

УДК 531.36:62-50

© 1999 г. В.И. Матюхин

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассматриваются механические системы, которые могут содержать неголономные связи. Решается задача стабилизации движения системы вдоль заданного многообразия ее фазового пространства. Строится закон управления, который не содержит динамических параметров механической системы. Закон является универсальным, т.е. стабилизирует движение вдоль любого заданного многообразия. Необходимо только, чтобы оно было реализуемым, т.е. отвечало динамике системы.

Положение равновесия неголономной системы в общем случае не является изолированным, и речь идет о многообразии ее положений равновесия [1-4]. Исследовались соответствующие условия устойчивости, рассматривались различные задачи управления, связанные со стабилизацией многообразий положений равновесия неголономных систем [8, 9].

В настоящей работе рассматриваются задачи стабилизации многообразий общего вида, не обязательно соответствующих положению равновесия системы. Закон управления строится на основе уравнений Аппеля, описывающих движение неголономной системы. Он получен в классе разрывных обратных связей. Закон не содержит явно динамических параметров механической системы (масс, моментов инерции, коэффициентов трения и т.д.). Этим обусловлено свойство универсальности закона управления [10-15]. Именно он стабилизирует не одно, а любое заданное многообразие системы. Необходимо только, чтобы многообразие являлось реализуемым, т.е. по существу отвечало динамике объекта управления (в частности, отвечало ограниченными динамическими возможностями его управляющих приводов).

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая механическая система общего вида с m обобщенными координатами, m управлениями, g неголономными связями [1-4]. В качестве примера такой управляемой системы можно иметь в виду механическую систему с качением (многозвенную управляемую подвеску пневматика) [4] или систему, включенную в технологический процесс механической обработки. Это может быть сложная многозвенная управляемая оснастка режущего инструмента или манипулятор со специальным обрабатывающим устройством. Предполагается, что в процессе механической обработки могут возникать неголономные связи.

Для описания движения указанной неголономной системы используется следующая система уравнений Аппеля

$$\partial U / \partial \dot{\pi}_s = \Pi_s \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^m f_{si}(q, t) \dot{q}_i + f_s(q, t) - \dot{\pi}_s = 0 \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m f_{pi}(q, t) \dot{q}_i + f_p(q, t) = 0 \quad (1.3)$$

из $n + m$ дифференциальных уравнений относительно m обобщенных координат q_i и n ($n = m - g$) квазискоростей системы $\dot{\pi}_s$ [1-4]. Здесь и далее принято, что индексы s, r, q пробегают значения $1, 2, \dots, n$; $i, j, k - 1, 2, \dots, m$; $p - n + 1, n + 2, \dots, m$.

Подсистема (1.1) является собственно уравнениями Аппеля, (1.2) можно рассматривать как соотношения, задающие связь квазискоростей $\dot{\pi}_s$ системы с обобщенными переменными q_i , $\dot{q}_i$, а соотношения (1.3) – как описание неголономных механических связей (это означает, что система дифференциальных связей (1.3) не сводится к некоторой системе геометрических связей $\tilde{f}_p(q, t) = 0$ [1–4]).

В системе (1.1)–(1.3) используются общепринятые стандартные обозначения [1–4]. Через $U = U(q, \dot{\pi}, \ddot{\pi}, t)$ обозначим функцию ускорений механической системы, $\Pi_s(q, \dot{\pi}, t)$ – обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам π_s ,

$$\Pi_s = \sum_i (Q_i + M_i) b_{is} \quad (1.4)$$

Величины $(Q_i + M_i)$ в (1.4) являются обобщенными силами механической системы, соответствующими обобщенным координатам q_i , через M_i обозначены управляющие обобщенные силы, развиваемые управляющими органами системы; эти силы предполагаются ограниченными

$$|M_i| \leq H_i, \quad H_i = \text{const} > 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, рассматриваемая механическая система по каждой координате q_i имеет соответствующее управление, что характерно, например, для манипуляционных роботов [10–15].

Величины $b_{is}(q, t)$ в (1.4) являются коэффициентами матрицы $B = \|b_{ik}\|$, которая удовлетворяет соотношениям

$$FB = E, \quad \text{rank } F = m \quad (1.6)$$

откуда

$$\dot{q}_i = \sum_s b_{is} \dot{\pi}_s + b_i \quad (1.7)$$

где $F = \|f_{ki}\|$, f_{ki} из (1.2), (1.3), E – единичная матрица. Предположение (1.6) является общепринятым в динамике неголономных механических систем [1–9].

