динамике космических аппаратов, где важно обеспечить "закрутку" аппарата вокруг одной из главных центральных осей инерции (как правило — *большой*) [24, 28].

2°. Технически реализация закона управления (2.4) сводится к следующему. Пока гиростат совершает заданное движение (2.2), маховик находится в состоянии покоя (управляющий двигатель выключен). При появлении малых возмущений специальные устройства формируют и прикладывают к маховику управляющий момент (2.4). В результате основное тело гиростата с течением времени возвращается в исходный режим стационарного вращения, а сам маховик — в состояние покоя.

3. Условие полиустойчивости по части переменных. Сохраняя уже введенные обозначения, рассмотрим более общую, чем (1.1), нелинейную систему уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned}\dot{y} &= A(t)y + B(t)z + Y(t, y, z, w), & \dot{z} &= C(t)y + D(t)z + Z(t, y, z, w) \\ \dot{w} &= W(t, y, z, w)\end{aligned}\quad (3.1)$$

Допустим, что в области

$$t \geq 0, \quad \|x\| \leq h, \quad \|w\| < \infty \quad (3.2)$$

где $x = (y^T, z^T)^T$, правые части системы (3.1) непрерывны и удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решений. Кроме того, считаем, что решения системы (3.1) w -продолжимы [3, 29], т.е. определены для всех $t \geq 0$, при которых $\|x\| \leq h$.

Уточним изучаемое понятие полиустойчивости по части переменных.

Определение 2. Невозмущенное движение $y = 0, z = 0, w = 0$ системы (3.1) равномерно (y, z) -устойчиво и (одновременно) экспоненциально асимптотически y -устойчиво, если для любых значений $\varepsilon > 0, t_0 \geq 0$ найдутся числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\gamma > 0$, такие, что при $\|x_0\| + \|w_0\| < \delta$ для всех $t \geq t_0$ имеют место неравенства

$$\|x(t, t_0, x_0, w_0)\| < \varepsilon, \quad \|y(t, t_0, x_0, w_0)\| < \varepsilon \exp[-\gamma(t - t_0)]$$

Пусть в области (3.2) выполнены условия

$$Y(t, 0, 0, 0) \equiv Y(t, 0, z, w) \equiv 0$$

$$Z(t, 0, 0, 0) \equiv Z(t, 0, z, w) \equiv 0, \quad W(t, 0, 0, 0) \equiv 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\|y(t, y, z, w)\| + \|Z(t, y, z, w)\|}{\|y\|} \rightarrow 0 \quad \text{при } \|y\| + \|z\| \rightarrow 0$$

Теорема 2. Пусть нулевое решение линейной системы (1.3) равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически y -устойчиво. Тогда, при выполнении условий (3.3), невозмущенное движение $y = 0, z = 0, w = 0$ нелинейной системы (3.1) равномерно (y, z) -устойчиво и (одновременно) экспоненциально асимптотически y -устойчиво.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Обсуждение теоремы 2. 1°. Теорема 2 является развитием результата работы [15], где $B \equiv 0$, а матрицы A, C и D – постоянны.

2°. Последнее из условий (3.3) легко проверяется, если известна заранее равномерная w -ограниченность решений системы (3.1), начинающихся в достаточно малой окрестности невозмущенного движения.

3°. Условия теоремы 2 определяют условия полиустойчивости по части переменных невозмущенного движения системы (3.1): условия (y, z) -полиустойчивости.

4. Метод сужения допустимой области изменения "неконтролируемых" переменных для изучения задач частичной устойчивости. Для решения задач частичной устойчивости часто используется метод функций Ляпунова в соответствующей модификации. Одна из таких модификаций [18] сводится к корректировке структуры области, в которой происходит построение функций Ляпунова. А именно, сужается обычно рассматриваемая при изучении y -устойчивости положения $x = (y^T, z^T)^T = 0$ системы (0.1) область

$$t \geq 0, \quad \|y\| \leq h, \quad \|z\| < \infty \quad (4.1)$$

где h – достаточно малое положительное число. Она заменяется областью

$$t \geq 0, \quad \|y\| + \|W(t, x)\| \leq h, \quad \|z\| < \infty \quad (4.2)$$

где $W(t, x)$ – некоторая вектор-функция, зависящая от t и фазовых переменных системы (0.1). Естественно, что в данном случае введенное допущение $\|y\| + \|W(t, x)\| \leq h$ должно подтверждаться в процессе решения задачи.

Целесообразность изучения задачи y -устойчивости в области (4.2) объясняется тем, что y -устойчивое положение $x = (y^T, z^T)^T = 0$ системы (0.1) всегда фактически устойчиво не только по y , но также и по отношению к некоторым функциям $W_i = W_i(t, x)$. Однако заранее не всегда ясно, какие именно это W_i -функции. В такой ситуации подобные W_i -функции естественно трактовать как дополнительную, векторную W -функцию Ляпунова для наиболее рациональной замены области (4.1) областью (4.2). При этом не требуется анализировать производную W -функции вдоль траекторий системы (0.1), что является дополнительным аргументом в пользу указанного подхода.

