

УДК 531.36; 62–50

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ СЛОЖНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© 1999 г. Ф.Л. Черноусько

Рассматривается простейшая динамическая система с одной степенью свободы, управляемая посредством ограниченной по величине силы. Предполагается, что величина силы может наращиваться постепенно, с конечной скоростью, и мгновенно выключаться. При этих ограничениях, моделирующих реальные системы приводов, построено управление, приводящее систему в начало координат и имеющее простейшую возможную структуру.

1. Постановка задачи. Простейшая динамическая система с одной степенью свободы, описываемая вторым законом Ньютона, неоднократно служила моделью в теории управления [1, 2]. С одной стороны, на этой модели отрабатывались и демонстрировались постановки и методы решения задач управления. С другой стороны, система с одной степенью свободы использовалась как элемент в некоторых схемах декомпозиции нелинейных систем со многими степенями свободы на более простые подсистемы [3, 4].

Рассмотрим систему с одной степенью свободы вида

$$m\ddot{\xi} = F \quad (1.1)$$

где ξ – координата, m – постоянная масса системы, точками обозначаются производные по времени t , F – управляющая сила, на которую наложено ограничение

$$|F| \leq F_0 \quad (1.2)$$

где F_0 – постоянная. Рассмотрим задачу о приведении системы (1.1) в начало координат фазовой плоскости, т.е. в состояние $\xi = \dot{\xi} = 0$. Если никаких ограничений, кроме (1.2), на систему не наложено, то оптимальное по быстродействию управление, решающее эту задачу, хорошо известно [1] и представляет собой релейное управление, имеющее не более одного переключения. Типичная зависимость от времени для этого управления приведена на фиг. 1. Допускается возможность мгновенного включения и выключения управляющей силы.

В реальных системах приводов, реализующих управляющие воздействия, мгновенные изменения силы часто оказываются невозможными. Если учесть, что величина силы может изменяться с конечной скоростью, то приходим к ограничению

$$|\dot{F}| \leq \nu_0 \quad (1.3)$$

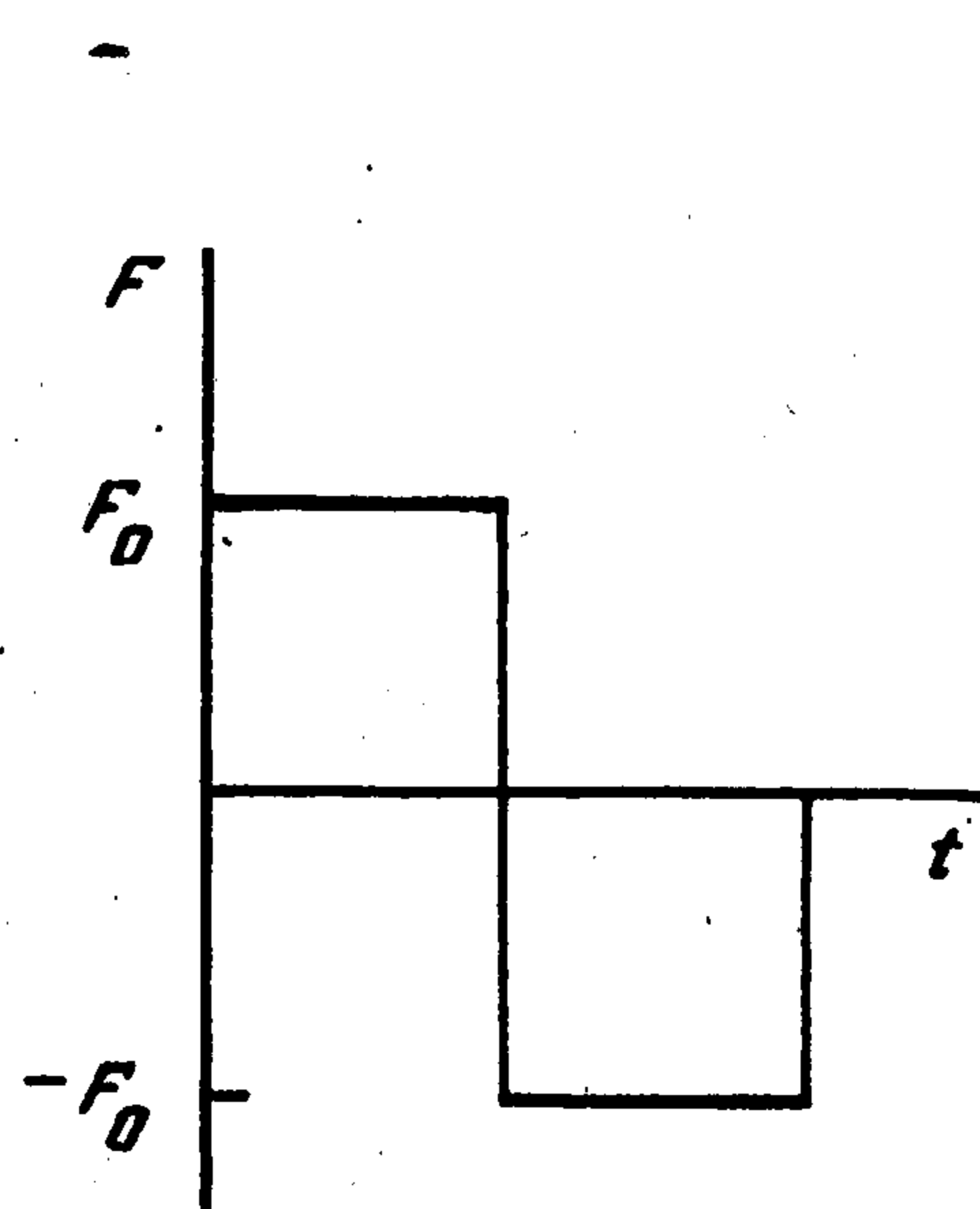
где ν_0 – постоянная.