Уравнения (1.1) могут быть записаны в следующей форме [1–4]:

$$\sum_r u_{sr} \ddot{\pi}_r = \sum_i (R_i + M_i) b_{is} \quad (1.8)$$

u_{sr} – коэффициенты матрицы $u = \|u_{sr}(q, t)\|$, где

$$u_{sr} = \partial^2 U / \partial \ddot{\pi}_s \partial \ddot{\pi}_r \quad (1.9)$$

U – функция ускорений; функции $R_i = R_i(q, \dot{\pi}, t)$ строятся из выражения для $\partial U / \partial \ddot{\pi}_s$ в (1.1) и обобщенных сил Q_i в (1.4) [1–4].

Для анализа системы (1.8) введем условие

$$|u_{ik}(q, t)| \leq D, \quad |R_i(q, \dot{\pi}, t)| \leq D, \quad \dots \quad (1.10)$$

Предполагается, что оно выполнено для всех функций $u_{ik}(q, t)$, $R_i(q, \dot{\pi}, t)$ и $f_{ik}(q, t)$, $f_i(q, t)$, $b_{ik}(q, t)$, $b_i(q, t)$ и их производных, где число $D > 0$ может быть достаточно велико. Заметим, что условие (1.10) задает только принципиальную ограниченность функций и не является сильным. Оно представляется естественным в динамике механических систем [1–12]. Это условие можно ослабить по существу до предположения о гладкости соответствующих функций [10–15].

Цель управления системой (1.1)–(1.3) зададим в виде

$$\dot{\pi}_s = 0 \quad (1.11)$$

т.е. при учете соотношений (1.2), (1.3) в форме

$$\sum_i f_{ki}(q, t)\dot{q}_i + f_k(q, t) = 0 \quad (1.12)$$

Иначе говоря, цель управления состоит в том, что движение механической системы должно происходить вдоль заданного многообразия (1.12) ее фазового пространства $(q_i, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$ [10–15]. Идея состоит в том, чтобы за счет выбора функций $f_{si}(q, t)$, $f_s(q, t)$ в соотношениях (1.12) обеспечить достижение целей управления механической системой, имеющих содержательный смысл.

Именно, соотношения (1.12) позволяют в наиболее общей форме описывать цели управления механическими системами [10]. Скажем, цель управления манипулятором может состоять в том, чтобы движение его схвата осуществлялось по заданной пространственной траектории, с заданной ориентацией. Такая цель может быть задана соотношениями [10]

$$g_l(q, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 6 \quad (1.13)$$

Существуют методы построения системы (1.12), для которой (1.13) – устойчивое многообразие [16]. В форме (1.12) может быть задана цель управления, отвечающая переходу системы в некоторую конечную конфигурацию. При этом можно учесть дополнительные требования, связанные, например, с поддержанием определенного режима скоростей движения элементов механической системы. В аналогичном виде могут быть также представлены ограничения на движения механической системы (фазовые ограничения), которые возникают при учете положения и скоростей движения окружающих объектов (препятствий) [10–15].

Задача управления системой (1.1)–(1.3) состоит в построении таких допустимых (удовлетворяющих (1.5)) управлений M_i , при которых соотношения (1.12) описывают устойчивое многообразие этой системы в соответствии с определением.

Определение 1. Соотношения (1.12) описывают устойчивое многообразие системы (1.1)–(1.3), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенства

$$\left| \sum_i f_{ki}(q, t)\dot{q}_i + f_k(q, t) \right| \leq \varepsilon, \quad t \geq t^0 \quad (1.14)$$

выполняются при $t \geq t^0$ на всяком движении системы (1.1)–(1.3), если в начальный момент $t = t^0$ выполнены неравенства

$$\left| \sum_i f_{ki}(q^0, t^0)\dot{q}_i^0 + f_k(q^0, t^0) \right| \leq \delta, \quad \forall q^0, \dot{q}_i^0 \quad (1.15)$$

Задача состоит в том, чтобы построить закон управления системой (1.1)–(1.3) вида

$$M_i = M_i(f_{ij}(q, t), \dot{q}_k, f_l(q, t)) \quad (1.16)$$

который не содержит функций $u_{sj}(q, t)$, $Q_i(q, \dot{q}, t)$. Он должен обеспечить устойчивость движения системы вдоль заданного многообразия (1.12). Закон должен быть допустимым, т.е. должен удовлетворять ограничениям (1.5). Закон должен быть также универсальным [10–15], т.е. при замене $f_{sj} \rightarrow \tilde{f}_{sj}$, $f_s \rightarrow \tilde{f}_s$ закон (1.16) вместо многообразия (1.12) должен обеспечивать стабилизацию нового заданного многообразия $\sum_j \tilde{f}_{kj}\dot{q}_j + \tilde{f}_k = 0$, если только движение системы вдоль этого многообразия практически (по существу физически) реализуемо [11–15].

