

УДК 539.3

© 1999 г. А.Г. Шаталов

### ЛУЧЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Рассматривается трехмерная задача связанной термоупругости для шара при учете конечной скорости распространения тепла. Лучевым методом построены решения для температуры и напряжения, возникающие в шаре, нагреваемом двумя куполообразными потоками энергии. Зависимости для температур и радиальных напряжений проиллюстрированы графиками:

Большинство решений динамических задач термоупругости относится к изучению тел бесконечных или полубесконечных размеров [1,2].

1. Динамическая задача связанной термоупругости описывается уравнениями движения [2], обобщенным законом теплопроводности [3], законом сохранения энергии, соотношениями Дюамеля–Неймана и соотношениями Коши [2]. Исключая тензор деформаций, после преобразований систему уравнений можно привести к безразмерному виду [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \nu_{i,t}, \quad \tau q_{i,t} + q_i = -T_{,i}, \quad q_{i,i} + \delta \nu_{k,k} + T_{,t} = 0 \\ \sigma_{ij,t} &= ((1 - 2\eta)\nu_{k,k} - T_{,t})\delta_{ij} + \eta(\nu_{i,j} + \nu_{j,i}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\nu_i$  – компоненты вектора скоростей перемещений,  $q_i$  – компоненты вектора теплового потока,  $T$  – температура,  $\tau$  – время релаксации теплового потока,  $\delta$  – коэффициент термомеханической связи,  $t$  – время,  $\eta = \mu/(\lambda + 2\mu)$ ,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Пусть на границе шара радиуса  $r_0$  отсутствуют напряжения и действуют два куполообразных потока энергии.

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} q_i(\theta, \varphi, r_0, t)\nu_i &= g_0(t) \exp(-dr_0^2 \sin^2 \theta) \\ \sigma_{ij}(\theta, \varphi, r_0, t)\nu_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты,  $d = \text{const}$ ,  $\nu_i$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности.

2. Решение задачи для напряжений, температуры, скоростей перемещений и тепловых потоков ищется в виде лучевого ряда

$$\begin{aligned} f &= (f^+ - [f])|_{\Sigma} - h(f_{,n}^{(1)+} - [f_{,n}^{(1)}])|_{\Sigma} + \frac{h^2}{2!}(f_{,nn}^{(2)+} - [f_{,nn}^{(2)}])|_{\Sigma} - \dots \\ f_{,n \dots n}^{(k)} &= \frac{\partial^k f}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_l} \nu_i \nu_j \dots \nu_l, \quad [f] = (f^+ - f^-)|_{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $h$  – расстояние по нормали за фронтом поверхности сильного разрыва. Индекс плюс относится к значению функции перед фронтом волны разрыва, минус – за фронтом волны разрыва.

Было показано [5], что в термоупругом материале распространяются два фронта безвихревых волн (БВ) со скоростями

$$c_N = (1 + \tau + \tau\delta \pm \sqrt{(1 + \tau + \tau\delta)^2 - 4\tau}) / (2\tau), \quad N = 1, 2$$

и один фронт эквиволлюминальной волны (ЭВ) со скоростью  $c_3 = \sqrt{\eta}$ . Получены уравнения для определения нулевых членов разложения (суммирование по  $N$  и  $M$  в дальнейшем не производится)

$$\delta\omega_N / \delta t + b_N\omega_N = c_N\Omega\omega_N, \quad \delta[v_i] / \delta t = c_3\Omega[v_i] \quad (2.2)$$

$$\omega_N = [v_i]v_i|_{\Sigma_N}, \quad b_N = \delta / (2[\tau\delta + (1 - \tau c_N^2)^2])$$

Здесь  $\delta/\delta t$  –  $\delta$ -производная по времени [6].

На фронте БВ разрывы физических параметров имеют вид

$$[q_i] = -\delta\omega_N v_i / (1 - \tau c_N^2), \quad [T] = -\delta\tau c_N \omega_N / (1 - \tau c_N^2) \quad (2.3)$$

$$-c_N[\sigma_{ij}] = (c_N^2 - 2\eta)\omega_N\delta_{ij} + 2\eta\omega_N v_i v_j, \quad [v_i] = \omega_N v_i$$

На фронте ЭВ выполняются соотношения

$$[q_i] = 0, \quad [T] = 0, \quad [v_i]v_i = 0$$

$$-c_3[\sigma_{ij}] = \eta([v_i]v_j + [v_j]v_i) \quad (2.4)$$

Для краевой задачи (1.1)–(1.2) поверхности разрыва  $\Sigma(t)$  представляют собой сферические волны, распространяющиеся к центру шара. В качестве криволинейных координат на движущейся поверхности выберем координаты  $y_1 = \theta$ ,  $y_2 = \varphi$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Декартовы координаты  $x_i$  движущейся поверхности и компоненты единичного вектора нормали к поверхности  $v_i$  имеют вид

$$x_1 = (r_0 - ct)\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = (r_0 - ct)\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = (r_0 - ct)\cos\theta$$

$$v_1 = -\sin\theta\cos\varphi, \quad v_2 = -\sin\theta\sin\varphi, \quad v_3 = -\cos\theta$$

