

УДК 531.36:62–50

© 1999 г. В.И. Максимов, Л. Пандольфи

О РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Обсуждаются задачи динамической реконструкции неизвестных распределенных и граничных управлений, действующих на нелинейные уравнения параболического и гиперболического типов. Указываются регуляризирующие алгоритмы, позволяющие синхронно с развитием рассматриваемых процессов осуществлять реконструкцию управлений. Алгоритмы устойчивы к информационным помехам и погрешностям вычислений.

Рассматриваются задачи динамической реконструкции неизвестных входных воздействий систем с распределенными параметрами. Этими воздействиями могут быть распределенные и граничные управления, входящие в краевые условия Дирихле. Предполагается, что система, описываемая параболическим или гиперболическим уравнением, функционирует на заданном промежутке времени $T = [0, \vartheta]$. Эволюция ее фазового состояния $z(t)$, $t \in T$ (траектория системы) определяется некоторым входным воздействием (управлением) $u(\cdot)$ из заданного функционального множества $P(\cdot)$. Само входное воздействие $u(\cdot)$, а также фазовая траектория $z(\cdot)$ системы неизвестны. Однако имеются некоторые устройства, позволяющие в дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, измерять ошибкой выходы $z(\tau_i)$. Требуется реконструировать управление $u_*(\cdot)$, порождающее $z(\cdot)$: $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; z(\cdot))$. Так как точная реконструкция $u_*(\cdot)$ невозможна, то необходимо построить алгоритм вычисления некоторого приближения $u_*(\cdot)$. Это приближение должно быть тем лучше, чем меньше величина погрешности, измерения величины $z(\tau_i)$ и чем гуще сетка $\{\tau_i\}$, взятая на промежутке T .

Обсуждаемые задачи относятся к классу обратных задач динамики управляемых систем (реконструкции входа по измерениям выхода). Для уравнений с распределенными параметрами обратные задачи в апостериорной постановке исследовались многими авторами [1–3]. Был предложен алгоритм динамической реконструкции входа конечномерной динамической системы аффинной по управлению [4]. Этот метод, эффективно применявшийся [5,6] при решении различных обратных задач для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, основывается на идеях теории позиционного управления [7] и известных в теории некорректных задач методах сглаживающего функционала и невязки [1]. Указанный метод получил развитие для различных классов систем с распределенными параметрами [8–11]. В этих исследованиях обсуждались проблемы динамической реконструкции распределенных и граничных управлений, а также коэффициентов эллиптического оператора.

Цель данной работы – опираясь на предложенную ранее [12–16] теорию граничного управления, показать возможности метода вспомогательных позиционно-управляемых моделей при исследовании задач реконструкции неизвестных распределенных и граничных управлений, действующих на нелинейные уравнения параболического и гиперболического типов. При исследовании параболических систем используется техника сжимающих полугрупп. Гиперболические объекты рассматриваются с привлечением оператора "косинуса" (по поводу этого подхода см. [12, 15, 16]).

1. Реконструкция управления в параболических системах. Пусть управляемая система Σ описывается параболическим уравнением

$$x_t(t, \eta) - \Delta x(t, \eta) = f(t, \eta) + (B_1 u_1(t))(\eta) + \Phi(x(t, \eta)) \quad (1.1)$$

в $T \times \Omega = Q$
с начальным

$$x(0, \eta) = x_0(\eta) \text{ в } \Omega \quad (1.2)$$

и граничным

$$x(t)|_{\Gamma} = B_2 u_2(t), \quad t \in T \quad (1.3)$$

условиями. Здесь $\Omega \subset R^n$ – открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ , Δ – оператор Лапласа, $f(\cdot) \in L_2(T; L_2(\Omega))$ – заданное возмущение, $\Phi(\cdot)$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица, $B_1 \in L(U_1; L_2(\Omega))$ и $B_2 \in L(U_2; L_2(\Gamma))$ – линейные непрерывные операторы, U_1 и U_2 – равномерно выпуклые банаховы пространства.