2. Реализуемые многообразия механической системы. Цель управления должна соответствовать динамическим возможностям объекта управления (1.1)–(1.3). Именно, движение системы (1.12) должно быть также движением рассматриваемой механической системы, т.е. система (1.1)–(1.3), (1.12) должна быть совместной.

Для формализации этого условия соотношения (1.12) будем рассматривать как систему из m дифференциальных уравнений, которая задает изменения m обобщенных координат системы q_i ($q(t)$ – решение системы (1.12)). Введем множество Φ всех возможных движений этой системы [11–15]. Для определенности к множеству Φ отнесем все возможные решения $q = q(t)$ системы (1.12), начинающиеся при $t = t^0$ с начальными условиями $q(t^0) = q^0$ из некоторой допустимой области

$$|q_i^0| \leq d, \quad d = \text{const} > 0$$

Рассмотрим движение $(q, \dot{\pi}) = (q, 0)$ системы (1.1)–(1.3), которое соответствует движению q системы (1.12). Движения $q(t)$ системы (1.12) являются гладкими (что следует из (1.10)). Поэтому далее рассмотрим гладкие движения $(q, 0)$ системы (1.1)–(1.3) при $\ddot{\pi} = 0$, когда она принимает вид

$$\sum_i (R_i(q, 0, t) + M_i^0(t))b_{is}(q, t) = 0, \quad M_i^0(t) = M_i \Big|_{\dot{\pi}=0} \quad (2.1)$$

$$\sum_i f_{ki}(q, t)\dot{q}_i + f_k(q, t) = 0 \quad (2.2)$$

Соотношения (2.2) совпадают с (1.12); (2.1) можно рассматривать как соотношения, которые задают обобщенные силы $M_i = M_i^0$ механической системы при ее невозмущенном движении $(q, 0)$ вдоль многообразия (1.12).

Допустимые управления механической системы должны быть ограничены согласно (1.5). Это означает, что для системы (1.1)–(1.3) при ее невозмущенном движении в силу системы (1.12) (в соответствии с целью управления) должны быть выполнены соотношения (2.1), (1.5) вида

$$\sum_i R_i^0 b_{is} = -\sum_i M_i^0 b_{is}, \quad |M_i^0| \leq H_i \quad (2.3)$$

или

$$\left| \sum_i R_i^0 b_{is} \right| \leq \sum_i H_i |b_{is}| \quad (2.4)$$

где функции R_i^0 , b_{is} зависят от q_i и t

$$R_i^0 = R_i(q, 0, t) \quad (2.5)$$

Построенные неравенства (2.4) должны быть совместными с соотношениями (1.12). Иначе говоря, фазовые ограничения (2.4) должны быть выполнены при всех движениях системы (1.12)

$$\left[\left| \sum_i R_i^0(q, t)b_{is}(q, t) \right| - \sum_i H_i |b_{is}(q, t)| \right] \Big|_{q \in \Phi} \leq 0 \quad (2.6)$$

При выполнении условия (2.6) система (1.1)–(1.3), (1.5), (1.12) совместна. Это означает, что существует такое управление из области (1.5), при котором движение механической системы (1.1)–(1.3) может осуществляться вдоль заданного многообразия (1.12). Такое многообразие далее будем называть реализуемым. Если условие (2.6) не выполнено, то указанная система не совместна, т.е. движение системы (1.1)–(1.3), (1.5) вдоль многообразия (1.12) в общем случае невозможно (многообразие (1.12) нереализуемо). Поэтому далее условия (2.6) будут предполагаться выполненными.