Компоненты фундаментального контравариантного метрического тензора  $g^{\alpha\beta}$  на поверхности, коэффициенты второй и третьей основных квадратичных форм  $b_{\alpha\beta}$ ,  $c_{\alpha\beta}$ , средняя и гауссова кривизны  $\Omega$ ,  $K$  имеют вид [7]

$$g^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & K\sin^{-2}\theta \end{vmatrix}, \quad b_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \Omega^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega^{-1}\sin^{-2}\theta \end{vmatrix}$$

$$c_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{vmatrix}, \quad \Omega = (r_0 - ct)^{-1}, \quad K = (r_0 - ct)^{-2}$$

Решения (2.2) в случае сферических волн имеют вид

$$\omega_N = \omega_{0N}(y_1, y_2)r_0 \exp(-b_N t) / (r_0 - c_N t)$$

$$[v_i] = v_{i0}(y_1, y_2)r_0 / (r_0 - c_N t) \quad (2.5)$$

Лучевой ряд (2.1) представляется в виде

$$f(r, \theta, \varphi, t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r - r_0 - c_1 t)^k}{k!} [f_{,n\dots n}^{(k)}]_{\Sigma_1} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r - r_0 - c_2 t)^k}{k!} [f_{,n\dots n}^{(k)}]_{\Sigma_2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r - r_0 - c_3 t)^k}{k!} [f_{,n\dots n}^{(k)}]_{\Sigma_3} \quad (2.6)$$

Частные производные функции  $f$  связаны с производными по криволинейным координатам кинематическими и геометрическими условиями совместности  $(m+1)$ -го порядка [6,8]

$$\begin{aligned} [f_{,i,n\dots n}^{(m+1)}] &= [f_{,n\dots n}^{(m+1)}]v_i + g^{\alpha\beta}[f_{,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{i,\beta} + L_{\beta}^{(m-1)}[f]x_{i,\beta} \\ [f_{,i,n\dots n}^{(m+1)}] &= -c[f_{,n\dots n}^{(m+1)}] + \delta[f_{,n\dots n}^{(m)}]/\delta t + mg^{\alpha\beta}c_{,\beta}[f_{,n\dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + \\ &+ \sum_{R=2}^m C_m^{m-R+1} R! g^{\alpha_1\beta} c_{,\beta} B_{\alpha_1}^{\alpha R} [f_{,n\dots n}^{(m-R)}]_{,\alpha R} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{\beta}^{(m-1)}[f] &= \sum_{R=2}^{m+1} C_m^{m-R+1} (R-1)! g^{\alpha_1\beta} [f_{,n\dots n}^{(m-R+1)}]_{,\alpha R} B_{\alpha_1}^{\alpha R} \\ B_{\alpha_1}^{\alpha R} &= \prod_{N=2}^R b_{\alpha_{N-1}\beta_N} g^{\alpha_N\beta_N} \end{aligned}$$

Продифференцируем систему (1.1)  $m$  раз по нормали  $n$  и запишем в разрывах. Используя кинематические и геометрические условия совместности (2.7), исключая разрывы  $[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m+1)}]$ ,  $[q_{i,n\dots n}^{(m+1)}]$ ,  $[T_{,n\dots n}^{(m+1)}]$ , учитывая что скорости БВ и ЭВ принимают постоянные значения, получим

$$\begin{aligned} (\delta\tau c^2 - (1-\eta)(1-\tau c^2))[v_{k,n\dots n}^{(m+1)}]v_k v_i + (c^2 - \eta)(1-\tau c^2)[v_{i,n\dots n}^{(m+1)}] &= \\ = -\tau c^2 (g^{\alpha\beta}[q_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{k,\beta}v_i + L_{\beta}^{(m-1)}[q_k]x_{k,\beta}v_i) - \\ -\delta\tau c^2 (g^{\alpha\beta}[v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{k,\beta}v_i + L_{\beta}^{(m-1)}[v_k]x_{k,\beta}v_i) - \\ -\tau c^2 v_i \delta[T_{,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - \tau c v_k v_i \delta[q_{k,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - \\ -c[q_{k,n\dots n}^{(m)}]v_k v_i + (1-\tau c^2)(-c(g^{\alpha\beta}[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{j,\beta} + \\ + L_{\beta}^{(m-1)}[\sigma_{ij}]x_{j,\beta}) + c\delta[v_{i,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - v_j \delta[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - v_i \delta[T_{,n\dots n}^{(m)}]/\delta t + \\ + (1-2\eta)(g^{\alpha\beta}[v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{k,\beta}v_i + L_{\beta}^{(m-1)}[v_k]x_{k,\beta}v_i) + \\ + \eta(g^{\alpha\beta}[v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{i,\beta}v_k + L_{\beta}^{(m-1)}[v_k]x_{i,\beta}v_k)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Полагая в тензорном уравнении (2.8)  $c = c_3$ , после умножения на  $v_i$  и суммирования по индексу  $i$  получим