Такой подход позволяет не только облегчить построение функций Ляпунова с подходящими свойствами, но и использовать для доказательства у-устойчивости функции, которые уже в случае $\dim(y) = \dim(z) = 1$ могут не быть [18] знакоопределенными ни по y (в смысле В.В. Румянцева [2, 3]), ни по Ляпунову [1].

Применим указанный метод сужения области изменения "неконтролируемых" переменных для модификации условий асимптотической устойчивости по части переменных [3].

Введем обычные для теории устойчивости по части переменных предположения [3, 29] о непрерывности системы (0.1) в области (4.1), а также о единственности и z -продолжимости ее решений. Также будем рассматривать два класса функций: 1) функции $a_i(r): R^1 \rightarrow R^1$ ($i = 1, 2, 3$) – непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in [0, h]$, такие, что $a_i(0) = 0$; 2) скалярную $V(t, x): R^{n+1} \rightarrow R^1$, $n = \dim(x)$, $V(t, 0) \equiv 0$ и векторные $W(t, x): R^{n+1} \rightarrow R^q$, $W(t, 0) \equiv 0$, $U(t, x): R^{n+1} \rightarrow R^s$, $U(t, 0) \equiv 0$ функции; $q, s > 0$ – некоторые числа, назначаемые в зависимости от конкретной решаемой задачи.

Теорема 3. Пусть существует скалярная V и две векторных U, W функции, такие, что в области (4.2) справедливы условия:

$$1) V(t, x) \geq a_1(\|y\| + \|W(t, x)\|);$$

$$2) \dot{V}(t, x) \leq -a_2(\|U(t, x)\|);$$

$$3) \|U(t, x)\| \geq a_3(\|y\|);$$

4) найдется число $M(t_0, x_0) > 0$, такое, что для каждой из функций $\dot{U}_i$ либо $\dot{U}_i \leq M$, либо $\dot{U}_i \geq -M$.

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (0.1) асимптотически у-устойчиво.

Доказательство. При выполнении условий 1 и 2 невозмущенное движение $x = 0$ системы (0.1) у-устойчиво [2, 18]. При этом для любого $t_0 \geq 0$ найдется $\Delta(t_0)$, $0 < \Delta < \delta$, такое, что

$$\|y(t; t_0, x_0)\| + \|W(t; t_0, x_0)\| < h, t \geq t_0 \text{ при } \|x_0\| < \Delta$$

Покажем, что при $\|x_0\| < \Delta$ также имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t, x(t; t_0, x_0))\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

Используя схему работ [3, 19–21], допустим противное: пусть существует число $l > 0$, значение x_* с $\|x_*\| < \Delta$ и последовательность $t_k \rightarrow \infty$, $t_k - t_{k-1} \geq \alpha > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), для которых

$$\|U(t_k, x(t_k; t_0, x_*))\| \geq l, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

При выполнении условия 4 можно указать число β ($0 < \beta < \alpha$), такое, что при $\|x_*\| < \Delta$ и всех $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\frac{1}{2}l \leq \|U(t, x(t; t_0, x_*))\| \leq h, \quad t \in T_k = [t_k - \beta, t_k + \beta] \quad (4.5)$$

Тогда при $\|x_*\| < \Delta$, на основании (4.5), вдоль решений $x = x(t; t_0, x_*)$ справедливы неравенства

$$\dot{V}(t, x) \leq -a_2(\|U\|) \leq -a_2(\frac{1}{2}l), \quad t \in T_k$$

Поэтому

$$0 \leq V(t_k + \beta, x(t_k + \beta; t_0, x_*)) \leq V(t_0, x_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^k \int_{t_i - \beta}^{t_i + \beta} \dot{V}(\tau, x(\tau; t_0, x_*)) d\tau \leq V(t_0, x_0) - 2k\beta a_2\left(\frac{1}{2}l\right) \quad (4.6)$$

что при достаточно большом k невозможно.

Значит, сделанное предположение (4.4) невозможно. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} a_3(\|y(t; t_0, x_0)\|) = 0$ при $t \rightarrow \infty$, если только $\|x_0\| < \Delta$. Теорема доказана.

Обсуждение теоремы 3. 1°. При $W = 0$ теорема 3 усиливает теорему 22.2 из [3], обобщающую на случай частичной асимптотической устойчивости соответствующий результат работы [20].

2°. При $W \neq 0$ не только V и $\dot{V}$, но и $\|U\|$, могут не быть знакоопределенными ни по y (в смысле В.В. Румянцева [2, 3]), ни по Ляпунову [1]. Кроме того, условие 4 проверяется в области (4.2), а не в области (4.1), что расширяет возможности использования теоремы.

3°. Если $U = y$, то условие 4 переходит в требование ограниченности сверху или снизу каждой из компонент вектор-функции Y , определяющей правую часть первой группы уравнений системы (0.1). Поэтому при $U = y$, $W = 0$ теорема 3 переходит в теорему из работ [3, 30], обобщающую на случай частичной асимптотической устойчивости классический результат Марачкова [21].