3. Стабилизация многообразий. Для стабилизации многообразия (1.12) введем разрывные управления [10–15, 17]

$$M_i = M_i^1 = -H_i \operatorname{sign} \left(\sum_s b_{is} \dot{\pi}_s \right) \quad (3.1)$$

где b_{is} из (1.6). При учете (3.1), (1.7) подсистему (1.1) ((1.8)) запишем в виде

$$\sum_r u_{sr} \ddot{\pi}_r = \sum_i (R_i - H_i \operatorname{sign}(\dot{q}_i - b_i)) b_{is} \quad (3.2)$$

Теорема 1. Любое многообразие (1.12) является экспоненциально устойчивым многообразием системы (3.2), (1.2), (1.3) (аналогично определению 1), если многообразие (1.12) реализуемо в смысле выполнения условий (2.6) вида

$$|R_i^0(q(t), t)|_{q \in \Phi} \leq H_i - \eta \quad (3.3)$$

где постоянная $\eta > 0$ может быть достаточно малой, и выполнены условия (1.6), (1.10).

Доказательство теоремы 1 приведено ниже в разд. 4.

Утверждение теоремы 1 обобщает известные результаты [10–15] по двум основным направлениям: 1) рассматривается механическая система (1.1)–(1.3) общего вида (содержит неголономные связи); 2) цель управления этой системой задается в общей форме (1.12).

Утверждение теоремы 1 по существу состоит в том, что построенный закон управления (3.1) обеспечивает устойчивость практически любого реализуемого многообразия рассматриваемой неголономной системы. Закон является универсальным [10–15], поскольку при замене $f_{sj} \rightarrow \tilde{f}_{sj}$, $f_s \rightarrow \tilde{f}_s$ (т.е. при $b_{is} \rightarrow \tilde{b}_{is}$, $b_i \rightarrow \tilde{b}_i$ в (3.1)) вместо многообразия (1.12) он обеспечивает стабилизацию нового заданного многообразия $\sum_j \tilde{f}_{sj} \dot{q}_j + \tilde{f}_s = 0$. Необходимо только, чтобы это многообразие являлось реализуемым, т.е. чтобы было выполнено условие (2.6) вида (3.3). Эта возможность обусловлена тем, что закон управления не содержит явно функций $u_{sr}(q, t)$, $Q_i(q, \dot{q}, t)$, т.е. не содержит динамических параметров объекта управления (масс, моментов инерции, коэффициентов трения и т.д.). Такая зависимость неявно содержится в условии реализуемости (2.6).

Заметим, что условие (3.3) теоремы 1 не является существенным усилением условия реализуемости (2.6). Именно, если матрица $B = \|b_{ik}\|$ диагональна и $\eta = 0$, то эти условия совпадают. Число η в (3.4) может быть выбрано достаточно малым.

Заметим также, что неравенства (3.3), а следовательно, и (2.6) выполнены при достаточно больших H_i в (1.5). Действительно, введем обозначения

$$h_i = \max_{q \in \Phi} |R_i^0(q(t), t)|, \quad \bar{h}_i = \max_{q, t} |R_i^0(q, t)| \quad (3.4)$$

где $\bar{h}_i < \infty$ из (1.10). Неравенства (3.3) следуют из условий

$$h_i \leq \bar{h}_i \leq H_i \quad (3.5)$$

4. Обоснование устойчивости многообразий. Доказательство теоремы 1 осуществляется в соответствии со схемой работ [10–15], развивающих прямой метод функций Ляпунова применительно к механическим системам. Именно, вводится функция, которая играет далее роль функции Ляпунова

$$G = \frac{1}{2} \sum_{r,s} u_{rs} \dot{\pi}_r \dot{\pi}_s \quad (4.1)$$

Через u_{rs} обозначены коэффициенты матрицы $u = \|u_{rs}(q, t)\|$, введенной в (1.9). Для

функции G справедливы неравенства

$$\lambda_1 \sum_s \dot{\pi}_s^2 \leq G(q, \dot{\pi}, t) \leq \lambda_2 \sum_s \dot{\pi}_s^2 \quad (4.2)$$

λ_i — числа, для которых справедливы неравенства $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$, вытекающие из (1.10) [1–4, 10–15].

В соответствии с основными положениями работ [10–15] назначение управлений — обеспечить убывание функции G до нуля, например в соответствии с неравенством

$$\dot{G}(q, \dot{\pi}, t, M) < 0 \quad (4.3)$$

т.е. из условия Ляпунова об устойчивости движения. Здесь $\dot{G}(q, \dot{\pi}, t, M)$ — производная функции G в силу уравнений движения объекта управления (3.2).

