УДК 531.36

© 1999 г. З.П. Козлова

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Предлагается обоснование соотношений стереомеханического удара с помощью предельного перехода, когда время ударного воздействия стремится к нулю. В качестве примера дается вывод обобщенной формулы Кельвина для изменения кинетической энергии при ударе.

В основе теории удара лежит предположение, что действие ударной силы происходит в течение очень короткого промежутка времени, а величина этой силы, наоборот, значительна. В результате за время удара положение рассматриваемой системы практически не меняется, а скорости получают конечные приращения. В пределе (когда время ударного воздействия стремится к нулю), приходим к стереомеханической модели удара. Однако стоит признать, что как в классических учебниках (см., например, [1, 2]), так и в современных книгах (например, [3]) отсутствует строгое обоснование этого предельного перехода. Цель настоящей заметки – восполнить этот пробел.

Итак, рассмотрим движение механической системы с n степенями свободы. Пусть $q_1,\ldots, q_n$ – обобщенные координаты, T – кинетическая энергия, $Q_1\ldots, O_n$ – обобщенные силы. Предположим, что на систему действуют еще дополнительные силы $F_l(t),\ldots, F_n(t)$, которые задаются следующим образом: $F_k(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $t > \varepsilon$ (ε – положительный параметр, который затем будет устремлен к нулю), $F_k(t) = I_k/\varepsilon$ при $0 < t \leqslant \varepsilon$, где I_k – некоторые постоянные. В пределе, когда $\varepsilon \to 0$, очевидно, $F_k(t) = I_k\delta(t)$, где δ – дельта-функция Дирака.

При сделанных предположениях движение механической системы определяется из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k+F_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n \tag{1}$$

Кинетическая энергия T и обобщенные силы Q предполагаются гладкими функциями $\dot{q}$, q, t, причем функция T такова, что определено преобразование Лежандра по скоростям $\dot{q}_1,\ldots, \dot{q}_n$. Пусть $p_k = \partial T/\partial \dot{q}_k$ – импульсы, сопряженные координатам q_k.

Рассмотрим некоторое движение $q_\varepsilon(t)$ с начальными данными, не зависящими от ε:

$$q_k(0)=q_k^0,\quad \dot{q}_k(0)=v_k^-$$

Пусть p_k^- – значение канонических импульсов при $t = 0$. Оказывается, существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q_\varepsilon(t)=\hat{q}(t)$$

причем при $t < 0$ и $t > 0$ предельная функция удовлетворяет уравнениям (1), в которых надо положить $F = 0$, а

$$\lim_{t\to -0}\hat{q}_k(t)=q_k^0,\quad \lim_{t\to -0}\dot{\hat{q}}_k(t)=v_k^+ \tag{2}$$

Импульсы p_k^+, отвечающие значениям $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = v^+$, связаны с импульсами p_k^- простым соотношением

$$p_k^+-p_k^-=I_k \tag{3}$$

которое лежит в основе теории стереометрического удара.

Для того чтобы доказать это утверждение, перейдем от уравнений Лагранжа (1) к уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k + F_k, \quad 1 \leq k \leq n \tag{4}$$

где H – кинетическая энергия, представленная в канонических переменных. В уравнениях (4) сделаем замену времени $t \to \tau$ по формуле $t = \varepsilon\tau$. Сила $F_k(\tau)$ будет ненулевой в интервале $0 < \tau \leq l$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, перепишем уравнения Гамильтона

$$q_k' = \varepsilon\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_k}, \quad p_k' = -\varepsilon\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_k} + \varepsilon\tilde{Q}_k + F_k(\tau) \tag{5}$$

Здесь $\tilde{H}, \tilde{Q}_k$ – функции H, Q_k, в которых явно входящее время t заменено на $\varepsilon\tau$. Поскольку правые части уравнений (5) гладко зависят от малого параметра ε, то по теореме Пуанкаре их решения (с фиксированными начальными данными q^0, p^- при $t = 0$) можно представить для значений $0 < \tau \leq 1$ в следующем виде:

$$q_k(\tau) = q_k^0 + \varepsilon(\cdot), \quad p_k(\tau) = p_k^- + I_k\tau + \varepsilon(\cdot) \tag{6}$$

Выражения в скобках – непрерывные функции τ и ε. Полагая $\tau = 1$ (конечное значение времени ударного воздействия) и устремляя ε к нулю, получаем соотношения (2) и (3).

Пусть кинетическая энергия не зависит явно от времени и имеет обычный вид: $T = T_2 + T_1 + T_0$, где T_s – однородная форма степени s. Для изменения энергии при ударном воздействии справедлива формула Кельвина

$$\Delta H = (I, (v^+ + v^-)/2) \tag{7}$$

где $H = T_2 - T_0$ (функция Гамильтона), I – ударный импульс, определяемый формулой (3), $v^-(v^+)$ – скорость системы до (соответственно, после) удара.

Обычно формулу (7) доказывают для систем свободных точек и для твердых тел (см. [2, 3]). Однако формула Кельвина справедлива в самом общем случае, когда связи, наложенные на систему, нестационарные ($T_1 \neq 0$). Она представляет собой любопытное тождество для квадратичных форм.

Покажем, как обобщенную формулу Кельвина можно вывести с помощью изложенного метода. Воспользуемся обобщенной теоремой об изменении кинетической энергии

$$dH = \Sigma Q_k dq_k + \Sigma F_k dq_k$$

Переходя к новому времени $\tau = t/\varepsilon$, получаем приращение функции Гамильтона за время действия ударного импульса

$$\Delta H = \int_0^1 (Q, q')d\tau + \int_0^1 (I, \dot{q})d\tau \tag{8}$$

В силу уравнений (5), производная q' мала вместе с ε. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ первое слагаемое в правой части равенства (8) стремится к нулю. Согласно равенствам (6), при $\varepsilon = 0$ скорость $\dot{q}$ – линейная функция τ. Поскольку интеграл от линейной функции равен полусумме ее значений на концах интервала интегрирования, из (8) сразу следует обобщенная формула Кельвина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appell P.* Traité de Mécanique Rationelle. 2nd ed. Paris: Gauthiers-Villars, 1904. 551 p. = *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. Pt 1. L.: Macmillan, 1882. 385 p. = *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983.
3. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.XII.1998