Следуя известному подходу [13], дадим определение решения. Пусть σ – оператор Дирихле, т.е.

$$\sigma u_2 = h \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta h = 0 & \text{на } \Omega \\ h = u_2 & \text{на } \Gamma, \quad u_2 \in L_2(\Gamma) \end{cases}$$

Известно [14, 17], что оператор σ действует непрерывно из пространства $L_2(\Gamma)$ в пространство H . Введем отображение

$$t \rightarrow p(t; \cdot, \cdot, \cdot) : H \times L_2(T; U) \times C(T; H) \rightarrow C(T; H)$$

$$p(t; x_0, u(\cdot), z(\cdot)) = S(t)x_0 + A \int_0^t S(t-\tau) \sigma B_2 u_2(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t S(t-\tau) \{f(\tau) + B_1 u_1(\tau) + \Phi(z(\tau))\} d\tau, \quad t \in T$$

Здесь

$$Ax = \Delta x, \quad x \in D(A) = H_1^0(\Omega) \cap H_2(\Omega)$$

– генератор сжимающей полугруппы линейных непрерывных операторов $\{S(t); t \geq 0\}$ на H , $D(A)$ – область определения оператора A . Под решением задачи (1.1) – (1.3), отвечающим управлению $u(\cdot) \in P(\cdot)$, будем понимать единственную функцию

$$x(\cdot) = x(\cdot; 0; x_0, u(\cdot)) \in C(T; H)$$

удовлетворяющую интегральному уравнению

$$x(t) = p(t; x_0, u(\cdot), x(\cdot)), \quad t \in T$$

Сформулируем задачу, рассматриваемую в этом разделе. На систему (1.1) – (1.3) действуют неизвестные входные воздействия $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, $u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\} \in P = P_1 \times P_2$ при почти всех $t \in T$; $P_1 \subset U_1$, $P_2 \subset U_2$ – выпуклые, ограниченные и замкнутые множества. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in T, \quad \tau_i = \tau_{i-1} + \delta, \quad i \in [1: m-1], \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta$$

замеряются (с ошибкой) фазовые состояния системы (1.1) – (1.3) $z(\tau_i) = x(\tau_i, \eta) = x(\tau_i; 0, x_0, u(\cdot)) \in H = L_2(\Omega)$. Результаты измерений – элементы $\xi_i \in H$ – удовлетворяют

неравенствам

$$\|\xi_i - x(\tau_i)\|_H \leq h \quad (1.4)$$

где h – параметр точности измерения.

Требуется указать алгоритм реконструкции неизвестного входного воздействия

$$u_*(\cdot) = \{u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot)\} \in P(\cdot) = \{u(\cdot) = \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\} \in L_2(T; U) :$$

$$u_1(t) \in P_1, \quad u_2(t) \in P_2 \text{ при почти всех } t \in T\}$$

порождающего также неизвестный выход $z(\cdot) = x(\cdot)$, т.е. построить алгоритм приближенного вычисления управления $u_*(\cdot)$, такого, что отвечающее этому управлению решение $x(\cdot; 0, x_0, u_*(\cdot))$ совпадает с $x(\cdot)$. Здесь $U = U_1 \times U_2$ – пространство управлений, $x(\cdot; 0, x_0, u_*(\cdot))$ – решение уравнения (1.1) с начальным (1.2) и граничным (1.3) условиями, а также управлением $u(\cdot) = u_*(\cdot)$.

Перейдем к решению задачи, следуя предложенному ранее подходу [4–11]. Сначала необходимо подобрать вспомогательную систему – модель. В качестве модели возьмем линейную систему, описываемую параболическим уравнением

$$w_t(t, \eta) - \Delta w(t, \eta) = f(t, \eta) + (B_1 v_1^h(t))(\eta) + v_3^h(t, \eta) \text{ в } T \times \Omega \quad (1.5)$$

с начальным условием

$$w(0, \eta) = w_0(\eta) \text{ в } \Omega \quad (1.6)$$

и граничным условием Дирихле

$$w(t)|_\Gamma = B_2 v_2^h(t), \quad t \in T \quad (1.7)$$

Под решением уравнения (1.5) с начальным условием (1.6), порожденным управлениями $\{v_1^h(\cdot), v_2^h(\cdot)\} \in P(\cdot)$ и $v_3^h(\cdot) \in L_2(T; H)$, будем понимать функцию

$$w^h(\cdot) = w(\cdot; 0, w_0, v^h(\cdot)) \in C(T; H), \quad v^h(\cdot) = \{v_1^h(\cdot), v_2^h(\cdot), v_3^h(\cdot)\}$$

определяемую равенством [14]

$$w^h(t) = S(t)w_0 + A \int_0^t S(t-\tau) \sigma B_2 v_2^h(\tau) d\tau + \int_0^t S(t-\tau) \{f(\tau) + B_1 v_1^h(\tau) + v_3^h(\tau)\} d\tau, \quad t \in T$$

Как известно [14], при условии

$$v^h(\cdot) \in P(\cdot) \times L_\infty(T; H) \quad (1.8)$$

такое решение существует и единственно.