Производная

$$\dot{G} = \sum_{r,s} \dot{\pi}_s u_{rs} \ddot{\pi}_r + \frac{1}{2} \sum_{r,s} \dot{u}_{rs} \dot{\pi}_r \dot{\pi}_s \quad (4.4)$$

в силу (3.2) имеет вид

$$\dot{G} = \sum_s \dot{\pi}_s \left(\sum_i (R_i + M_i^1) b_{is} + \frac{1}{2} \sum_r \dot{u}_{rs} \dot{\pi}_r \right) \quad (4.5)$$

Построение неравенства (4.3) осуществляется из выражения (4.5) путем мажорирования его правой части с учетом свойств рассматриваемой механической системы.

Для этого равенство (4.5) записывается в развернутой форме

$$\dot{G} = \sum_s \dot{\pi}_s \left(\sum_i (R_i + M_i^1) b_{is} + \frac{1}{2} \sum_r \left[\sum_j \frac{\partial u_{rs}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial u_{rs}}{\partial t} \right] \dot{\pi}_r \right) \quad (4.6)$$

При учете (1.19) выражение (4.6) запишем в виде

$$\dot{G} = \sum_s \dot{\pi}_s \left(\sum_i (R_i + M_i^1) b_{is} + \sum_{q,r} \dot{\pi}_r [A_{sr} + B_{srq} \dot{\pi}_q] \right) \quad (4.7)$$

где A_{sr}, B_{srq} — некоторые функции от q_j и t .

При учете неравенств (4.2) для функции G из (4.7) строится неравенство

$$\dot{G} \leq \sum_s \dot{\pi}_s \sum_i (R_i + M_i^1) b_{is} + G(a + b\sqrt{G}) \quad (4.8)$$

где учитываются неравенства (1.10), a, b — неотрицательные числа.

Далее показывается, что правая часть неравенства (4.8) является отрицательно определенной, т.е. из (4.8) следует искомое неравенство (4.3). Для этого учтем выражения (2.5) и неравенство (4.8) запишем в виде

$$\dot{G} \leq \sum_i [R_i^0 + M_i^1] \sigma_i + G(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{G}), \quad \sigma_i = \sum_s b_{is} \dot{\pi}_s \quad (4.9)$$

Неравенство (4.9) при учете (3.1) запишем в виде

$$\dot{G} \leq \sum_i [R_i^0 - H_i \text{sign}(\sigma_i)] \sigma_i + G(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{G}) \quad (4.10)$$

или

$$\dot{G} \leq - \sum_i [-R_i^0 \text{sign}(\sigma_i) + H_i] |\sigma_i| + G(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{G}) \quad (4.11)$$

Заметим, что выбор управления в форме (3.1) удовлетворяет общему принципу построения управлений [10]. Действительно, управление M_i^1 (3.1) доставляет минимум производной $\dot{G}$ в области допустимых управлений (1.5) [5–7]. Именно, выражение (4.5) для $\dot{G}$ можно записать в форме

$$\dot{G}(q, t, \dot{\pi}, M^1) = \min_{|M_i| \leq H_i} \dot{G}(q, t, \dot{\pi}, M) \quad (4.12)$$

При учете условия (3.3) теоремы 1 неравенство (4.11) примет вид

$$\dot{G} \leq -\eta \sum_i |\sigma_i| + G(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{G}) \quad (4.13)$$

Для суммы из (4.13) справедливы неравенства

$$\sum_i |\sigma_i| = \sum_i \left| \sum_s b_{is} \dot{\pi}_s \right| \geq \gamma_1 \sum_s |\dot{\pi}_s| \geq \gamma_2 \sqrt{G} \quad (4.14)$$

$\gamma_1 = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Действительно, соотношения (1.2) при учете (1.7) можно записать в виде

$$\dot{\pi}_s = \sum_i f_{si} [\sigma_i - b_i] + f_s = \sum_i f_{si} [\sigma_i] \quad (4.15)$$

Отсюда следует, что справедливо неравенство

$$\sum_s |\dot{\pi}_s| \leq \sum_s \sum_i |f_{si}| |\sigma_i| \quad (4.16)$$

При учете предположения (1.10) теоремы 1 из (4.16) следует первое неравенство в (4.14). Второе неравенство в (4.14) следует непосредственно из (4.2). Из неравенств (4.13) и (4.14) имеем неравенство (4.3) вида

$$\dot{G} \leq -\bar{\eta}\sqrt{G} + G(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{G}) \quad (4.17)$$

Покажем далее явно, что решения $G = G(t)$ неравенства (4.17) стремятся к нулю по экспоненте. Отсюда при учете неравенств (4.2) устанавливается аналогичное свойство для движения $\dot{\pi}_s = 0$ рассматриваемой системы (3.2), т.е. устанавливается основное утверждение теоремы 1.