Решение задачи синтеза оптимального быстродействия для системы (1.1) при ограничении (1.3) для нулевого конечного состояния $\xi = \dot{\xi} = 0$ получено в [5]. При этом ограничение (1.2) на величину силы не учитывалось, т.е. предполагалось, что оно не достигается. Решение задачи оптимального быстродействия для системы (1.1) при учете обоих ограничений (1.2) и (1.3) не встречалось автору в литературе.

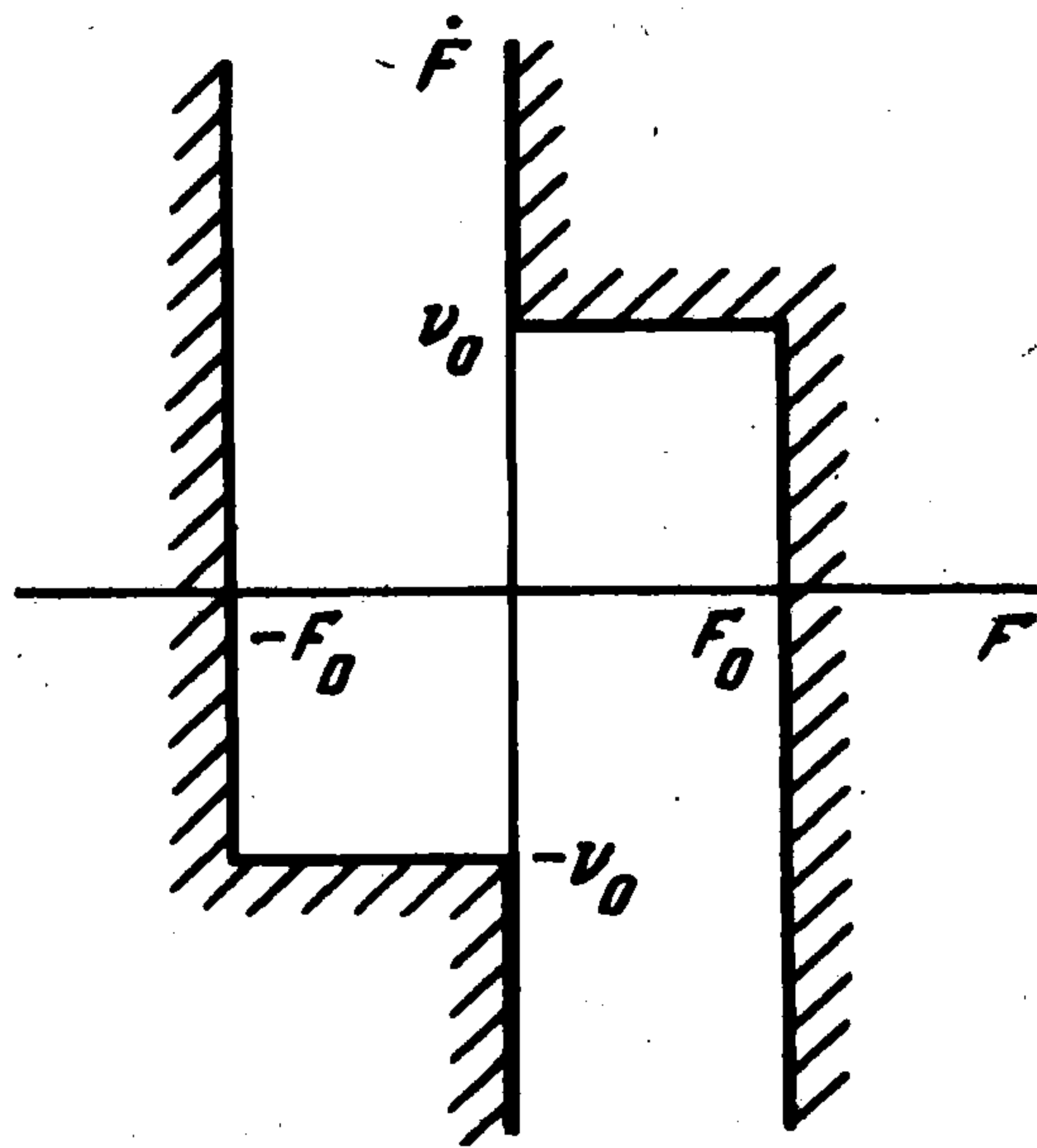
Задача управления системой (1.1) рассматривается в следующей постановке. Предполагается, что управляющая сила ограничена условием (1.2), а условие (1.3) выполняется лишь в случае, когда величина силы растет, т.е., когда $d|F|/dt > 0$. В то же время сила может выключаться мгновенно. Эти ограничения можно записать в виде совокупности неравенств

$$|F| \leq F_0; \quad \dot{F} \leq v_0 \text{ при } F \geq 0, \quad \dot{F} \geq -v_0 \text{ при } F \leq 0 \quad (1.4)$$

Область, задаваемая ограничениями (1.4) в плоскости $(F, \dot{F})$, изображена на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Ограничения (1.4) моделируют следующую ситуацию: управляющую силу можно наращивать только постепенно, с конечной скоростью, а выключать — мгновенно. Такая картина нередко имеет место на практике, так как торможение часто осуществляется иными средствами, чем разгон.