Заметим, что если $u(\cdot)$ (или $v^h(\cdot)$) – неограниченная (по времени) функция (например функция, суммируемая с квадратом нормы), то решение уравнения (1.1) (или (1.5)) не является, вообще говоря, элементом пространства $C(T; H)$.

Пусть $\varphi_x(\cdot)$ – модуль непрерывности функции $t \rightarrow x(t) = x(t; 0, x_0, u_*(\cdot)) \in H$ на T , т.е. выполнено равенство

$$\varphi_x(\delta) = \sup \{\|x(t_1) - x(t_2)\|_H : t_1, t_2 \in T, |t_1 - t_2| < \delta\} \quad (1.9)$$

Пусть $\{\Delta_h\}$ – семейство равномерных разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta \quad (1.10)$$

отрезка T с диаметрами $\delta = \delta(h)$.

Опишем алгоритм решения задачи. Прежде всего выбираются семейство $\{\Delta_h\}$ и функция $\alpha(h) : [0, 1) \rightarrow R^+$, удовлетворяющие следующему условию согласования параметров.

Условие 1

$$\delta(h) \rightarrow 0+, \alpha(h) \rightarrow 0+$$

$$\{\delta(h) + h + \varphi_x(\delta(h))\} \alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

По поступлении (до начала процесса) величины h она фиксируется. Вместе с ней фиксируются Δ_h и $\alpha(h)$. Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. В течение i -го шага, выполняемого на промежутке времени $\delta_i = \delta_{h,i} = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, осуществляются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , находится управление

$$v^h(t) = \{v_1^h(t), v_2^h(t), v_3^h(t) : t \in \delta_i\}$$

где

$$v_1^h(t) = v_{1i}^h, v_2^h(t) = v_*(t - \tau_i), v_3^h(t) = \Phi(\xi_i) \text{ при почти всех } t \in \delta_i$$

$$v_1^h = \arg \min \{2(s_i^*, A^{-1}B_1 v_1)_H + \alpha(h) \|v_1\|_{U_1}^2 : v_1 \in P_1\}$$

$$v_*(\cdot) = \arg \min \left\{ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{2(\sigma^* S(\tau_{i+1} - s) s_i^*, B_2 v_2(s))_{L_2(\Gamma)} + \right. \quad (1.11)$$

$$\left. + \alpha(h) \|v_2(s)\|_{U_2}^2 \} ds : v_2(s) \in P_2 \text{ при почти всех } s \in [0, \delta] \right\}$$

$$s_i^* = A^{-1}(\psi_i - \xi_i), \quad \|\psi_i - w^h(\tau_i)\|_H \leq h$$

σ^* – оператор, сопряженный к оператору Дирихле σ . Затем это управление подается на вход модели. После этого происходит пересчет фазового состояния модели: вместо $w(\tau_i)$ находится $w(\tau_{i+1})$. Вся процедура осуществляется до момента ϑ .

Замечание. Как известно [16, 17],

$$\sigma^* z = \partial f / \partial \eta|_{\Gamma}, \quad \forall z \in H$$

где f – решение задачи Дирихле

$$\Delta f(\eta) = z(\eta), \quad \eta \in \Omega; \quad f|_{\Gamma} = 0$$

Поэтому

$$\begin{aligned} v_*(\cdot) = \arg \min & \left\{ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ 2 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta^{-1} S(\tau_{i+1} - s) s_i^*|_{\Gamma}, B_2 v_2(s) \right)_{L_2(\Gamma)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha(h) \|v_2(s)\|_{U_2}^2 \right\} ds : v_2(s) \in P_2 \text{ при почти всех } s \in [0, \delta] \right\} \end{aligned}$$

Пусть $U(x(\cdot))$ – множество всех управлений из $P(\cdot)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$, т.е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) = \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\} \in P(\cdot) :$$

$$x(t) = S(t)x_0 - \int_0^t S(t-\tau) \{f(\tau) + \Phi(x(\tau))\} d\tau =$$

$$= A \int_0^t S(t-\tau) \sigma B_2 u_2(\tau) d\tau + \int_0^t S(t-\tau) B_1 u_1(\tau) d\tau, \quad \forall t \in T \quad (1.12)$$

Видно, что это множество выпукло, ограничено и замкнуто в $L_2(T; U)$. Поэтому оно содержит единственный элемент $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot)) = \{u_{1*}(\cdot), u_{2*}(\cdot)\}$ минимальной $L_2(T; U)$ -нормы.