$$\begin{aligned} (\delta\tau c_3^2 - (1-\eta)(1-\tau c_3^2))[v_{k,n\dots n}^{(m+1)}]v_k &= \\ = -\tau c_3^2 (g^{\alpha\beta}[q_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{k,\beta} + L_{\beta}^{(m-1)}[q_k]x_{k,\beta}) - \\ -\delta\tau c_3^2 (g^{\alpha\beta}[v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{k,\beta} + L_{\beta}^{(m-1)}[v_k]x_{k,\beta}) - \\ -\tau c_3^2 \delta[T_{,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - \tau c_3 v_k \delta[q_{k,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - c_3 [q_{k,n\dots n}^{(m)}]v_k + \\ + (1-\tau c_3^2)(-c_3(g^{\alpha\beta}[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{j,\beta} + \\ + L_{\beta}^{(m-1)}[\sigma_{ij}]x_{j,\beta}v_i) + c_3 v_i \delta[v_{i,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - \\ - v_j v_i \delta[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}]/\delta t - \delta[T_{,n\dots n}^{(m)}]/\delta t + \\ + (1-2\eta)(g^{\alpha\beta}[v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha}x_{k,\beta} + L_{\beta}^{(m-1)}[v_k]x_{k,\beta})) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Умножая уравнение (2.8) на  $v_i$  и суммируя по индексу  $i$ , полагая  $c = c_N$ , получим дифференциальное уравнение для изменения величины  $\omega_{nN}^{(m)} = [v_{i,n\dots n}^{(m)}]v_i |_{\Sigma_N}$  на фронте БВ

$$\delta\omega_{nN}^{(m)} / \delta t + b_N\omega_{nN}^{(m)} - c_N\Omega\omega_{nN}^{(m)} = W^{(m-1)}(\omega_N) \quad (2.10)$$

Здесь  $W^{(m-1)}(\omega_N)$  – функция производных по нормали  $\omega_N$  порядка  $m - 1$  и ниже.

Подставляя уравнение (2.9) в систему (2.8) при  $c = c_3$ , получим систему дифференциальных уравнений для определения составляющих вектора  $[v_{i,n\dots n}^{(m)}]$  на фронте ЭВ

$$\delta[v_{i,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - c_3\Omega[v_{i,n\dots n}^{(m)}] = W_3^{(m-1)} \quad (2.11)$$

Выражение в правой части не содержит  $[v_{i,n\dots n}^{(m)}]$ .

При  $m = 1$  из (2.10), (2.11) получим дифференциальные уравнения первого порядка для определения величин  $\omega_{nN}^{(1)} = [v_{i,n}^{(1)}]v_i$  и  $[v_{i,n}^{(1)}]$

$$\begin{aligned} \delta\omega_{nN}^{(1)} / \delta t + (b_N - c_N / (r_0 - c_N t))\omega_{nN}^{(1)} &= \\ = a_N\omega_{0N}r_0 \exp(-b_N t) / (r_0 - c_N t) - & \\ - F_T c_{3-N} r_0 \exp(-b_N t) / (r_0 - c_N t)^3 & \\ \delta[v_{i,n}^{(1)}] / \delta t = c_3[v_{i,n}^{(1)}] / (r_0 - c_N t) & \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь

$$F_T = dr_0^2 (1 + 2dr_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) - 2$$