Введем безразмерные переменные

$$t' = v_0 F_0^{-1} t, \quad x = m v_0^2 F_0^{-3} \xi, \quad y = m v_0 F_0^{-2} \dot{\xi}, \quad z = F_0^{-1} F, \quad u = v_0^{-1} \dot{F} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.1) и ограничения (1.4) в переменных (1.5) примут вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = u \quad (1.6)$$

$$|z| \leq 1; \quad u \leq 1 \text{ при } z \geq 0, \quad u \geq -1 \text{ при } z \leq 0 \quad (1.7)$$

Здесь и далее точками обозначаем производные по новому (безразмерному) времени. Штрих у безразмерного времени далее опускаем.

Начальные условия для системы (1.6) зададим в виде

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = 0 \quad (1.8)$$

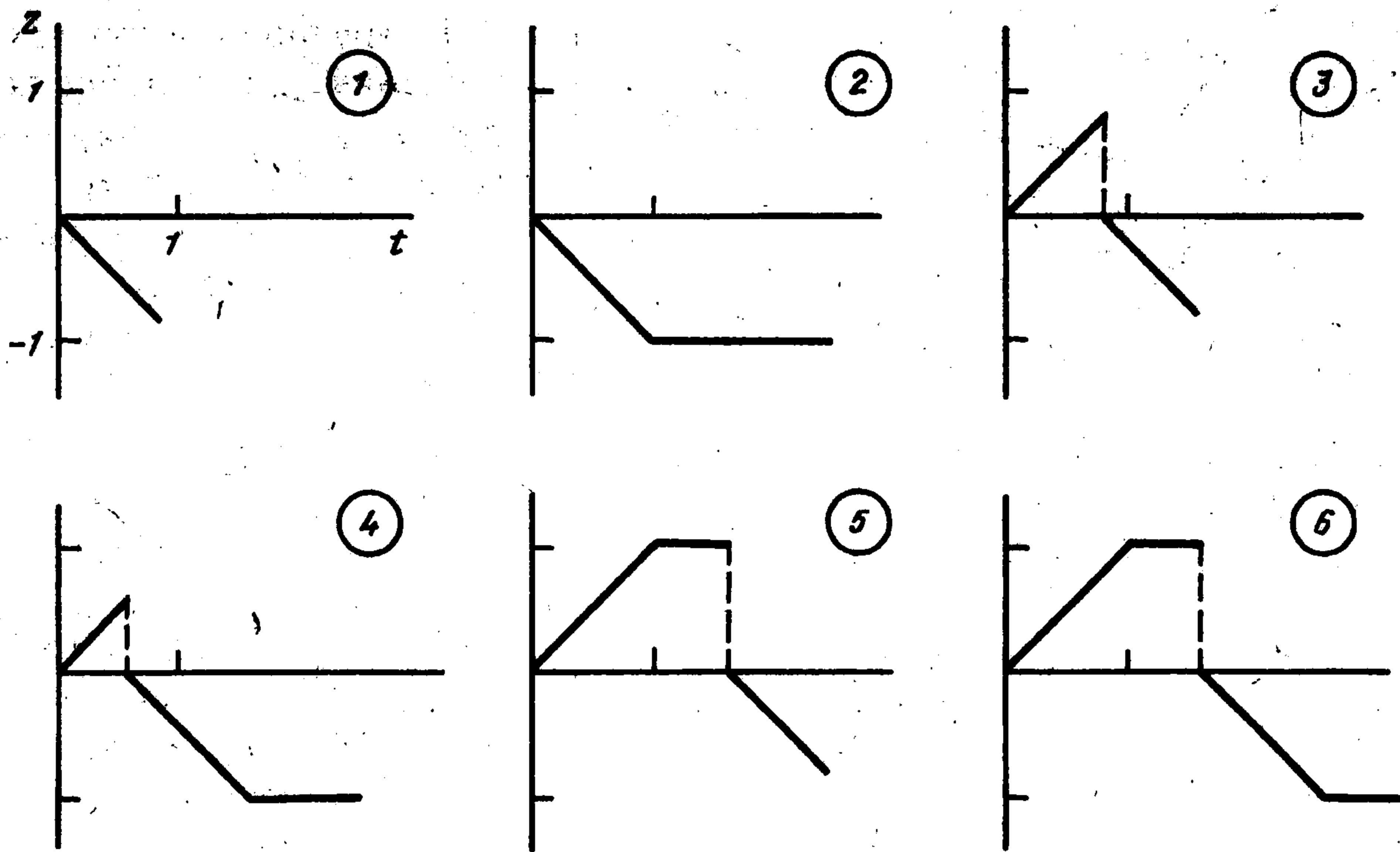
а конечное состояние — в виде

$$x(T) = 0, \quad y(T) = 0 \quad (1.9)$$

Отметим, что значение $z(T)$ в конечный момент может быть всегда сделано равным нулю за счет скачка силы $z(t)$ в момент $t = T$, что допускается ограничениями (1.7). Поэтому можно считать, что условие $z(T) = 0$ всегда выполнено.