Пусть $v^h(\cdot) = \{v_1^h(\cdot), v_2^h(\cdot)\}$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1, начальное состояние $w_0 \in H$ модели таково, что

$$\|x_0 - w_0\|_H \leq h$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое h_1 , что при $h \leq h_1$ справедливо неравенство

$$\|v^h(\cdot) - u_*(\cdot; x(\cdot))\|_{L_2(T; U)} \leq \varepsilon \quad (1.13)$$

Введем функционал Ляпунова

$$\varepsilon(t) = \|A^{-1}(w(t) - x(t))\|_H^2 + E(t) \quad (1.14)$$

$$E(t) = \alpha(h) \int_0^t \left\{ \|v_2^h(s)\|_{U_2}^2 + \|v_1^h(s)\|_{U_1}^2 - \|u_{2*}(s)\|_{U_2}^2 - \|u_{1*}(s)\|_{U_1}^2 \right\} ds \quad (1.15)$$

Лемма 1. Равномерно по всем разбиениям Δ_h и измерениям ξ_i , удовлетворяющим неравенствам (1.4), справедливо неравенство

$$\varepsilon(\tau_i) \leq k_1(\delta + h + \varphi_x(\delta)), \quad i = 1, \dots, m$$

Доказательство теоремы 1 основывается на этой лемме, справедливость которой, в свою очередь, устанавливается аналогично изложенному ранее [4, 9].

2. Реконструкция управления в гиперболических системах. Пусть управляемая система Σ описывается гиперболическим уравнением

$$\begin{aligned} x_{tt}(t, \eta) - \Delta x(t, \eta) &= f(t, \eta) + (B_1 u_1(t))(\eta) + \\ &+ \Phi(x(t, \eta), x_t(t, \eta)) \quad \text{в } T \times \Omega = Q \end{aligned} \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$x(0, \eta) = x_0(\eta), \quad x_t(0, \eta) = x_{10}(\eta) \quad \text{в } \Omega \quad (2.2)$$

и граничным условием (1.3). Область Ω , оператор Δ , функция $f(\cdot)$, отображение B_1, B_2 и пространства U_1, U_2, U, V те же, что и в разд. 1. Нелинейное возмущение $\Phi(\cdot, \cdot)$ дифференцируемо по Фреше на $H \times H^{-1}(\Omega)$ ($H = L_2(\Omega)$) и удовлетворяет условию роста

$$\|\Phi'(x, y)\|_H \leq M\{\|x\|_H + \|y\|_{H^{-1}(\Omega)}\}, \quad \forall (x, y) \in H \times H^{-1}(\Omega)$$

(Φ' означает производную Фреше).

Следуя описанному ранее подходу [13], дадим определение решения задачи (2.1), (2.2), (1.3). Пусть $x_0 \in H, x_{10} \in H^{-1}(\Omega)$. Введем отображение

$$\begin{aligned} t \rightarrow p(t; \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) &= \{p_1(\cdot), p_2(\cdot)\} : H \times H^{-1}(\Omega) \times L_2(T; U) \times \\ &\times C(T; H \times H^{-1}(\Omega)) \rightarrow C(T; H \times H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

$$p_j(t; x_0, x_{10}, u(\cdot), z(\cdot)) = S_j^0(t)x_0 + S_j(t)x_{10} - A \int_0^t S_j(t-\tau) \sigma B_2 u_2(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t S_j(t-\tau) \{f(\tau) + B_1 u_1(\tau) + \Phi(z_1(\tau), z_2(\tau))\} d\tau, \quad t \in T; \quad j = 1, 2$$

$$S_1^0(t) = C(t), \quad S_2^0(t) = AT(t), \quad S_1(t) = T(t), \quad S_2(t) = C(t)$$

$$z(\cdot) = \{z_1(\cdot), z_2(\cdot)\} \in C(T; H \times H^{-1}(\Omega))$$

Оператор A задан в разд. 1. Известно [12], что этот оператор является генератором строго непрерывного оператора "косинуса" $\{C(t); t \geq 0\}$ на H , с которым, в свою очередь, сопоставляется оператор "синуса"

$$T(t)x = \int_0^t C(\tau)x d\tau$$

Под решением задачи (2.1), (2.2), (1.3), отвечающим управлению $u(\cdot) \in P(\cdot)$, будем, следуя известному подходу [13, 15], понимать единственную функцию

$$z(\cdot) = \{x(\cdot; 0, x_0, x_{10}, u(\cdot)), \quad x_t(\cdot; 0, x_0, x_{10}, u(\cdot))\} \in C(T; H \times H^{-1}(\Omega))$$

