

УДК 539.3

© 1999 г. В.Ю. Столбов, П.В. Трусов

СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ

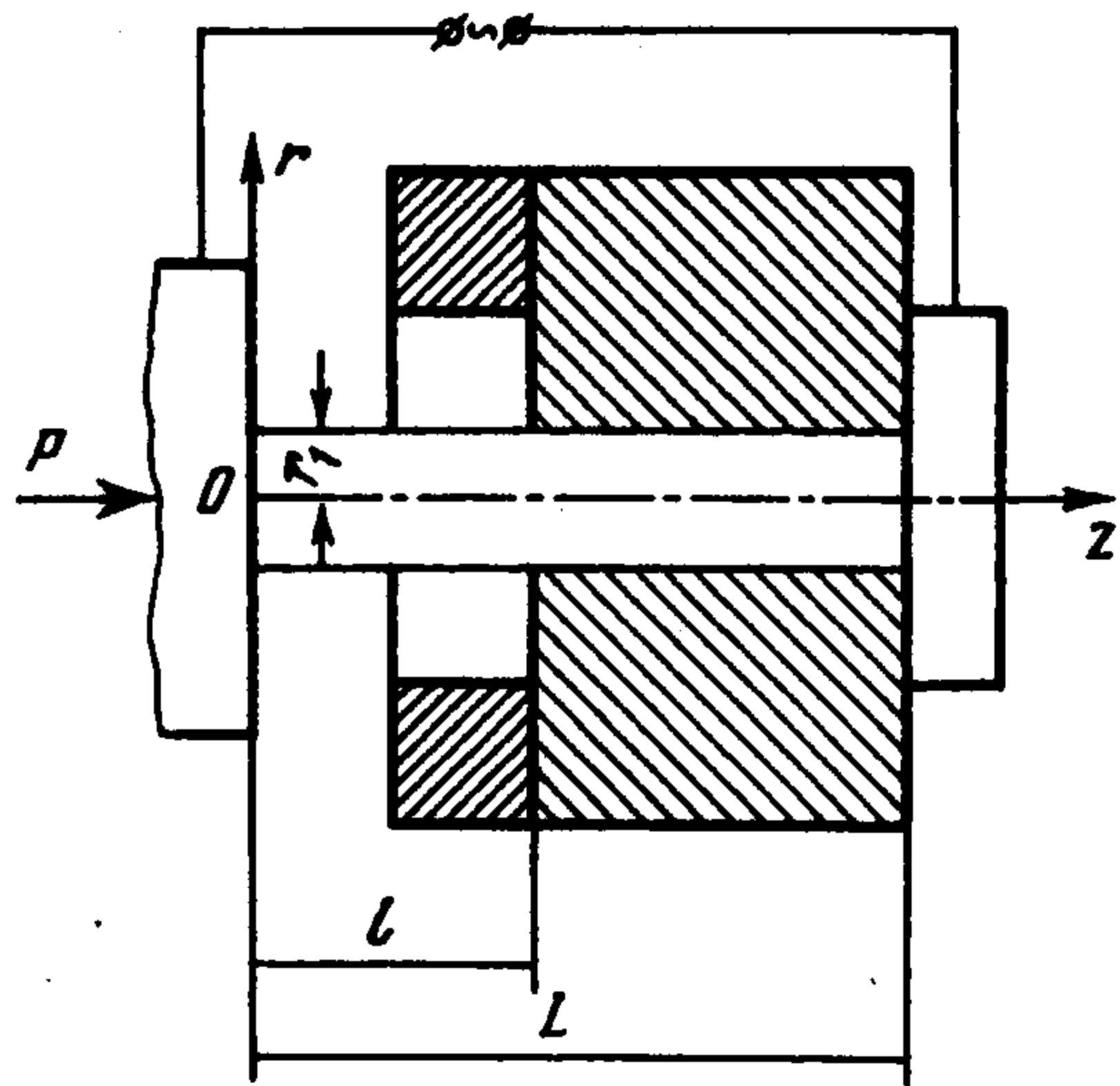
Рассматривается математическая постановка связанной задачи оптимизации, которая включает несколько оптимальных задач, связанных между собой через параметры оптимизации и функции состояния. Формулируются условия существования решения и предлагается методика сведения поставленной задачи к последовательности оптимальных задач с неизвестными функциями, входящими в критерии оптимальности и ограничения. Строится специальная минимизирующая последовательность и приводятся условия ее сходимости. В качестве примера предлагается решение задачи, показывающее эффективность данной методики.

Необходимость решения нескольких задач оптимизации, связанных между собой, возникает, например, при исследовании многопереходных процессов термомеханической обработки металлов или при оптимальном проектировании конструкций с учетом технологии их изготовления. Подобные задачи решаются отдельно, без взаимосвязи. Например, известно большое число работ, посвященных оптимизации распределения анизотропных или неоднородных механических характеристик материала по объему конструкции с целью обеспечения ее минимального веса или максимальной прочности ([1–3] и др.). Однако в этих работах не рассматриваются вопросы выбора технологии изготовления, позволяющей получить оптимальные эксплуатационные свойства конструкции. В ряде работ ([4–6] и др.) предложены оригинальные подходы к решению задач оптимального управления температурными полями, напряжениями, деформациями и перемещениями в технологических процессах обработки материалов, но не исследуются вопросы выбора оптимальных распределений, исходя из условий эксплуатации конструкции. Обоснование такого выбора может дать только совместное решение задач оптимального проектирования конструкции и оптимального управления технологическим процессом ее изготовления.

Подобный подход применяется в очень ограниченном числе работ, причем в них рассматриваются конкретные процессы изготовления конструкций (например, процесс армирования конструкций из композиционных материалов), что не позволяет провести сравнение различных технологических процессов. Решение задачи оптимизации в более широкой постановке затруднено как отсутствием достаточно общей методики решения связанных задач оптимизации, так и сложностью решения краевой задачи термоупругопластичности или ползучести, описывающей поведение материала в процессе изготовления.