Поставим следующую задачу.

Найти управление $u(t)$ и соответствующую траекторию, т.е. функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, удовлетворяющие уравнениям (1.6), ограничениям (1.7), начальным условиям (1.8) и конечным условиям (1.9) в некоторый (нефиксированный) момент времени $T > 0$.



Фиг. 3

Ниже строится управление, решающее поставленную задачу и имеющее наиболее простую структуру, допускаемую ограничениями (1.7). По-видимому, это управление является оптимальным в смысле быстродействия.

2. Типы решений. Возможные типы законов изменения безразмерной силы $z(t)$ представлены на фиг. 3. Здесь показаны участки постепенного роста или убывания силы, на которых $\dot{z} = \pm 1$, и участки постоянства силы, на которых $\dot{z} = 0$. Эти законы обладают следующими свойствами.

1°. В начале процесса имеем $z(0) = 0$ в соответствии с начальными условиями (1.8).

2°. Законы 1–6 фиг. 3 удовлетворяют ограничениям (1.7).

3°. Непосредственно перед окончанием процесса имеем $z(t) < 0$ при $t \rightarrow T$. Это условие принято для определенности и не ограничивает общности, так как наряду с законами, изображенными на фиг. 3, можно аналогично рассмотреть симметричные им относительно оси t законы $z'(t) = -z(t)$.

4°. Законы фиг. 3 имеют не более одного скачка и одной смены знака силы $z(t)$.

5°. Закон 6 фиг. 3 является непосредственным обобщением релейного закона фиг. 1 на случай постепенного наращивания величины силы, то есть на случай ограничений (1.7).

6°. Остальные законы 1–5 фиг. 3 являются частными случаями закона 6. Действительно, в законе 5 не достигается ограничение $z = -1$; в законе 4 не достигается ограничение $z = 1$; в законе 3 не достигаются оба ограничения $z = \pm 1$; в законах 1 и 2 отсутствует скачок зависимости $z(t)$, причем в законе 2 ограничение $z = -1$ достигается, а в законе 1 оно не достигается.

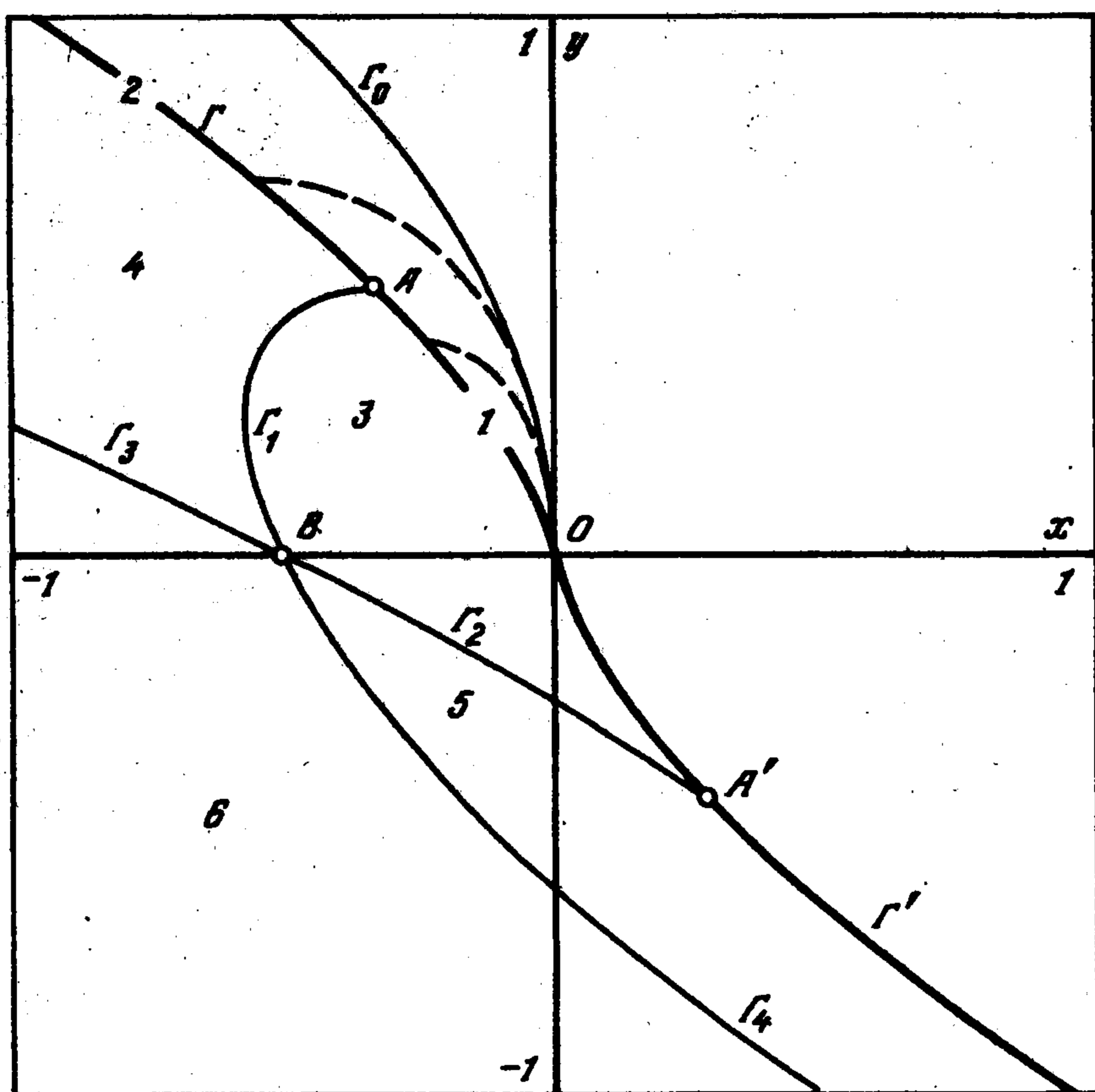
Как будет показано ниже, при помощи законов для $z(t)$ вида 1–6, а также симметричных им законов $z'(t) = -z(t)$, можно привести систему (1.6) из любого начального состояния (1.8) в конечное состояние (1.9).