4°. Предлагаемый подход использования добавочной вектор-функции Ляпунова применялся также [31] для усиления ряда теорем [3, 32] об асимптотической устойчивости по части переменных для автономной системы (0.1) (теорем типа Барбашина–Красовского [33]).

Пример 3. Пусть система (0.1) имеет вид

$$\dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2 + \varepsilon' y_1 (z_1 z_2)^2 + y_1 z_1 z_2^2 z_3, \quad \dot{y}_2 = -2y_1 - y_2 - \varepsilon' y_2 (z_2 z_3)^2 \quad (4.7)$$

$$\dot{z}_1 = 2z_3 - 2\varepsilon' y_1^2 z_1, \quad \dot{z}_2 = \varepsilon' y_1^2 z_2, \quad \dot{z}_3 = -2z_1$$

Рассмотрим вопрос об асимптотической (y_1, y_2) -устойчивости невозмущенного движения $y_1 = y_2 = z_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) системы (4.7). Для этого введем функции Ляпунова

$$V = y_1^2 + y_2^2 + (z_1 z_2)^2 + (z_2 z_3)^2, \quad W = (W_1, W_2), \quad W_1 = z_1 z_2, \quad W_2 = z_2 z_3$$

$$U = (U_1, U_2), \quad U_1 = y_1^2, \quad U_2 = y_2^2$$

Найдутся положительные постоянные l, M_1, M_2 , такие, что в области (4.2) имеют место соотношения

$$V = y_1^2 + y_2^2 + W_1^2 + W_2^2 \geq a_1(\|y\| + \|W\|)$$

$$\dot{V} = -2[(y_1^2 + y_2^2) - y_1^2 W_1 W_2] \leq -l(y_1^2 + y_2^2) \leq -a_2(\|U\|), \quad \|U\| \geq a_3(\|y\|)$$

$$-M_1 \leq \dot{U}_1 = 2y_1\{-y_1 + 2y_2 + \varepsilon' y_1 W_1^2 + y_1 W_1 W_2\}, \quad \dot{U}_2 = 2y_2\{-2y_1 - y_2 - \varepsilon' y_2 W_2^2\} \leq M_2$$

Следовательно, функции V, W, U удовлетворяют всем условиям теоремы 3. Поэтому положение равновесия $y_1 = y_2 = z_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) системы (4.7) асимптотически (y_1, y_2) -устойчиво.

Заметим, что соотношение $\dot{V} \leq -l(y_1^2 + y_2^2)$ не гарантируется в области (4.1), т.е. функция V не является y -знакоопределенной в смысле В.В. Румянцева [2, 3].

Автор благодарит В.В. Румянцева за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00965).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 272–331.
2. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математики, механики, астрономии, физики, химии. 1957. № 4. С. 9–16.
3. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
4. Hatvani L. On the stability of the solutions of ordinary differential equations with mechanical applications // Alkalm. Mat. Lap. 1990/1991. V. 15. № 1/2. P. 1–90.

5. Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 539–547.
6. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 287 с.
7. Воротников В.И. Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 3–62.
8. Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 442 p.
9. Мовчан А.А. Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
10. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
11. Lakshmikantham V., Leela S., Martynuk A.A. Stability Analysis of Nonlinear Systems. N.Y.: Dekker, 1989. 315 p.
12. Вуйичич В.А., Козлов В.В. К задаче Ляпунова об устойчивости по отношению к заданным функциям состояния // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 555–559.
13. Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К. Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 709–716.
14. Мартынюк А.А. Полиустойчивость – новое направление в анализе нелинейных систем (обзор) // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 5. С. 3–17.
15. Озиранер А.С. Об устойчивости движения в критических случаях // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 415–421.
16. Озиранер А.С. Об устойчивости неустановившихся движений по первому приближению // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 424–430.
17. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
18. Воротников В.И. К теории устойчивости по отношению к части переменных // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 553–561.
19. Salvadori L. Sul problema della stabilita asintotica // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. 1972. V. 53. № 1–2. P. 35–38.
20. Salvadori L. Some contributions to asymptotic stability theory // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I. 1974. V. 88. № 2. P. 183–194.
21. Марачков В.П. Об одной теореме устойчивости // Изв. физ.-мат. общества и НИИ мат. и мех. при Казанском ун-те. Сер. 3. 1940. Т. 12. С. 171–174.
22. Corduneanu C. Some problems, concerning partial stability // Symp. Math. V. 6. Meccanica non-lineare e stabilita. 1970. L.; N.Y.: Acad. Press, 1971. P. 141–154.
23. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 703–728.
24. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
25. Zubov В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
26. Крементуло В.В. Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977. 263 с.
27. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
28. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
29. Corduneanu C. Sur la stabilité partielle // Rev. Roum. Math. Pure et Appl. 1964. V. 9. N 3. P. 229–236.
30. Peiffer K., Rouché N. Liapounov's second method applied to partial stability // J. Mec. 1969. V. 8. № 2. P. 323–334.
31. Воротников В.И. К теоремам типа Барбашина–Красовского в задачах устойчивости по части переменных // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 4. С. 481–484.
32. Risito C. Sulla stabilità asintotica parziale // Ann. Math. Pura ed Appl. 1970. V. 84. P. 279–292.
33. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
1. II. 1999