Следует отметить, что процессы термомеханической обработки обычно сопровождаются большими градиентами температур и напряжений, протекают в условиях сложного нагружения и при больших деформациях. Поэтому решение соответствующих задач термоупругопластичности требует больших затрат времени. Применение быстродействующей вычислительной техники, разработка эффективных численных методов решения и создание современной теории определяющих соотношений позволили существенно снизить необходимые временные затраты ([7–9] и др.), что дало возможность подойти к постановке и решению связанных задач оптимизации.

1. Пример постановки связанной задачи оптимизации. Рассмотрим постановку связанной оптимальной задачи на примере задачи оптимизации процесса электровысадки деталей осесимметричной формы. Электровысадка состоит из двух последовательных



Фиг. 1

этапов (фиг. 1): нагрев заготовки путем пропуска через нее электрического тока и непосредственное деформирование нагретой заготовки до получения детали требуемой конфигурации.

Как показывают экспериментальные данные, предельная пластичность металла заготовки зависит от многих параметров, основными из которых являются температура θ , интенсивность скоростей деформации H_u^z и показатель напряженного состояния σ_c/T (σ_c – среднее напряжение; T – интенсивность касательных напряжений). Проблема состоит в том, чтобы выбрать такие параметры процесса (функцию распределения тока по времени, время нагрева, давление на пуансон и т.п.), при которых

деформирование заготовки будет происходить при максимальном использовании пластичности металла. Эту проблему удобно разбить на две оптимальные задачи, связанные между собой: сначала оптимизируется процесс нагрева заготовки, чтобы в конце нагрева получить распределение температуры, близкое к оптимальному, затем путем управления давлением на пуансон при известной температуре нагрева заготовки осуществляется приближение по некоторой норме к оптимальному напряженно-деформированному состоянию. Сложность решения этих задач заключается в необходимости многократного решения нелинейных и нестационарных задач электротеплопроводности и термоупругопластичности.

На основе методики, изложенной ранее [9, 10], была построена математическая модель исследуемого процесса, учитывающая нелинейное распределение тепловых источников при пропускании тока через заготовку, сложное нагружение и большие пластические деформации металла. Сравнение результатов с экспериментальными данными показало достаточно хорошее совпадение. Установлено, что основными факторами, влияющими на разрушение металла при данном процессе, являются температура нагрева заготовки и скорость деформации. Управлять этими факторами возможно с помощью функции силы тока $I_0(t)$, $t \in [0, t_1]$, где t_1 – время нагрева заготовки, и скоростью изменения давления на пуансон $\dot{P}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, где $(t_2 - t_1)$ – время деформирования заготовки.

Итак, приходим к следующей постановке двухсвязанной задачи оптимизации. Найти такие управления из класса кусочно-непрерывных функций $h_1(\cdot) = I_0(\cdot) \in \text{pc}[0, t_1]$ и $h_2(\cdot) = \dot{P}(\cdot) \in \text{pc}[t_1, t_2]$, которые сообщают минимальное значение следующим функционалам:

$$J_{10}(h_1) = \int_0^L [\theta(t_1, r_1, z; h_1) - \bar{\theta}(z; H_u^z, \sigma_c / T)]^2 dz \rightarrow \inf_{h_1} \quad (1.1)$$

$$J_{20}(h_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\max_{r, z \in \Omega_2^t} (H_u^z(t, r, z; h_2)) - \bar{H}_u^z(\bar{\theta}, \sigma_c / T) \right]^2 dt \rightarrow \inf_{h_2} \quad (1.2)$$

при ограничениях типа равенств

$$F_1(t, r, z, h_1, u_1, P_1) = 0, \quad t \in [0, t_1]; \quad r, z \in \bar{\Omega}_1^t \quad (1.3)$$

$$F_2(t, r, z, h_2, u_2, u_1(t, r, z), P_2) = 0, \quad t \in [t_1, t_2]; \quad r, z \in \bar{\Omega}_2^t \quad (1.4)$$

и неравенств

$$0 \leq h_1(t) \leq \bar{I}, \quad t \in [0, t_1] \quad (1.5)$$

$$0 \leq h_2(t) \leq \bar{P}, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (1.6)$$

Здесь полагается, что

$$\bar{\theta}(z) = \begin{cases} \bar{\theta}_1(H_u^z, \sigma_c/T), z \in [0, l] \\ \bar{\theta}_2 = 50^\circ\text{C}, z \in [l, L] \end{cases}, \quad \tilde{\theta} = \frac{1}{l} \int_0^l \theta(t_1, r_1, z) dz$$

а функции $\bar{\theta}_1(H_u^z, \sigma_c/T)$ и $H_u^z(\tilde{\theta}, \sigma_c/T)$, за счет которых осуществляется взаимосвязь двух оптимальных задач, выбираются из экспериментальных кривых пластичности для данного материала [11]. Температура $\bar{\theta}_1$ соответствует максимальной пластичности металла при фиксированных значениях H_u^z и σ_c/T . Под u_1 и u_2 понимаются вектор-функции состояния тела, а под P_1 и P_2 – функции, задающие внешние воздействия на рассматриваемое тело в процессе нагрева и деформирования соответственно; $\bar{\Omega}_i$ ($i = 1, 2$) – области, занимаемые металлом при нагреве и деформировании; \bar{I} – ограничение на силу тока; \bar{P} – ограничение на скорость изменения давления на пуансон.