удовлетворяющую интегральному уравнению

$$z(t) = p(t; x_0, x_{10}, u(\cdot), z(\cdot)), \quad t \in T$$

Содержательно рассматриваемая задача аналогична описанной в разд. 1 для параболического уравнения. Именно, полагается, что на систему действуют неизвестные входные воздействия $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, $u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\} \in P = P_1 \times P_2$ при почти всех $t \in T$; $P_1 \subset U_1$, $P_2 \subset U_2$ — выпуклые, ограниченные и замкнутые множества. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in T, \quad \tau_i = \tau_{i-1} + \delta, \quad i \in [1: m-1], \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta$$

замеряются (с ошибкой) фазовые состояния системы (2.1), (2.2), (1.3)

$$z(\tau_i) = \{x(\tau_i, \eta), x_t(\tau_i, \eta)\}$$

Результаты измерений — элементы $\xi_i = \{\xi_i^{(1)}(\tau_i), \xi_i^{(2)}(\tau_i)\} \in H \times H^{-1}(\Omega)$ — удовлетворяют неравенствам

$$\|\xi_i^{(1)} - x(\tau_i)\|_H \leq h, \quad \|\xi_i^{(2)} - x_t(\tau_i)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq h \quad (2.3)$$

где h — параметр точности измерения. Задача состоит в построении алгоритма динамической реконструкции неизвестного входного воздействия $u_*(\cdot) = \{u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot)\} \in P(\cdot)$, порождающего также неизвестный выход $z(\cdot)$.

Перейдем к решению задачи. В качестве модели возьмем линейную систему, описываемую гиперболическим уравнением

$$\begin{aligned} w_n(t, \eta) - \Delta w(t, \eta) = \\ = f(t, \eta) + (B_1 v_1^h(t))(\eta) + v_3^h(t, \eta) \quad \text{в } T \times \Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

с начальными условиями

$$w(0, \eta) = w_0(\eta), \quad w_t(0, \eta) = w_{10}(\eta) \quad \text{в } \Omega \quad (2.5)$$

и граничным условием Дирихле (1.7).

Под решением уравнения (2.4) с начальными условиями (2.5), порожденным управлениями $\{v_1^h(\cdot), v_2^h(\cdot)\} \in P$ и $v_3^h(\cdot) \in L_2(T; H)$, будем понимать функцию

$$w^h(\cdot) = w(\cdot; 0, w_0, w_{10}, v^h(\cdot)) \in C(T; H), \quad w_t^h(\cdot) \in C(T; H^{-1}(\Omega))$$

$$v^h(\cdot) = \{v_1^h(\cdot), v_2^h(\cdot), v_3^h(\cdot)\}$$

определяемую равенствами [15]

$$w^h(t) = C(t)w_0 + T(t)w_{10} - A \int_0^t T(t-\tau) \sigma B_2 v_2^h(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t T(t-\tau) \{f(\tau) + B_1 v_1^h(\tau) + v_3^h(\tau)\} d\tau$$

$$w_t^h(t) = AT(t)x_0 + C(t)x_{10} - A \int_0^t C(t-\tau) \sigma B_2 u_2(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t C(t-\tau) \{f(\tau) + B_1 u_1(\tau) + v_3^h(\tau)\} d\tau, \quad t \in T$$

Как известно [15], при условии (1.8) такое решение существует и единственно.