Введем в рассмотрение область D плоскости xu , задаваемую неравенствами

$$D = \left\{ (x, u) : \begin{array}{ll} x < -\varphi(-u) & \text{при } u \leq 0 \\ x \leq \varphi(u) & \text{при } u > 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Функция $\varphi(u)$ определена следующим образом:

$$\varphi(u) = \begin{cases} -(2u)^{3/2} / 3 & \text{при } 0 \leq u \leq 1/2 \\ 1/24 - u/2 - u^2/2 & \text{при } u \geq 1/2 \end{cases} \quad (2.2)$$



Фиг. 4

Нетрудно проверить, что соотношения (2.2) определяют $\varphi(y)$ как гладкую функцию, монотонно убывающую от 0 до $-\infty$ на полуоси $y \in [0, \infty)$. В точке $y = 1/2$ имеем $\varphi(y) = -1/3$, $\varphi'(y) = -1$.

Кривые Γ и Γ' , определяемые соответственно, для $y \geq 0$ и $y \leq 0$ соотношениями $x = \varphi(y)$ и $x = -\varphi(-y)$, изображены на фиг. 4 жирными линиями. На этих кривых, симметричных друг другу относительно начала координат, отмечены точки $A = (-1/3, 1/2)$ и $A' = (1/3, -1/2)$, в которых гладко сопрягаются участки, определяемые соотношениями (2.2).

Кривые Γ и Γ' образуют границу области D , причем, согласно (2.1), кривая Γ , лежащая во вто-

ром квадранте плоскости xy , принадлежит D , а кривая Γ' , лежащая в четвертом квадранте, не входит в D . Если область D дополнить областью D' , симметричной ей относительно начала координат, то получится вся плоскость xy с выброшенной точкой O — началом координат. Согласно (1.9), эта точка является конечной, и поэтому не представляет интереса в качестве начальной точки: если $x = y = 0$ при $t = 0$, то процесс управления является излишним.

Ниже будет построено управление и траектории, т.е. функции $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, для всех начальных точек $(x_0, y_0) \in D$. Если же $(x_0, y_0) \in D'$, то искомое решение задается функциями $\{-u(t), -x(t), -y(t), -z(t)\}$, где набор $\{u(t), x(t), y(t), z(t)\}$ соответствует начальной точке $(-x_0, -y_0) \in D$, симметричной $(x_0, y_0) \in D'$. При этом уравнения (1.6) и ограничения (1.7) выполняются, полученные траектории из точки $(x_0, y_0) \in D'$ будут симметричны траекториям из точки $(-x_0, -y_0) \in D$ и также придут в начало координат, причем за то же время.

Таким образом, поставленную задачу управления достаточно решить для начальных точек $(x_0, y_0) \in D$. Это будет реализовано при помощи законов 1–6, изображенных на фиг. 3.

3. Построение траекторий. Для каждого из законов 1–6 фиг. 3 построим соответствующие траектории и найдем области D_i , $i = 1, \dots, 6$, начальных значений x_0, y_0 в области D , из которых данный закон приводит систему в конечное состояние $x(T) = y(T) = 0$. Множества D_i отмечены соответствующими цифрами $i = 1, \dots, 6$ на фиг. 4.

Закон 1. Имеем, согласно фиг. 3, $u = -1$ при $t \in [0, T]$. Интегрируя уравнения (1.6) при начальных условиях (1.8), получим

$$u = -1, \quad z = -t, \quad y = y_0 - t^2/2, \quad x = x_0 + y_0 t - t^3/6 \quad (3.1)$$

Положим $t = T$ в соотношениях (3.1) и подставим их в конечные условия (1.9). Исключая T , найдем

$$T = (2y_0)^{1/2} < 1 \quad (3.2)$$

$$x_0 = -(2y_0)^{3/2}/3 \quad (3.3)$$

Неравенство $T < 1$ следует из того, что ограничение $z = -1$ для закона 1 не достигается, см. фиг. 3. Из (3.2), (3.3) вытекают неравенства

$$-1/3 < x_0 < 0, \quad 0 < y_0 < 1/2 \quad (3.4)$$

Таким образом, закон 1, задаваемый соотношениями (3.1), реализуется, если начальная точка (x_0, y_0) лежит на дуге кривой, определенной уравнением (3.3) и неравенствами (3.4). Следовательно, множество D_1 – это дуга кривой Γ , см. (2.2), отмеченная цифрой 1 на фиг. 4 и заключенная между точкой O и точкой $A = (-1/3, 1/2)$. Все фазовые траектории, начинающиеся на этой дуге, приходят в начало координат, если применяется закон 1. Траектории задаются соотношениями (3.1), а время движения – формулой (3.2). Все эти траектории, как нетрудно проверить, заключены в области между кривой Γ и параболой Γ_0 , определяемой соотношениями

$$\Gamma_0: x = \varphi_0(y) = -y^2/2, \quad y \geq 0 \quad (3.5)$$

Отметим, что парабола Γ_0 является кривой переключений и одновременно фазовой траекторией, входящей в начало координат, для задачи оптимального быстрого действия, если ограничения (1.7) заменить простым ограничением $|z| \leq 1$ [1].