Операторные уравнения (1.3) и (1.4) представляют здесь уравнения нестационарных краевых задач электротеплопроводности и термоупругопластичности. Численное решение этих задач требует больших затрат времени. Поэтому первоначально было проведено качественное решение оптимальных задач (1.1), (1.3), (1.5) и (1.2), (1.4), (1.6) при некоторых дополнительных допущениях. Вследствие того, что диаметр исследуемого тела значительно меньше длины, можно с достаточной степенью достоверности изменением температуры по радиусу пренебречь. Тогда ограничением в виде равенства в задаче оптимизации электронагревом выступает следующее уравнение теплопроводности с внутренним источником:

$$c\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + q(z, t), \quad z \in [0, L], \quad t \in [0, t_1] \quad (1.7)$$

$$q(z, t) = \begin{cases} I_0^2(t)R, & 0 \leq z \leq l \\ 0, & l \leq z \leq L \end{cases}$$

где R – сопротивление заготовки, c, λ, γ – теплоемкость, теплопроводность и удельная теплопроводность и удельный вес материала заготовки.

Отметим, что здесь применяется модель нагрева проводника, помещенного в проводящую матрицу. Считается, что ток на участке $z \in [l, L]$ течет по матрице, а на участке $z \in [0, l]$ – по проводнику. Краевые условия задачи теплопроводности имеют вид

$$\theta(z, 0) = \theta_0, \quad z \in [0, L] \quad (1.8)$$

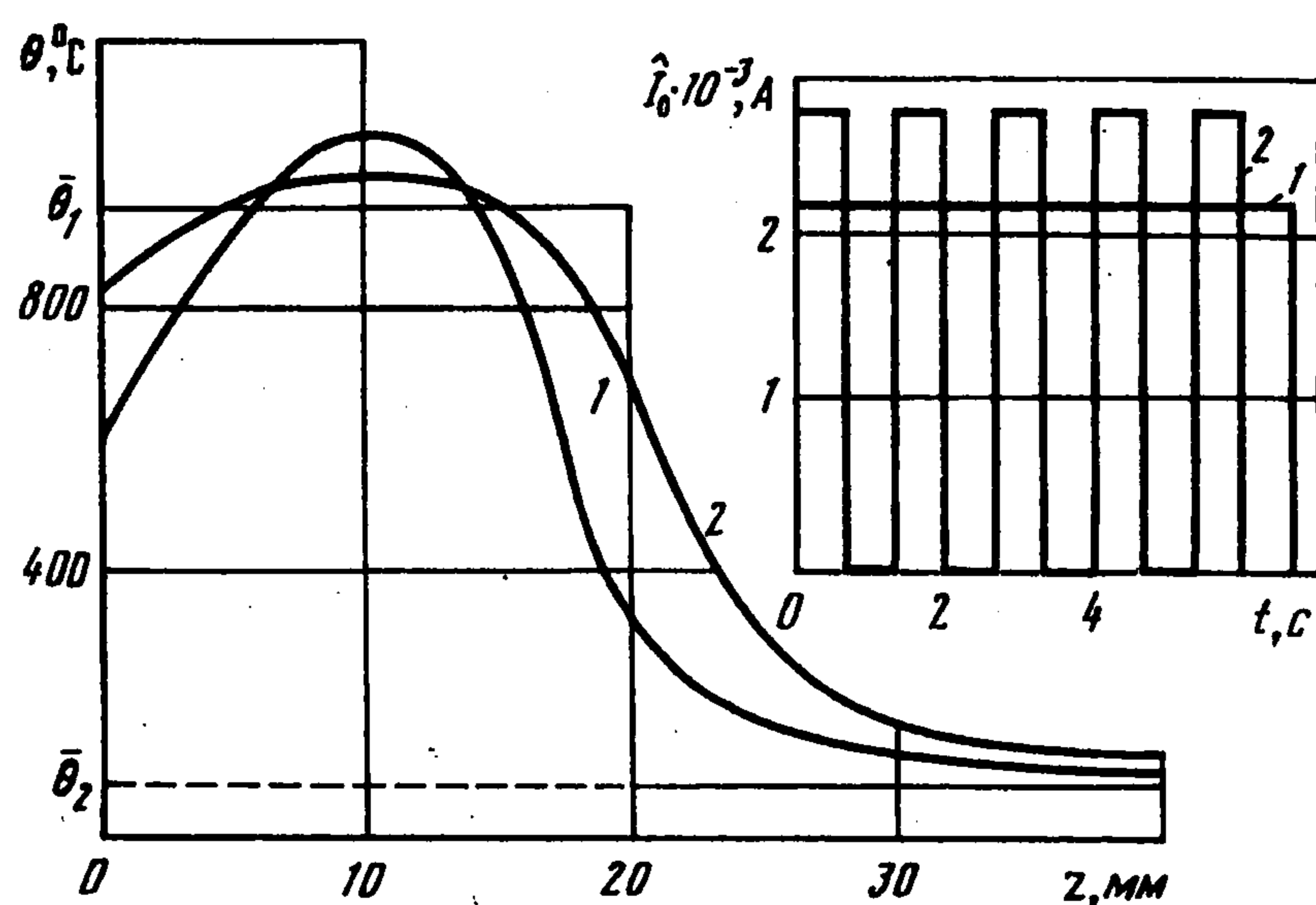
$$\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad t \in [0, t_1]$$

Если положить функцию $\bar{\theta}(z, H_u^z, \sigma_c/T)$ заданной, то решение задачи (1.1), (1.5), (1.7), (1.8) может быть получено следующим образом.

Определим оператор $B: L_2(0, t_1) \rightarrow L_2(0, L)$ как $(Bh_1^2)(z) = \theta(z, t_1) - \theta_0$. Для построения решения краевой задачи (1.7), (1.8) применим метод Фурье, согласно которому

$$\theta(z, t) = \theta_0 + \frac{R}{c\gamma} \left[\frac{l}{L} \int_0^t h_1^2(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(k\pi \frac{1}{L}\right) \cos\left(k\pi \frac{z}{L}\right) \int_0^t h_1^2(\tau) \exp\left[\frac{\lambda}{c\gamma} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (\tau - t)\right] d\tau \right] \quad (1.9)$$

Было показано [12], что ряд (1.9) сходится и его сумма θ почти всюду является единственным решением задачи (1.7), (1.8) (так как функция q разрывна).