Движение $G = 0$ системы (4.17) будет устойчивым.

Действительно, в области

$$-\bar{\eta} + \sqrt{G}(\bar{a} + \bar{b}\sqrt{G}) \leq -\frac{1}{2}\bar{\eta} \quad (4.18)$$

неравенство (4.17) следует из неравенства

$$\dot{G} \leq -\frac{1}{2}\sqrt{G}\bar{\eta} \quad (4.19)$$

Решения неравенства (4.19) имеют вид [10–15]

$$G(t) \leq G(t^0), \text{ при } t^0 \leq t \leq t^1, \quad G(t) = 0, \text{ при } t \geq t^1 \quad (4.20)$$

$$t^1 = \frac{1}{\bar{\eta}} 4\sqrt{G(t^0)} \quad (4.21)$$

Соотношения (4.20) выражают устойчивость движения $G = 0$ системы (4.19).

Пусть теперь движение системы (4.17) начинается в области (4.18). Тогда ее движение и далее будет происходить в области (4.18). В области (4.18) неравенство (4.19) следует из неравенства (4.17). Отсюда вытекает выполнение соотношений устойчивости (4.20) и для системы (4.17). При учете неравенств (4.2) отсюда следует

(экспоненциальная) устойчивость движения $\dot{\pi}_s = 0$ системы (3.2), т.е. следует утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

5. Стабилизация движений неголономной системы. Из теоремы 1 следует, что для величин π_s на движениях системы (3.2) справедливы неравенства

$$|\dot{\pi}_s| \leq \gamma |\dot{\pi}_s(t^0)| \exp(-\lambda(t-t^0)) \quad (5.1)$$

где γ, λ — неотрицательные постоянные, а при $t \geq t^1 \geq t^0$ из (4.20) $\dot{\pi}_s = 0$ и система (1.7) примет вид

$$\dot{q}_i = b_i(q, t) \quad (5.2)$$

Потребуем, чтобы система (5.2) имела некоторое экспоненциально устойчивое движение $q = q^*(t)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть движение $q = q^*(t)$ системы (5.2) экспоненциально устойчиво. Тогда $(q^*, 0)$ будет экспоненциально устойчивым движением системы (3.2).

Теорема 2 устанавливается с помощью функции Ляпунова $g(q, t)$, существование которой вытекает из предполагаемой экспоненциальной устойчивости движения $q = q^*(t)$ системы (5.2) [18]. Производная функции g в силу системы (5.1) имеет вид

$$\dot{g} = \dot{g}_1 + \sum_i g'_i(q, t) \sigma_i \quad (5.3)$$

где $\dot{g}_1$ — производная функции g в силу невозмущенной системы (5.2). Правая часть равенства (5.3) мажорируется, причем учитывается, что g удовлетворяет оценкам характерным для квадратичных форм [18]. На их основе и при учете убывания возмущающего слагаемого в (5.3) устанавливается убывание g на движении системы (5.1), т.е. устойчивость ее движения q^* , и следовательно, устойчивость движения q^* системы (3.2).

Из теоремы 2 следует, что система (3.2) будет двигаться вдоль заданного многообразия (1.12), причем ее координаты q_i будут близки заданным $q_i^*(t)$. Движение $q^*(t)$ может соответствовать, например, положению равновесия рассматриваемой механической системы [5]. Таким образом, устойчивость равновесия $q^*(t)$ следует из предположения об устойчивости равновесия $q^*(t)$ в системе (5.2).

Положение равновесия неголономной системы может быть не единственно, т.е. может существовать многообразие $S(q) = 0$ положений равновесия [4]. Потребуем, чтобы $S(q) = 0$ было устойчивым многообразием системы (5.2). В этом случае (при надлежащих дополнительных предположениях) $S(q) = 0$ будет также устойчивым многообразием системы (3.2).