Закон 2. Имеем

$$u = -1, \quad z = -t \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 1 \quad (3.6)$$

$$u = 0, \quad z = -1 \quad \text{при} \quad 1 < t < T$$

Движение на первом участке траектории ($t < 1$) задается соотношениями (3.1). При $t = 1$ получим из (3.1)

$$y(1) = y_0 - 1/2, \quad x(1) = x_0 + y_0 - 1/6 \quad (3.7)$$

Интегрируя уравнения (1.6) с учетом равенств (3.6) и начальных условий (3.7) на втором участке движения ($t > 1$), найдем

$$y(t) = y(1) - (t-1), \quad x(t) = x(1) + y(1)(t-1) - (t-1)^2/2 \quad (3.8)$$

Подставим выражения (3.8) в конечные условия (1.9) и исключим T . Получим

$$T = y(1) + 1 > 1, \quad x(1) = -[y(1)]^2/2 \quad (3.9)$$

Таким образом, точка $(x(1), y(1))$ лежит на параболе Γ_0 из (3.5), и второй участок движения (3.6) при $t \in [1, T]$ происходит по этой параболе вплоть до попадания в начало координат. Подставляя выражения (3.7) в соотношения (3.9), получим условия

$$x_0 = -y_0^2/2 - y_0/2 + 1/24, \quad y_0 \geq 1/2 \quad (3.10)$$

Соотношения (3.10) определяют множество D_2 начальных условий, для которых закон 2 обеспечивает попадание в начало координат. Множество D_2 представляет собой часть кривой Γ (см. (2.2)) от точки $A = (-1/3, 1/2)$ включительно до бесконечности. Все траектории, начинающиеся на этом множестве, заключены между Γ и Γ_0 , причем их второй участок (при $t > 1$) лежит на параболе Γ_0 . Типичные траектории для законов 1 и 2 изображены штриховыми линиями на фиг. 4.

Таким образом, если начальная точка (x_0, y_0) лежит на кривой Γ , то поставленную задачу решают законы управления 1 и 2, причем закон 1 имеет место, если точка (x_0, y_0) лежит между O и A , а закон 2 – если она лежит слева от A на фиг. 4.

Обратимся теперь к законам 3–6 фиг. 3 и обозначим через θ момент скачка функций $z(t)$, $\theta \in (0, T)$. Нетрудно видеть, что зависимости $z(t)$ при $t > \theta$ для всех законов 3–6 фиг. 3 совпадают с зависимостью $z(t)$ при $t > 0$ для одного из законов 1 или

2, причем для законов 3 и 5 – с законом 1, а для 4 и 6 – с законом 2. Поэтому отрезки траекторий для законов 3–6 при $t > \theta$ совпадают с траекториями для одного из законов 1 или 2. Следовательно, точка $(x(\theta), y(\theta))$ для законов 3–6 должна принадлежать множествам начальных условий для соответствующих законов 1, 2, а именно

$$(x(\theta), y(\theta)) \in D_1 \text{ для законов 3, 5}$$

(3.11)

$$(x(\theta), y(\theta)) \in D_2 \text{ для законов 4, 6}$$

Для вычисления значений $x(\theta), y(\theta)$ отметим, что, с точностью до знаков, законы изменения $z(t)$ при $t < \theta$ в случаях 3 и 4 совпадают с законом 1, а в случаях 5 и 6 – с законом 2. Поэтому, изменяя соответствующие знаки и полагая $t = \theta$, получим, из (3.1) для законов 3 и 4

$$y(\theta) = y_0 + \theta^2 / 2, \quad x(\theta) = x_0 + y_0 \theta + \theta^3 / 6, \quad \theta < 1 \quad (3.12)$$

Пользуясь формулами (3.7) и (3.8), получим аналогично для законов 5 и 6

$$y(\theta) = y_0 + \frac{1}{2} + (\theta - 1) = y_0 + \theta - \frac{1}{2}$$

$$x(\theta) = x_0 + y_0 + \frac{1}{6} + (y_0 + \frac{1}{2})(\theta - 1) + (\theta - 1)^2 / 2 =$$

$$= x_0 + y_0 \theta + \theta^2 / 2 - \theta / 2 + \frac{1}{6}, \quad \theta \geq 1 \quad (3.13)$$

Найдем области D_i в плоскости x, y , в которых лежат начальные данные x_0, y_0 для соответствующих законов, $i = 3, 4, 5, 6$. Для этого воспользуемся соотношениями (3.11)–(3.13) и приведенными выше определениями множеств D_1 и D_2 .