Фиг. 2

Теперь функционал (1.1) можно переписать в виде

$$J_{10}(h_1) = \int_0^L ((Bh_1^2)(z) - g(z))^2 dz = \|Bh_1^2 - g\|^2, \quad g(z) = \bar{\theta}(z) - \theta_0 \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что функционал $J_{10}(h_1)$ дифференцируем по Фреше на всем пространстве $L_2(0, t_1)$, т.е.

$$\forall h \in L_2(0, t_1) \langle J_{10}(h_1), h \rangle = 2(B^*(Bh_1^2 - g), h)$$

где $B^*: L_2(0, L) \rightarrow L_2(0, t_1)$ – сопряженный к B оператор.

Было показано [12], что если $h_1 \in L_2(0, t_1)$, то $J_{10}(h_1)$ не имеет минимума на $L_2(0, t_1)$.

Если $h_1 \in H_1$, где H_1 – ограниченное замкнутое и выпуклое множество в $L_2(0, t_1)$, то $B(H_1)$ – выпуклый компакт. Поэтому существует функция $h_1^* \in H_1$, минимизирующая J_{10} на H_1 . Однако решение в этом случае может быть неединственным. Если же в качестве H_1 выбрать выпуклое замкнутое множество в пространстве H_{1m} ступенчатых функций

$$h_1(\tau) = a_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i; \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = t_1$$

при фиксированном разбиении отрезка $[0, t_1]$, то оператор $B: H_{1m} \rightarrow L_2(0, L)$ инъективен, вследствие чего решение единственно.

Имея в явном виде выражение для градиента $J'_{10}(h_1)$, можно получить численное решение исходной оптимальной задачи, например методом проекций градиента.

Однако из класса ступенчатых функций требованию простоты реализации в реальном технологическом процессе удовлетворяет только прерывистая периодическая функция. Поэтому в дальнейшем решение задачи (1.1), (1.3), (1.5) будем искать в указанном виде. Тогда исходную задачу оптимизации (без дополнительных допущений) нетрудно свести к задаче нелинейного программирования, выбрав за параметры оптимизации величину тока в период нагрева и отношение времени нагрева к времени паузы. Решение задачи для нагрева одной из заготовок приведено на фиг. 2. Видно, что режим прерывистого нагрева (кривая 2 в правой верхней части фиг. 2) дает распределение температуры по поверхности заготовки (кривая 2 в левой части фиг. 2) более благоприятное, чем при существующем режиме нагрева (кривая 1 в левой части фиг. 2).

Теперь рассмотрим качественное решение второй оптимальной задачи (1.2), (1.4), (1.6). Исходя из предварительных экспериментальных и теоретических исследований, сделаем следующие допущения. Будем рассматривать деформирование только

высаживаемой части заготовки l и считать этот процесс изотермическим. В качестве модели материала примем модель несжимаемой линейно-вязкой среды. Тогда ограничения (1.4) можно записать в виде следующих дифференциальных связей:

$$\sigma(t) = \mu(\tilde{\theta})\dot{\epsilon}(t), \quad \dot{\sigma}(t) = h_2(t); \quad t \in [t_1, t_2] \quad (1.11)$$

при соответствующих краевых условиях

$$\sigma(t_1) = \epsilon(t_1) = \dot{\epsilon}(t_1) = 0, \quad \epsilon(t_2) = \bar{\epsilon} \quad (1.12)$$

где $\mu(\tilde{\theta})$ – коэффициент вязкости материала, зависящий от температуры нагрева заготовки, $\bar{\epsilon}$ – заданная продольная деформация. Отметим, что при учете несжимаемости материала и осесимметричности заготовки интенсивность скоростей деформации H_u^z совпадает с величиной продольной скорости деформации $\bar{\epsilon}$. Тогда функционал $J_{20}(h_2)$ можно записать в упрощенном виде

$$J_{20}(h_2) = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\epsilon}(t) - \bar{\epsilon})^2 dt$$

Кроме того, полагаем, что $\dot{P}(t) = \dot{\sigma}(t)$, где σ – продольное напряжение.

Выбрав в качестве фазовой переменной $x(\cdot) = \dot{\epsilon}(\cdot) \in KC^1[t_1, t_2]$, применим к решению поставленной задачи оптимального управления принцип максимума Понтрягина. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{Q} = \int_{t_1}^{t_2} [\lambda_0(x(t) - \bar{\epsilon})^2 + \lambda_1 x(t) + p(t)(\dot{x}(t) - \mu^{-1}h_2(t))] dt - \lambda_1 \bar{\epsilon}$$

где λ_1, λ_2 – множители Лагранжа; $p(\cdot)$ – сопряженная функция, а t_2 – переменная величина.

Тогда необходимые условия оптимальности имеют вид

$$\dot{p}(t) = \lambda_0 2(x(t) - \bar{\epsilon}) + \lambda_1, \quad p(t_2) = 0 \quad (1.13)$$

$$\max_{h_2(t) \leq P} (p(t)\mu^{-1}h_2(t)) = p(t)\mu^{-1}\hat{h}_2, \quad \lambda_0(x(t_2) - \bar{\epsilon})^2 + \lambda_1 x(t_2) = 0$$

Из условия оптимальности по h_2 следует, что

$$\hat{h}_2(t) = \bar{P} \operatorname{sign}(p(t)), \quad p(t) \neq 0 \quad (1.14)$$

Можно показать, что $\lambda_0 \neq 0$. Тогда примем $\lambda_0 = 1$. Исследуя функцию $p(\cdot)$ с помощью условий (1.13) и дифференциальных связей (1.11), можно показать, что $p(\cdot)$ – непрерывная функция, причем $p(t_1) > 0$.