Таким образом, проблема стабилизации движений неголономных систем [5–9] по существу сводится к вопросу о возможности построения системы (5.2) с заданным устойчивым движением q^* (или многообразием $S(q) = 0$) за счет выбора функций $f_{si}(q, t)$, $f_s(q, t)$ в исходных соотношениях (1.2). Этот вопрос имеет отношение к проблеме построения дифференциальных уравнений, имеющих заданные асимптотически устойчивые интегральные многообразия [16].

6. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Устойчивость движения неголономной системы будет иметь место и при учете различных неидеальностей измерительных и исполнительных элементов системы управления [14, 15]. При учете погрешностей ξ_i измерения обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ система (3.2) примет вид

$$\sum_r u_{sr} \ddot{\pi}_r = \sum_i (R_i - H_i \text{sign}(\dot{q}_i + \xi_i - b_i)) b_{is} \quad (6.1)$$

Пусть погрешности малы

$$|\xi_i| \leq \bar{\xi} \quad (6.2)$$

где $\bar{\xi} = \text{const} > 0$ — малая величина. Тогда можно показать, что будет справедлива теорема 1. Однако вместо экспоненциальной устойчивости будет иметь место простая устойчивость (по Ляпунову) согласно определению 1, где $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{\xi}) \rightarrow 0$ при $\varepsilon, \bar{\xi} \rightarrow 0$.

Это же будет иметь место при учете других неидеальностей системы управления. Например, при малом запаздывании τ в системе измерения (оценки, наблюдения) состояния объекта управления M_i в (6.1) принимает вид

$$M_i(t) = -H_i \text{sign}[\dot{q}_i(t - \tau) - b_i(q(t - \tau), t)] \quad (6.3)$$

или при малых инерционностях приводов системы

$$\gamma \dot{M}_i + M_i = H_i \text{sign}[\dot{q}_i - b_i] \quad (6.4)$$

где число $\gamma > 0$ достаточно мало, и т.д. [14, 15].

При учете неидеальностей измерительных и исполнительных элементов системы управления в общем случае силы M_i можно записать в форме

$$M_i = -H_i \text{sign}(\chi_i) + Z_i(\chi_i), \quad \chi_i = \dot{q}_i - b_i \quad (6.5)$$

Величина Z_i имеет смысл отклонений неидеального закона управления (6.5) от идеального (3.1). Условия слабости влияния неидеальностей измерительных и исполнительных элементов системы управления в общем случае можно записать в форме

$$N \leq \Delta, \quad \Delta = \text{const} > 0, \quad N = \sum_i Z_i \chi_i \quad (6.6)$$

Величину N можно рассматривать как мощность сил Z_i , возмущающих идеальный закон управления (3.1) [14, 15]. При учете (6.5) систему (3.2) запишем в виде

$$\sum_r u_{sr} \ddot{r}_r = \sum_i (R_i - H_i \text{sign}(\chi_i) + Z_i(\chi_i)) b_{is} \quad (6.7)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть возмущающие силы Z_i в (6.7) малы (величина Δ в (6.6) мала). Тогда любое многообразие (1.12) является устойчивым многообразием системы (6.7).

Доказательство теоремы 3 следует доказательству теоремы 1 и известной схеме [10–15]. Однако в этом случае вместо (4.17) справедливы неравенства

$$\dot{G} \leq -\bar{\eta} \sqrt{G} + G(\bar{a} + \bar{b} \sqrt{G}) + \sum_s \dot{\pi}_s \sum_i Z_i b_{is} \quad (6.8)$$

$$\dot{G} \leq -\bar{\eta} \sqrt{G} + G(\bar{a} + \bar{b} \sqrt{G}) + \sum_i Z_i \chi_i \quad (6.9)$$

$$\dot{G} \leq -\bar{\eta} \sqrt{G} + G(\bar{a} + \bar{b} \sqrt{G}) + \Delta \quad (6.10)$$

Решения неравенства (6.10) имеют вид

$$G(t) \leq G(t^0), \quad t \geq t^0 \quad (6.11)$$

если числа $G(t^0)$, Δ в (6.10), (6.11) достаточно малы. Отсюда следует справедливость теоремы 3.

7. Учет динамики приводов. Если динамика приводов системы существенна (числа γ в (6.4) или Δ в (6.6) не малы), то и в этом случае возможна стабилизация многообразия (1.12) неголономной системы (1.1)–(1.3). Учетом динамику ее приводов в форме [11]

$$\dot{M}_i = F_i(M, q, \dot{q}, t) + U_i, \quad |U_i| \leq H_i \quad (7.1)$$

где U_i — новые управления.