Пусть $\varphi_x(\cdot)$ и $\varphi_{\dot{x}}(\cdot)$ — соответственно модули непрерывности функций $t \rightarrow x(t) = x(t; 0; x_0, x_{10}, u_*(\cdot)) \in H$, $t \rightarrow x_t(t) = x_t(t; 0; x_0, x_{10}, u_*(\cdot)) \in H^{-1}(\Omega)$ на T , т.е. выполнены соотношения

$$\varphi_x(\delta) = \sup\{|x(t_1) - x(t_2)|_H : t_1, t_2 \in T, |t_1 - t_2| < \delta\}$$

$$\varphi_{\dot{x}}(\delta) = \sup\{|x_t(t_1) - x_t(t_2)|_{H^{-1}(\Omega)} : t_1, t_2 \in T, |t_1 - t_2| < \delta\}$$

Пусть также выбраны семейство $\{\Delta_h\}$ равномерных разбиений (1.10) отрезка T с диаметрами $\delta = \delta(h)$ и функция $\alpha(\cdot) : [0, 1) \rightarrow R^+$, удовлетворяющие следующему условию согласования параметров.

Условие 2

$$\delta(h) \rightarrow 0+, \quad \alpha(h) \rightarrow 0+$$

$$\{\delta(h) + h + \varphi_x(\delta(h)) + \varphi_{\dot{x}}(\delta(h))\} \alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

Алгоритм решения рассматриваемой задачи аналогичен описанному в разд. 1. Прежде всего выбирается семейство $\{\Delta_h\}$ и функция $\alpha(h)$, удовлетворяющие условию 2. По поступлении (до начала процесса) величины h она фиксируется. Вместе с ней фиксируются Δ_h и $\alpha(h)$. Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. В течение i -го шага, выполняемого на промежутке времени $\delta_i = \delta_{h,i} = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, осуществляются следующие операции. Сначала, в момент τ_i определяется управление

$$v^h(t) = \{v_{1i}^h, v_{2i}^h, v_{3i}^h : t \in \delta_i\}$$

где

$$v_{1i}^h = \arg \min \{2(A^{-1}s_*^{(i)}, A^{-1}B_1 v_1)_H + \alpha(h) |v_1|_{U_1}^2 : v_1 \in P_1\}$$

$$v_{2i}^h = \arg \min \{2(s_*^{(i)}, A^{-1}\sigma B_2 v_2)_H + \alpha(h) |v_2|_{U_2}^2 : v_2 \in P_2\}$$

$$v_{3i}^h = \Phi(\xi_i^{(1)})$$

$$s_*^{(i)} = A^{-1}(\psi_i - \xi_i^{(2)}), \quad |\psi_i - w_t^h(\tau_i)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq h$$

Затем это управление подается на вход модели. После этого происходит пересчет фазового состояния модели: вместо $w(\tau_i)$ находится $w(\tau_{i+1})$. Вся процедура осуществляется до момента ϑ .

Пусть $U(z(\cdot))$ — множество всех управлений из $P(\cdot)$, совместимых с выходом $z(\cdot)$, т.е. выполнено соотношение, аналогичное (1.12), при замене $S(t)x_0$ на $C(t)x_0 + T(t)x_{10}$ и $S(t-\tau)$ на $T(t-\tau)$. Это множество также выпукло, ограничено и замкнуто в $L_2(T; U)$. Поэтому оно содержит единственный элемент $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; z(\cdot)) = \{u_{1*}(\cdot; z(\cdot)), u_{2*}(\cdot; z(\cdot))\}$

минимальной $L_2(T; U)$ -нормы.

Пусть $v_0^h(\cdot) = \{v_1^h(\cdot), v_2^h(\cdot)\}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 2, начальное состояние $w_0^h \in H$ и $w_{10} \in H^{-1}(\Omega)$ модели таково, что

$$\|x_0 - w_0\|_H \leq h, \quad \|x_{10} - w_{10}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq h$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое h_2 , что при $h \leq h_2$ справедливо неравенство (1.13).

Введем функционал Ляпунова

$$\lambda(t) = \lambda^{(1)}(t) + \lambda^{(2)}(t) + E(t)$$

где

$$\lambda^{(1)}(t) = \|A^{-1}y^h(t)\|_H^2, \quad \lambda^{(2)}(t) = \|A^{-1}y_t^h(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$$

$$y^h(t) = w(t) - x(t)$$

Функционал $E(t)$ определен формулой (1.15).