Закон 3. Подставим в уравнение (3.3) и неравенства (3.4), определяющие множество D_1 , вместо x_0, y_0 выражения (3.12) для $x(\theta), y(\theta)$. Получим

$$x_0 = -y_0 \theta - \theta^3 / 6 - (2y_0 + \theta^2)^{3/2} / 3 \quad (3.14)$$

$$0 < 2y_0 + \theta^2 < 1, \quad 0 < \theta < 1$$

Найдем границы множества D_3 , заданного в параметрическом виде соотношениями (3.14). Для этого достаточно рассмотреть четыре случая, отвечающих достижению равенства в каждом из четырех неравенств (3.14).

Положим сначала $2y_0 + \theta^2 = 0$.

Подставляя найденное из этого равенства значение θ в равенство (3.14), найдем

$$x_0 = (-2y_0)^{3/2} / 3, \quad -\frac{1}{2} < y_0 < 0 \quad (3.15)$$

Соотношения (3.15) определяют, согласно (2.1) и (2.2), отрезок кривой Γ' от начала координат до точки $A' = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$, см. фиг. 4.

Полагая $2y_0 + \theta^2 = 1$ и подставляя найденное отсюда значение θ в равенство (3.4), получим

$$x_0 = -\frac{1}{3} - y_0(1 - 2y_0)^{1/2} - (1 - 2y_0)^{3/2} / 6, \quad 0 < y_0 < \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

Соотношения (3.16) определяют в плоскости x, y дугу кривой Γ_1 , соединяющей точки

$A = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ и $B = (-\frac{1}{2}, 0)$. Эта кривая показана на фиг. 4.

Полагая $\theta = 0$, получим из (3.14)

$$x_0 = -(2y_0)^{3/2} / 3, \quad 0 < y_0 < \frac{1}{2}$$

Этот участок границы множества D_3 , согласно (2.2), совпадает с множеством D_1 , т.е. с дугой OA кривой Γ .

Наконец, полагая $\theta = 1$, получим из (3.14)

$$x_0 = -\frac{1}{6} - y_0 - (2y_0 + 1)^{3/2} / 3, \quad -\frac{1}{2} < y_0 < 0 \quad (3.17)$$

Соотношения (3.17) определяют в плоскости xu дугу кривой, соединяющей точки B и A' . Эта кривая Γ_2 в точке A' касается кривой Γ' , см. фиг. 4.

Таким образом, множество D_3 представляет собой криволинейный четырехугольник $OABA'$, ограниченный дугами кривых Γ (от точки O до A), Γ_1 , Γ_2 и Γ' (от A' до O).

Закон 4. Подставляя в соотношения (3.10), определяющие множество D_2 , выражения (3.12) для $x(\theta)$, $y(\theta)$ вместо x_0 , y_0 , получим

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{24} - y_0^2 / 2 - y_0 \theta^2 / 2 - y_0 \theta - y_0 / 2 - \theta^4 / 8 - \theta^3 / 6 - \theta^2 / 4 \\ 2y_0 + \theta^2 &\geq 1, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Границы множества D_4 найдем, поочередно заменяя равенством каждое из трех неравенств в (3.18).

Положим сначала $2y_0 + \theta^2 = 1$ и исключим из данного равенства θ : $\theta = (1 - 2y_0)^{1/2}$. Подставляя полученное значение θ в равенство (3.18), придем после упрощений к соотношениям, определяющим дугу Γ_1 .

Полагая $\theta = 0$ в (3.18), получим, как легко проверить, соотношения (3.10), определяющие множество D_2 , то есть дугу кривой Γ от точки A до бесконечности.

Полагая $\theta = 1$ в (3.18), будем иметь

$$x_0 = -y_0^2 / 2 - 2y_0 - \frac{1}{2}, \quad y_0 \geq 0 \quad (3.19)$$

Кривая Γ_3 , определяемая соотношениями (3.19), начинается в точке $B = (-1/2, 0)$ и уходит на бесконечность, см. фиг. 4.

В результате, множество D_4 ограничено множеством D_2 , кривой Γ_1 , по которой оно граничит с D_3 , и кривой Γ_3 .

Закон 5. Подставим в уравнение (3.3) и неравенства (3.4), определяющие множество D_1 , выражения (3.13) для $x(\theta)$, $y(\theta)$ вместо x_0 , y_0 . Получим

$$\begin{aligned} x_0 &= -y_0 \theta - \theta^2 / 2 + \theta / 2 - \frac{1}{6} - (2y_0 + 2\theta - 1)^{3/2} / 3 \\ \frac{1}{2} < y_0 + \theta < 1, \quad \theta \geq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Найдем границы множества D_5 , рассуждая аналогично предыдущим случаям и заменяя поочередно каждое из трех неравенств (3.20) равенством.

Полагая $y_0 + \theta = 1/2$, найдем $\theta = 1/2 - y_0$. Подставляя найденное значение θ в равенство (3.20), получим

$$x_0 = y_0^2 / 2 - y_0 / 2 - \frac{1}{24}, \quad y_0 \leq -\frac{1}{2}$$

В соответствии с (2.2), эти соотношения определяют дугу кривой Γ' от точки $A' = (1/3, -1/2)$ до бесконечности; эта дуга симметрична множеству D_2 относительно начала координат.

Полагая $y_0 + \theta = 1$, получим $\theta = 1 - y_0$. Подставляя это соотношение в равенство (3.20), получим

$$x_0 = y_0^2 / 2 - y_0 / 2 - \frac{1}{2}, \quad y_0 \leq 0 \quad (3.21)$$

Соотношения (3.21) определяют кривую Γ_4 , начинающуюся в точке $B = (-1/2, 0)$ и уходящую на бесконечность, см. фиг. 4.

