УДК 539.312:534

© 1999 г. С.Е. Носов

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Получено точное решение антиплоской задачи о дифракции плоской упругой SH-волны ступенчатого профиля на клине. Напряжения на щеках клина считаются пропорциональными линейной комбинации перемещений, скоростей и высших производных от перемещений вдоль оси клина по времени. Решение задачи получено с помощью интегральных преобразований с последующим преобразованием по методу Каньяра. Рассмотрены решения соответствующих задач при граничных условиях винклеровского и инерционного типов. При падении волны линейного профиля напряжения терпят разрыв второго рода на фронте волны дифракции; тот же тип особенности наблюдается в задаче с инерционным условием.

Аналогичная задача с вязким трением на границе рассматривалась ранее [1].

Рассмотрим динамическую задачу для клиновидной области $r \geqslant 0$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha$, $-\infty < z < +\infty$ (r, θ, z – цилиндрические координаты) о дифракции плоской SH-волны, фронт которой параллелен ребру клина

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\ r > 0,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha$$

$$\pm\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{m=0}^{n} k_m \frac{\partial^m v}{\partial t^m},\ \theta = \pm\alpha \tag{1}$$

$$v = C(t) + o(r^\lambda),\ r \to 0;\ \lambda > 0,\ v = v_0 = H(t - \cos(\theta - \theta_0)),\ t < 0$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. Можно убедиться непосредственной подстановкой, что решение этой системы можно искать в виде

$$v = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} A(p,s)b(p,s)\exp(p(t - r\varphi(s,\theta)))dp\right)ds \tag{2}$$

$$b(p,s) = \frac{p^{n-1}\psi(s)}{P_n(p,s)},\ P_n(p,s) = \sum_{m=0}^{n} k_m p^m + p\psi(s),$$

$$\varphi(s,\theta) = s\cos\theta + \sqrt{1-s^2}\sin\theta,\quad \psi(s) = (\sin\alpha)s + \sqrt{1-s^2}\cos\alpha$$

Контур L лежит в области $\operatorname{Re} s > 0$ для $\alpha \leqslant \theta < \pi$ и соответственно выбирается положительная ветвь радикала, в области $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha$ – наоборот. Выражение (2) при $b(p, s) \equiv p^{-1}$ должно быть решением задачи о дифракции плоской SH-волны на жестком гладком клине.

Дробь $b(p, s)$ разложим на простые

$$b(p,s) = \sum_l \sum_{j=1}^{n_l} \frac{g_{lj}(s)}{(p - p_l)^j}$$

где p_l – корни многочлена $P_n(p, s)$, n_l – их кратности. Так как коэффициенты указанного многочлена не имеют полюсов в конечных точках, то и функции $p_l(s)$ регулярны всюду, кроме бесконечности. Точно так же числитель $g_{lj}(s)$, определяемый из системы линейных уравнений с ненулевым определителем, не имеет полюсов, кроме точки $s = \infty$. Поэтому полюсы подынтегрального выражения (2) целиком определяются сомножителем $A(p, s)$, особые точки которого лежат на действительной прямой и определяют плоские отраженные волны.

Таким образом, структура подынтегрального выражения позволяет деформировать первоначальный контур L в контур Каньяра [2], определяемый соотношениями

$$s = r^{-1}(\tau\cos\theta \pm i\sqrt{\tau^2 - r^2}\sin\theta),\ \tau > r;\ s = r^{-1}(\tau\cos\theta \pm \sqrt{r^2 - \tau^2}\sin\theta),\ \tau \leq r$$

Выражение для перемещений после обращения преобразования Лапласа примет вид

$$v = v_0 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_l \sum_{j=1}^{n_l}\left(\frac{1}{(j-1)!}\int_0^t A'(s)g_{lj}(s)\exp(p_l(s)(t-\tau))(t-\tau)^{j-1}\frac{ds}{d\tau}d\tau\right) \quad (3)$$

Сомножитель $\exp(p_l(s)t)$ ограничен при отрицательном значении действительной части корней $p_l(s)$. Критерий Раусса–Гурвица для многочленов с комплексными коэффициентами [3] позволяет установить, что это условие выполняется, если отрицательны корни многочлена $k_0 + k_1 p + ... + k_n p^n$.

Действительная часть функции $A(s)$ есть не что иное, как возмущенная часть решения задачи дифракции акустической волны на жестком клине. Метод ее определения был подробно изложен [4].

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть дан клин с амортизирующим покрытием, $k_0 \neq 0$. Граничное условие будет следующим:

$$\sigma_{\theta z} = -k_0 v,\ \theta = \pm\alpha$$

Решение задачи дифракции с таким граничным условием получим подстановкой в (2) значений коэффициентов $k_i = 0$ при $i \neq 0$:

$$v = v_0 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_0^t A'(s)\exp\left(\frac{(\tau - t)k_0}{\psi(s)}\right)\right)\frac{ds}{d\tau}d\tau$$

Исследуем характер возмущенного движения вблизи фронта волны дифракции (ФВД) при линейном фронте падающей волны.

$$v_1 = \xi H(\xi),\ \xi = t - r\cos(\theta - \theta_0)$$

Решение указанной задачи получается сверткой (3) с выражением для падающей волны при v_1. Считая величину $\varepsilon = t/r - 1$ малой, можно показать, что перемещения вблизи ФВД пропорциональны $\varepsilon^{3/2}$. Следовательно, при переходе через фронт волны дифракции напряжения остаются непрерывными, однако производная σ_{rz} по переменной r терпит разрыв второго рода.

Аналогичным образом можно получить решение задачи дифракции плоской волны на клине с инерционным краевым условием (напряжения пропорциональны ускорению на поверхности клина)

$$v = v_0 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int_0^t A'(s)\exp((\tau - t)\psi(s))\frac{ds}{d\tau}d\tau$$

Поведение напряжений вблизи ФВД качественно то же, что и в задаче для клина с упругим покрытием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Papadopoulos V.M.* Pulse diffraction by an imperfectly reflection welge // J. Austral. Math. Soc. 1961. V. 2. N 1. P. 97–106.
2. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.* Волны в слоисто-однородных изотропных средах. Ч. 2. Л.: Наука, 1985. 302 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 439 с.
4. *Сагомонян А.Я., Поручиков В.Б.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1970. 120 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1998