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 2. Равномерно по всем разбиениям Δ_h и измерениям ξ_i , удовлетворяющим неравенствам (2.3), справедливо неравенство

$$\lambda(\tau_i) \leq k(\delta + h + \varphi_x(\delta) + \varphi_{\dot{x}}(\delta)), \quad i = 1, \dots, m$$

При доказательстве леммы 2 используются свойства оператора "синуса" и "косинуса" [12, 18] и устанавливаются следующие неравенства:

$$\lambda^{(1)}(\tau_{i+1}) \leq \lambda^{(1)}(\tau_i) + 2\delta(A^{-1}y(\tau_i), A^{-1}y_t(\tau_i))_{L_2(\Omega)} + K_1\delta(h + \delta)$$

$$\lambda^{(2)}(\tau_{i+1}) \leq \lambda^{(2)}(\tau_i) - 2\delta(A^{-1}y(\tau_i), A^{-1}y_t(\tau_i))_{L_2(\Omega)} + K_2\delta(h + \delta) +$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [2(A^{-1}s_*^{(i)}, A^{-1}B_1(v_{1i}^h - u_{1*}(s)))_H + \alpha(h)\{|v_{1i}^h\|_{U_1}^2 - \|u_{1*}(s)\|_{U_1}^2\}]ds +$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [2(s_*^{(i)}, A^{-1}\sigma B_2(v_2 - u_{2*}(s)))_H + \alpha(h)\{|v_{2i}^h\|_{U_2}^2 - \|u_{2*}(s)\|_{U_2}^2\}]ds$$

Замечания. 1°. Для решения задачи реконструкции управлений в гиперболической системе можно также воспользоваться полугрупповым подходом, ибо, как известно, оператор

$$A_* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

порождает C_0 -полугруппу на пространстве $H \times H^{-1}(\Omega)$, такую, что решение задачи (2.1), (2.2), (1.3) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} &= \exp(A_* t) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} - A_* \int_0^t \exp(A_*(t-s)) \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma B_2 u_2(s) \end{pmatrix} ds + \\ &+ \int_0^t \exp(A_*(t-s)) \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi(x(s), \dot{x}(s)) + B_1 u_1(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

2°. Описанные в работе алгоритмы могут быть пригодны (при соответствующей корректировке) для решения задачи реконструкции граничных управлений в уравнении Дирихле в

случае, когда рассматриваемая динамическая система описывается другими типами нелинейных уравнений с распределенными параметрами.

Авторы благодарят Ю.С. Осипова за внимание к работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00046) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS – 96-0816).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
3. Banks H.T., Kunisch K. Estimation techniques for distributed parameter systems. Boston et al.: Birkhauser, 1989. 315 p.
4. Кряжковский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
5. Krjzinskii A.V., Osipov Yu.S. On positional calculation of Ω -normal controls in dynamical systems // Problem Control and Inform. Theory. 1984. V. 13. № 6. P. 425–436.
6. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995. 653 p.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Osipov Yu.S. On the reconstruction of a parameter for hyperbolic system. WP IIASA, Luxemburg, Austria, 1991. 32 p.
9. Осипов Ю.С., Кряжковский А.В., Максимов В.И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: Изд. Ин-та мат. и мех. УрО РАН, 1991. 114 с.
10. Короткий А.И., Осипов Ю.С. Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. С. 154–164.
11. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Dynamical inverse problems for systems with distributed parameters // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1991. V. 4. № 4. P. 267–282.
12. Fattorini H. Ordinary differential equations in linear topological spaces. // J. Different. Equations. 1969. Pt 1. V. 5. № 1. P. 72–105; Pt 2. V. 6. № 1. P. 50–70.
13. Lasiecka I., Triggiani R. Exact controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems // Appl. Math. and Optimizat. 1991. V. 23. № 2. P. 109–154.
14. Lasiecka I. Boundary control of parabolic systems: regularity of optimal solutions // Appl. Math. and Optimizat. 1978. V. 4. № 4. P. 301–327.
15. Lasiecka I., Triggiani R. A cosine operator approach to modeling $L_2(0; T; L_2(\Gamma))$ -boundary input hyperbolic equations // Appl. Math. and Optimizat. 1981. V. 7. № 1. P. 35–93.
16. Lasiecka I., Lions J.-L., Triggiani R. Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators // J. Math. pures et appl. 1986. V. 65. № 2. P. 227–243.
17. Barbu V. Boundary control problems with convex cost criterion // SIAM Journal Control and Optimiz. 1980. V. 18. № 2. P. 227–243.
18. Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. mat. 1966. V. 49. 47 p.

Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru
Турин
e-mail: lucipan@polito.it

Поступила в редакцию
25.V.1999