Продифференцируем уравнения (1.8)

$$\sum_r u_{sr} \ddot{\pi}_r = \sum_i (p_i(q, \dot{\pi}, \ddot{\pi}, t) + \dot{M}_i) b_{is} \quad (7.2)$$

и исключим из них величины $\dot{M}_i$ при учете (7.1) и величины M_i при учете (1.8).
Полученная система

$$\sum_r u_{sr} \ddot{\pi}_r = \sum_i (P_i + U_i) b_{is} \quad (7.3)$$

эквивалентна исходной системе (1.8), (7.1) [11].

Введем множество невозмущенных движений $(q, \dot{\pi}, \ddot{\pi}, t) = (q, 0, 0, t)$ системы (1.2), (1.3), (7.3) согласно условиям (2.1)–(2.6) вида

$$\sum_i (P_i^0 + U_i^0) b_{is} = 0 \quad (7.4)$$

$$\sum_i P_i^0 b_{is} = \sum_i U_i^0 b_{is}, \quad |U_i^0| \leq H_i \quad (7.5)$$

$$\left| \sum_i P_i^0 b_{is} \right| \leq \sum_i H_i |b_{is}| \quad (7.6)$$

$$\left| \sum_i P_i^0(q, 0, 0, t) b_{is}(q, t) \right| - \sum_i H_i |b_{is}(q, t)| \leq 0, \quad q \in \Phi \quad (7.7)$$

Введем управление по аналогии с (3.1)

$$U_i = -H_i \operatorname{sign} \left[\sum_s b_{is} (\ddot{\pi}_s + \lambda \dot{\pi}_s) \right] \quad (7.8)$$

где число $\lambda = \operatorname{const} > 0$ достаточно мало. Тогда система примет вид

$$\sum_r u_{sr} \ddot{\pi}_r = \sum_i \left(P_i - H_i \operatorname{sign} \left[\sum_s b_{is} (\ddot{\pi}_s + \lambda \dot{\pi}_s) \right] \right) b_{is} \quad (7.9)$$

Теорема 4. Любое многообразие (1.12) является экспоненциально устойчивым многообразием системы (1.2), (1.3), (7.9) (аналогично определению 1), если многообразие (1.12) реализуемо в смысле выполнения условий (7.7) вида

$$\left| \sum_i P_i^0(q, 0, 0, t) \right|_{q \in \Phi} \leq H_i - \eta \quad (7.10)$$

где постоянная $\eta > 0$ может быть достаточно малой и выполнены условия (1.6), (1.10).

Доказательство теоремы 4 следует схеме разд. 4 и не приводится.

Приведенные теоремы 1–4 указывают на нелокальность основного утверждения работы о возможности стабилизации многообразий для неголономных механических систем общего вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00039).

ЛИТЕРАТУРА

1. Appell P. Traite de Mecanique Rationnelle. Paris. Gauthier-Villars et C-ie, Editeurs. V. 1, V. 2. 1960. = Анпель П. Теоретическая механика. М: Физматгиз, 1960. Т. 1. 515 с.; Т. 2. 487 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М: Физматгиз, 1961. 824 с.

4. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
5. *Карпетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техн. Сер. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 6. 128 с.
6. *Козлов В.В.* Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 2. С. 289–291.
7. *Татаринов Я.В.* Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: нелинейные эффекты движения вблизи многообразия равновесий // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 604–614.
8. *Тертычный В.Ю.* Интегральное оценивание и адаптивная стабилизация управляемых неголономных систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 976–984.
9. *Bloch A.M., Reyhanoglu M., McClamroch N.H.* Control and stabilization of nonholonomic dynamic system. // IEEE Trans. automat. Control. 1992. V. 37. № 11. P. 1746–1757.
10. *Пятницкий Е.С.* Синтез иерархических систем управления механическими и электро-механическими объектами на принципе декомпозиции. I, II // Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С. 87–99; № 2. С. 57–71.
11. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
12. *Матюхин В.И.* Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. № 3. С. 33–44.
13. *Матюхин В.И.* Сильная устойчивость движений механических систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1. С. 37–56.
14. *Матюхин В.И.* Устойчивость движений манипулятора при постоянно действующих возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1993. № 11. С. 124–134.
15. *Матюхин В.И.* Устойчивость движений манипулятора при учете слабой динамики управляющих устройств // Автоматика и телемеханика. 1996. № 4. С. 24–38.
16. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
17. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
18. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1997