Из (1.11), (1.12) и (1.14) следует

$$\hat{h}_2(t) = \bar{P}, \quad \hat{x}(t) = \mu^{-1}\bar{P}(t - t_1), \quad t \in [t_1, \tau], \quad \tau = \min\{t \in [t_1, t_2] / p(t) \leq 0\}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

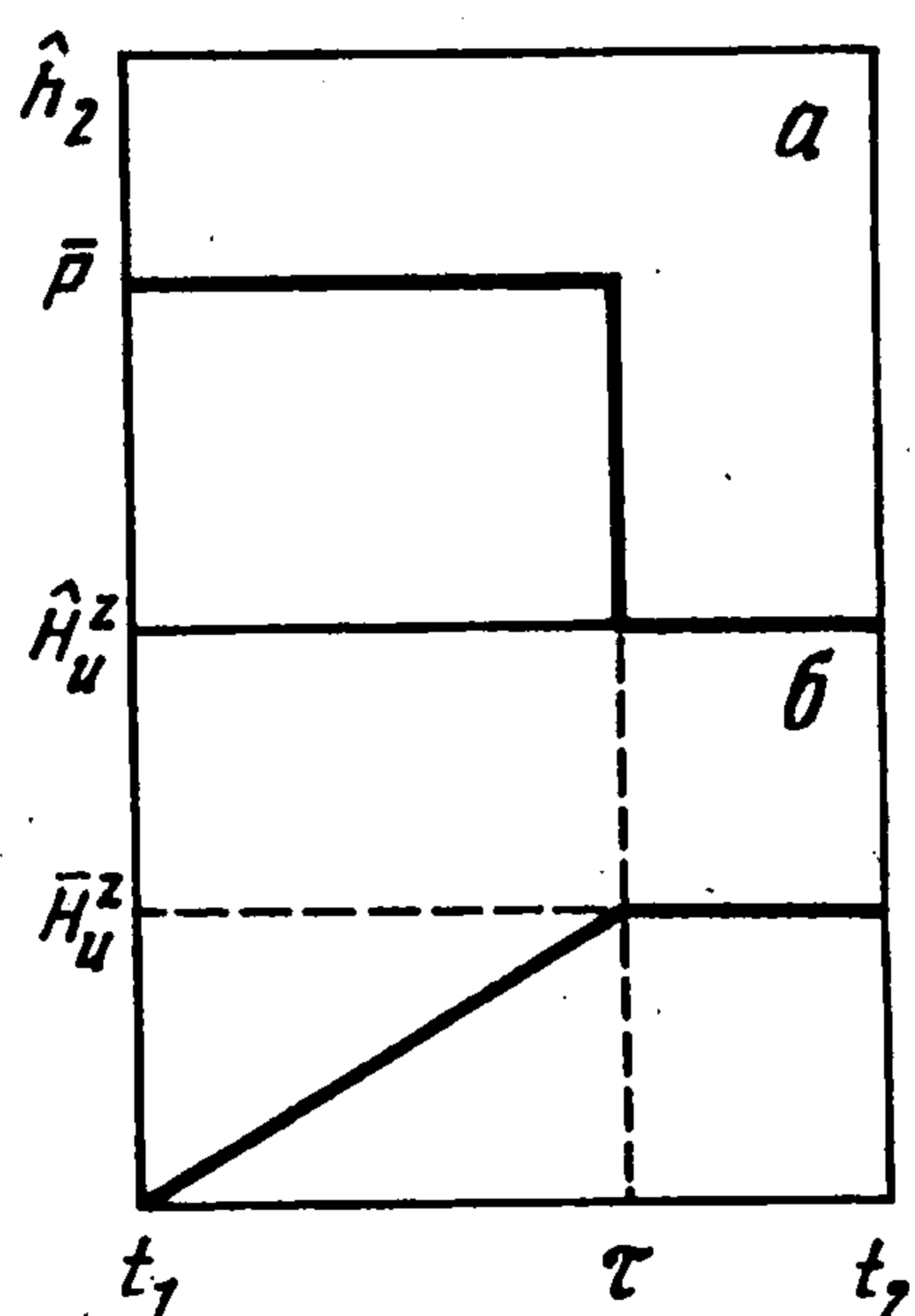
1°. Пусть $\tau = t_2$. Тогда $\hat{x}(t_2) = \mu^{-1}\bar{P}(t_2 - t_1)$; $\hat{t}_2 = \sqrt{2\mu\bar{\epsilon}/\bar{P}}$.