Полагая $\theta = 1$ в (3.20), придем к соотношениям (3.17), определяющим кривую Γ_2 .

Таким образом, множество D_5 ограничено дугой Γ_2 , по которой оно граничит с множеством D_3 , кривой Γ_4 и дугой кривой Γ' от точки A' до бесконечности.

Закон 6. Подставим в соотношения (3.10), определяющие множество D_2 , соотношения (3.13) для $x(\theta)$, $y(\theta)$ вместо x_0 , y_0 . Получим

$$x_0 = -y_0^2/2 - 2y_0\theta - \theta^2 + \theta/2, \quad y_0 + \theta \geq 1, \quad \theta \geq 1 \quad (3.22)$$

Заменяя равенством первое из неравенств (3.22), найдем $\theta = 1 - y_0$. Подставляя это выражение в равенство (3.22), приходим к соотношениям (3.21), определяющим кривую Γ_4 .

Полагая $\theta = 1$ в (3.22), получим соотношения (3.19), определяющие кривую Γ_3 .

Таким образом, множество D_6 граничит с множествами D_4 и D_5 по кривым Γ_3 и Γ_4 , соответственно, и лежит снизу и слева от этих кривых, имеющих общую точку $B = (-1/2, 0)$.

Заметим, что кривые Γ_2 , Γ_3 и кривые Γ_1 , Γ_4 имеют попарно общие касательные в точке B .

4. Заключение. Решение поставленной задачи управления можно описать следующим образом. По заданному начальному состоянию (1.8), лежащему в области D плоскости xu , определим, в какой из областей D_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) оно находится. Границы между областями заданы кривыми Γ , Γ' , Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 , определенными соотношениями (2.2), (3.16), (3.17), (3.19), (3.21). Границей между множествами D_1 и D_2 служит точка $A = (-1/3, 1/2)$.

1°. Если $(x_0, y_0) \in D_1$, то полагаем $u \equiv -1$ при $t > 0$. Система попадает в заданное состояние $x = y = 0$ за время $T < 1$.

2°. Если $(x_0, y_0) \in D_2$, то полагаем $u = -1$ при $t \in (0, 1)$ и $u = 0$ при $t \geq 1$. Система попадает в конечное состояние за время $T \geq 1$.

3°. Если $(x_0, y_0) \in D_3$, то $u = 1$ при $t \in (0, \theta)$, где момент $\theta < 1$ определяется условием $(x(\theta), y(\theta)) \in D_1$. В момент $t = \theta$ скачком делаем z равным нулю, что допускается ограничениями (1.7). При $t > \theta$ полагаем $u = -1$ до конца процесса. Траектория при $t > \theta$ — такая же, как для закона 1.

4°. Если $(x_0, y_0) \in D_4$, то $u = 1$ при $t \in (0, \theta)$, где момент $\theta < 1$ определяется условием $(x(\theta), y(\theta)) \in D_2$. В момент $t = \theta$ скачком делаем z равным нулю. Далее полагаем $u = -1$ при $t \in (\theta, \theta + 1)$ и $u = 0$ при $t \in (\theta + 1, T)$.

5°. Если $(x_0, y_0) \in D_5$, то $u = 1$ при $t \in (0, 1)$ и $u = 0$ при $t \in (1, \theta)$, где момент $\theta > 1$ определяется условием $(x(\theta), y(\theta)) \in D_1$. В момент θ скачком делаем z равным нулю, после чего $u = -1$ при $t \in (\theta, T)$ до конца процесса.

6°. Если $(x_0, y_0) \in D_6$, то $u = 1$ при $t \in (0, 1)$ и $u = 0$ при $t \in (1, \theta)$, где момент $\theta > 1$ определяется условием $(x(\theta), y(\theta)) \in D_2$. В момент θ скачком делаем z до нуля. Далее полагаем $u = -1$ при $t \in (\theta, \theta + 1)$ и $u = 0$ при $t \in (\theta + 1, T)$.

Заметим, что $T < 1$ в случае 1, $T > 1$ в случаях 2, 4, 5 и $T > 2$ в случае 6.

Все траектории, начинающиеся в области D , лежат в области, ограниченной кривыми Γ_0 и Γ' (слева и снизу от этих кривых), см. фиг. 4. При этом они входят в начало координат, касаясь в точке O кривой Γ_0 (для законов 1, 3, 5) или совпадая с Γ_0 на своем последнем участке (для законов 2, 4, 6), см. кривые на фиг. 4.

Если начальная точка (x_0, y_0) лежит в области D' , симметричной D относительно начала координат, то управление следует брать равным по величине и противоположным по знаку тому управлению, которое отвечает точке $(-x_0, -y_0) \in D$.

Построенное решение получено при начальных условиях (1.8), которые предусматривают, что $z(0) = 0$. Общий случай начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \quad (4.1)$$

сводится к рассмотренному выше, если в начальный момент $t = 0$ изменить скачком z , сделав его равным нулю, что допускается ограничениями (1.7). Таким образом, построенное решение пригодно в случае общих начальных условий (4.1).

Однако в этом случае оно утрачивает свойство оптимальности по быстродействию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00258) и Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
4. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 457–472.
5. Черноусько Ф.Л., Шматков А.М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 723–731.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1999