Получим решение

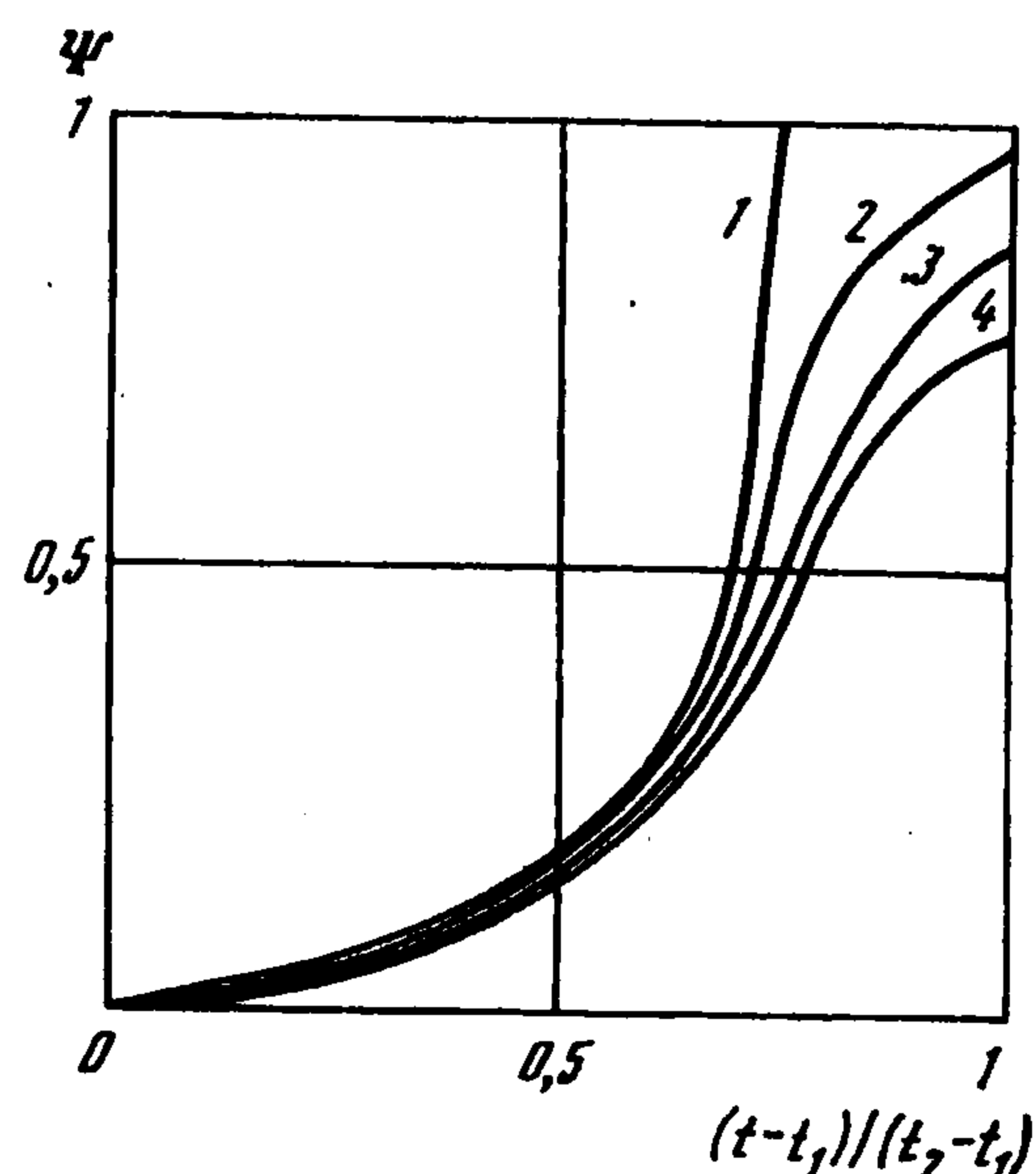
$$\hat{h}_2(t) = \bar{P}; \quad \hat{x}(t) = \mu^{-1}\bar{P}(t - t_1), \quad t \in [t_1, \hat{t}_2] \quad (1.15)$$

справедливое при $\bar{P} \leq \bar{\epsilon}^2 \mu / (2\bar{\epsilon})$.

2°. Пусть $\tau < t_2$. Тогда $p(\tau) = 0$. Отсюда $\tau = \bar{\epsilon} \mu / \bar{P}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Можно показать, что $p(t) = 0, t \in [\tau, t_2]$. Тогда при $\bar{P} > \bar{\epsilon}^2 \mu / (2\bar{\epsilon})$ получим следующее возможное оптимальное решение:

$$\hat{h}_2(t) = \begin{cases} \bar{P}, & t \in [t_1, \tau) \\ 0, & t \in [\tau, \hat{t}_2] \end{cases}, \quad \hat{x}(t) = \begin{cases} \mu^{-1} \bar{P}(t - t_1), & t \in [t_1, \tau) \\ \bar{\epsilon}, & t \in [\tau, \hat{t}_2] \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\hat{t}_2 = \bar{\epsilon} \mu / (2\bar{P}) + \bar{\epsilon} / \bar{\epsilon}$$

Единственность решения задачи (1.2), (1.4), (1.6) в рассмотренной постановке следует из единственности допустимых экстремалей (1.15) и (1.16). Можно показать и глобальность экстремума, сообщающего функционалу J_{20} решениями (1.15) и (1.16).

Решение (1.16) показано на фиг. 3. Видно, что функция управления h_2 должна иметь переключение в некоторой точке τ , зависящей от температуры нагрева заготовки и механических свойств ее материала (фиг. 3, а). В этом случае интенсивность скоростей деформации на протяжении всего процесса деформирования наиболее близка к заданной (фиг. 3, б), что снижает возможность разрушения металла.

Отметим, что первая и вторая задачи оптимального управления здесь являются связанными. В первую задачу входит величина $\bar{\theta}_1$, зависящая от решения второй задачи $\hat{H}_u^z(t)$, а решение второй задачи зависит от величины $\bar{\theta}$, которая определяется из решения первой задачи. Поэтому необходим итерационный процесс последовательного решения этих задач. Как показали исследования, сходимость итерационного процесса в значительной степени зависит от вида связующих функций $\bar{\theta}_1(H_u^z)$ и $H_u^z(\bar{\theta})$. При достаточной гладкости этих функций сходимость достигается за 3–4 итерации.

В результате решения поставленной связанной задачи были получены оптимальные режимы нагрева и деформирования металла [13]. Решение показало (фиг. 4), что при найденных оптимальных режимах можно гораздо полнее использовать пластические свойства материала и снизить истощение ресурса пластичности Ψ [11], выбранного в качестве критерия разрушения материала ($\Psi = 1$). На фиг. 4 кривая 1 соответствует накоплению повреждений в металле при существующих режимах нагрева и деформирования, 2 – оптимальному режиму деформирования, 3 – оптимальному режиму нагрева, 4 – биоптимальному режиму. Видно, что в результате выбора оптимальных режимов нагрева и деформирования, можно снизить истощение ресурса пластичности металла более чем на 20%. Это подтверждается и экспериментальными данными, полученными в условиях реального технологического процесса. На основе полученных результатов составлены номограммы рациональных режимов электровысадки для

широкого класса типоразмеров заготовок, которые внедрены на ряде промышленных предприятий [14].

2. Постановка задачи биоптимизации в общем случае. Пусть на отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматриваемое тело занимает в пространстве ограниченную область Ω_1^t с границей Γ_1^t , а при $[t_1, t_2]$ – область Ω_2^t с границей Γ_2^t . Будем считать, что $\bar{\Omega}_2^t = \bar{\Omega}_1^t$, где $\bar{\Omega}_n^t = \Omega_n^t \cup \Gamma_n^t$ (здесь и далее, если не оговорено противное, $n = 1, 2$). Введем вектор-функции состояния тела $\mathbf{u}_1(\cdot, \cdot) \in w_2^{0,1}([t_0, t_1] \times \bar{\Omega}_1^t)$ и $\mathbf{u}_2(\cdot, \cdot) \in w_2^{0,1}([t_1, t_2] \times \bar{\Omega}_2^t)$, где $w_2^{0,1}([t_{n-1}, t_n] \times \bar{\Omega}_n^t)$ – пространства Соболева. В рассматриваемых задачах такими функциями могут служить функции перемещений, деформаций, напряжений, температур и т.д., которые характеризуют состояние деформируемого тела в данной точке и в данный момент времени. Обозначим через $\mathbf{h}_n(\cdot, \cdot) \in \text{pc}([t_{n-1}, t_n] \times \bar{\Omega}_n^t)$ вектор-функции параметров оптимизации в соответствующих пространствах кусочно-непрерывных функций. Будем рассматривать функционалы вида

$$J_{1i}(\mathbf{h}_1) = J_{1i}(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}_1(\mathbf{h}_1), \varphi_1(\mathbf{h}_2, \mathbf{u}_2)), \quad i = 0, \dots, m_1$$

$$J_{2i}(\mathbf{h}_2) = J_{2i}(\mathbf{h}_2, \mathbf{u}_2(\mathbf{h}_2), \varphi_2(\mathbf{h}_1, \mathbf{t}_1, \cdot)), \quad i = 0, \dots, m_2$$

где φ_1, φ_2 – некоторые непрерывные операторы, за счет которых осуществляется взаимосвязь двух оптимальных задач.

За счет φ_2 осуществляется учет всей предыстории деформирования на предыдущем этапе (деформационное упрочнение материала, остаточные напряжения и т.п.), а за счет φ_1 учитывается влияние функций состояния и параметров оптимизации второго этапа деформирования на первый. Зависимость от φ_1 в данной постановке задачи является нетрадиционной, так как здесь решение задачи в некоторый момент времени зависит от решения задачи в последующий момент, т.е. "настоящее" зависит не только от "прошедшего", но и от "будущего", которое заранее неизвестно. В этом заключается основная новизна рассматриваемой постановки задачи биоптимизации и в этом же состоит трудность ее решения. Кроме того, зависимости $\mathbf{u}_1(\mathbf{h}_1)$ и $\mathbf{u}_2(\mathbf{h}_2)$ обычно также неизвестны в явном виде, а задаются через систему нелинейных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений.

Пусть связь между функциями состояния и параметрами оптимизации задается с помощью некоторой системы уравнений, которую в операторном виде можно записать следующим образом:

$$F_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}_1, \mathbf{u}_1, \varphi_1(\mathbf{h}_2, \mathbf{u}_2), P_1) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_1^t$$

$$F_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}_2, \mathbf{u}_2, \varphi_2(\mathbf{u}_1(t_1, \cdot)), P_2) = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_2^t$$

где F_n – некоторые операторы, описывающие поведение тела при деформировании, $P_n(\cdot, \cdot) \in L_2([t_{n-1}, t_n] \times \bar{\Omega}_n^t)$ – функции, задающие нагрузки на рассматриваемое тело в процессе деформирования и принадлежащие пространству Лебега L_2 , \mathbf{x} – вектор пространственных координат. В рассматриваемых задачах приведенная выше система уравнений представляет собой систему уравнений краевой задачи термоупругопластичности.

Процесс деформирования тела всегда происходит при некоторых ограничениях технологического и конструктивного характера. Эти ограничения можно записать в виде неравенств

$$f_{nj}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}_n, \mathbf{u}_n, J_{ni}) \leq 0, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_n^t; \quad i = 1, \dots, m_n; \quad j = 1, \dots, k_n$$

где f_{nj} – некоторые заданные непрерывные функции. Пусть в качестве критериев оптимальности каждого этапа деформирования служат условия минимизации функцио-

налов J_{10} и J_{20} соответственно. Тогда задачу биоптимизации можно сформулировать следующим образом: найти такие функции $\hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{h}}_2$, что

$$J_{n0}(\mathbf{h}_n) \rightarrow \inf, \quad n = 1, 2 \quad (2.1)$$

при ограничениях типа равенств

$$F_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}_n, \mathbf{u}_n, \varphi_n, P_n) = 0, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_n^t \quad (2.2)$$

и типа неравенств

$$f_{nj}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}_n, \mathbf{u}_n, J_{ni}) \leq 0, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_n^t; \quad i = 1, \dots, m_n; \quad j = 1, \dots, k_n \quad (2.3)$$

Поставленная задача биоптимизации не является двухкритериальной задачей в обычном смысле. Здесь области определения функционалов (2.1) разделены по времени, поэтому нет смысла вводить понятие оптимизации по Парето [15]. В данном случае рассматриваются две задачи оптимизации, между которыми существуют связи за счет влияния параметров оптимизации и функций состояния одной задачи на решение другой. Это требует разработки нового подхода к решению подобного класса задач оптимизации.

Рассмотрим условия существования решения задачи (2.1)–(2.3). Для этой цели введем вспомогательные множества U_1 и U_2 , в которых выполняются ограничения (2.2), а также множества H_1 и H_2 , в которых выполняются ограничения (2.3) соответственно. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть существуют $\mathbf{u}_n \in U_n$ такие, что множества H_n непусты, ограничены и слабо замкнуты; выполняются условия непрерывности отображения $H_1 \times U_1 \rightarrow R$, задаваемого функционалами J_{1i} ($i = 0, \dots, m_1$), $\forall \mathbf{h}_2 \in H_2, \forall \mathbf{u}_2 \in U_2$, и отображения $H_2 \times U_2 \rightarrow R$, задаваемого функционалами J_{2i} ($i = 0, \dots, m_2$), $\forall \mathbf{u}_1(t_1, \cdot) \in U_1$; функционалы J_{n0} выпуклы по \mathbf{h}_n и φ_n , $\forall \mathbf{u}_n \in U_n$, соответственно, а функции φ_n, f_{nj} ($j = 1, \dots, k_n$) непрерывны по каждому аргументу.

Тогда 1) существуют $\hat{\mathbf{h}}_n$ – решение задачи (2.1)–(2.3); 2) найдутся последовательности $\mathbf{h}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие условиям

$$J_{n0}(\hat{\mathbf{h}}_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_{n0}(\mathbf{h}_n^{(k)}) = \inf J_{n0}(\mathbf{h}_n), \quad \mathbf{h}_n \in H_n$$

и при этом $\|\mathbf{h}_n^{(k)} - \hat{\mathbf{h}}_n\|_c \rightarrow 0$.

Замечания. 1°. Вместо условия квазирегулярности функционалов J_{n0} (выпуклости по \mathbf{h}_n , φ_n) можно использовать условия их слабой полунепрерывности по \mathbf{h}_n и φ_n [16].

2°. Доказательство теоремы здесь не приводится, однако его несложно получить с помощью приведенных ранее [16, 17] теорем и доказательств.

Из приведенной теоремы следует общая методика решения задач связанной оптимизации, основанная на расщеплении общей задачи на ряд отдельных оптимальных задач и последовательном их решении. Для этого строится специальная итерационная процедура. Первоначально рассматривается задача (2.1)–(2.3) ($n = 2$) при некоторой заданной функции $\hat{\mathbf{u}}_1^{(0)}(t_1, \cdot)$ (обычно $\hat{\mathbf{u}}_1^{(0)}(t_1, \cdot) = 0$). Это приводит к классической постановке данной задачи оптимизации. Решая ее одним из известных методов оптимизации, находим $\hat{\mathbf{h}}_2^{(0)}$ и с помощью оператора F_2 определяем $\hat{\mathbf{u}}_2^{(0)}(\hat{\mathbf{h}}_2^{(0)})$. (Напомним, что здесь под $\hat{\mathbf{u}}_2^{(0)}(\hat{\mathbf{h}}_2^{(0)})$ понимается решение краевой задачи упругопластичности (2.2) ($n = 2$) при некотором распределении параметров оптимизации $\hat{\mathbf{h}}_2^{(0)}$.) Далее решается задача оптимизации (2.1)–(2.3) ($n = 1$) с фиксированными функциями

$\hat{u}_2^{(0)}, \hat{h}_2^{(0)}$ и определяются $\hat{h}_1^{(1)}$ и $\hat{u}_1^{(1)}$. Затем уточняется функция $\hat{u}_1^{(1)}(t_1, \cdot)$ и вновь решается задача (2.1)–(2.3) ($n = 2$). Итерационный процесс продолжается до выполнения заданных условий сходимости.

Отметим, что данный подход к решению связанных задач не является единственным. Например, возможно построение специальных или обобщенных функционалов, зависящих от всех параметров оптимизации, как в теории решения многокритериальных задач [15]. Однако рассматриваемые задачи механики деформируемого твердого тела по своей физической сути предполагают возможность разбиения на отдельные этапы деформирования, что делает предлагаемый подход наиболее привлекательным. Кроме этого, в некоторых случаях он позволяет значительно упростить решение связанной задачи оптимизации за счет существенного упрощения решения отдельных оптимальных задач [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамович И.С., Рикардс Р.Б. Оптимизация по массе оболочек вращения с переменной геометрией и структурой армирования // Механика полимеров. 1977. № 3. С. 494–502.
2. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. Бурак Я.И., Будз С.Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки // Прикл. механика. 1974. Т. 10. № 2. С. 14–20.
5. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наук. думка, 1988. 312 с.
6. Няшин Ю.И., Трусков П.В. Остаточные напряжения: расчет и управление // Успехи механики. 1989. Т. 12. № 4. С. 77–109.
7. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. Серия Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 21. С. 3–75.
8. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
9. Поздеев А.А., Трусков П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
10. Трусков П.В., Столбов В.Ю. Об одном алгоритме решения пространственных задач установившегося течения металла // Изв. АН СССР. Металлы. 1983. № 4. С. 134–138.
11. Колмогоров В.Л. Напряжения, деформации, разрушение. М.: Металлургия, 1970. 230 с.
12. Шрагин И.В. Оптимальное управление в смешанной задаче для уравнения теплопроводности с разрывной правой частью. Пермь, 1988. 12с. – Деп. в ВИНТИ 26.04.88. № 3197-B88.
13. Столбов В.Ю. Оптимальное управление процессом электровысадки деталей осесимметричной формы. // Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев: Наук. думка, 1991. № 33. С. 59–64.
14. Столбов В.Ю., Тверье В.М. Управление электроконтактным нагревом цилиндрических заготовок при высадке деталей // Кузнечно-штамповочное производство. 1994. № 5. С. 6–8.
15. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526 с.
16. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.
17. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
18. Столбов В.Ю., Ашихмин В.Н. Оптимальное проектирование цилиндрических сосудов давления с учетом процесса автофретирования // Проблемы прочности. 1992. № 2. С. 78–82.