На фронте БВ выполняются соотношения

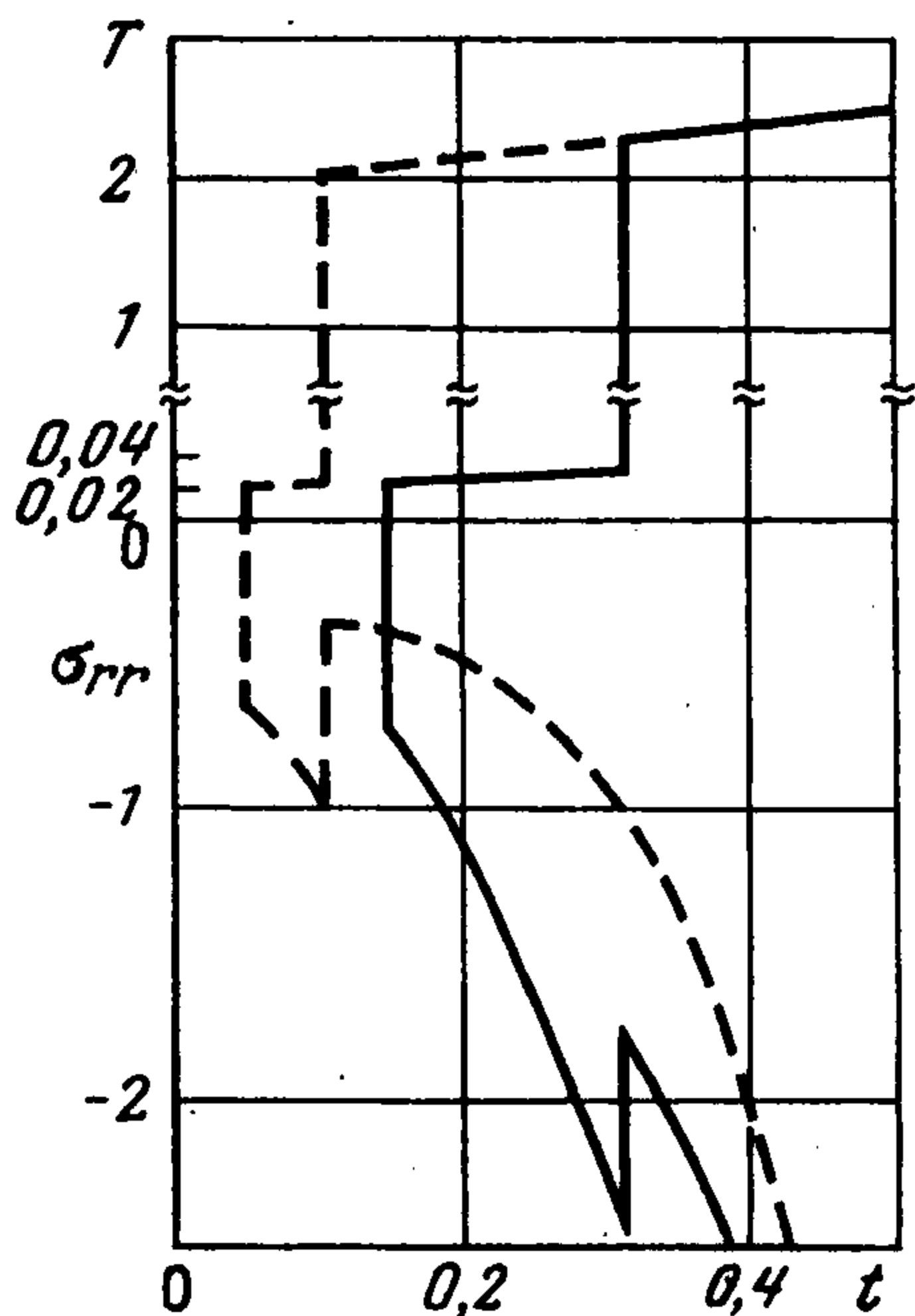
$$\begin{aligned} [T_{,n}^{(1)}] &= \tau(1 - \tau c_N^2)^{-2} \{-\tau c_N(1 - \tau c_N^2)\omega_{nN}^{(1)} + \\ &+ (1 - \tau b_N(1 + \tau c_N^2))\omega_N + \tau c_N(1 - \tau c_N^2)\Omega\omega_N\} \\ [q_{i,n}^{(1)}] &= \delta(1 - \tau c_N^2)^{-2} \{-(1 - \tau c_N^2)\omega_{nN}^{(1)}v_i + \\ &+ c_N(1 - 2\tau b_N)\omega_N v_i - (1 - \tau c_N^2)g^{\alpha\beta}\omega_{N,\alpha}x_{i,\beta}\} \\ -c_N[\sigma_{ij,n}^{(1)}] &= \{(c_N^2 - 2\mu)\omega_{nN}^{(1)} + b_N c_N^{-1}(c_N^2 + 2\mu)\omega_N - \\ &-(c_N^2 - 2\mu)\Omega\omega_N\}\delta_{ij} + 2\mu(\omega_{nN}^{(1)} - b_N c_N^{-1}\omega_N + \Omega\omega_N)v_i v_j \\ &- \mu g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} b_{\alpha\sigma}\omega_N(x_{i,\beta}x_{j,\gamma} + x_{j,\beta}x_{i,\gamma}) + 2\mu g^{\alpha\beta}\omega_{N,\alpha}(x_{i,\beta}v_j + x_{j,\beta}v_i) \\ [v_{i,n}^{(1)}] &= \omega_{nN}^{(1)}v_i + g^{\alpha\beta}\omega_{N,\alpha}x_{i,\beta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

На фронте ЭВ выполняются соотношения

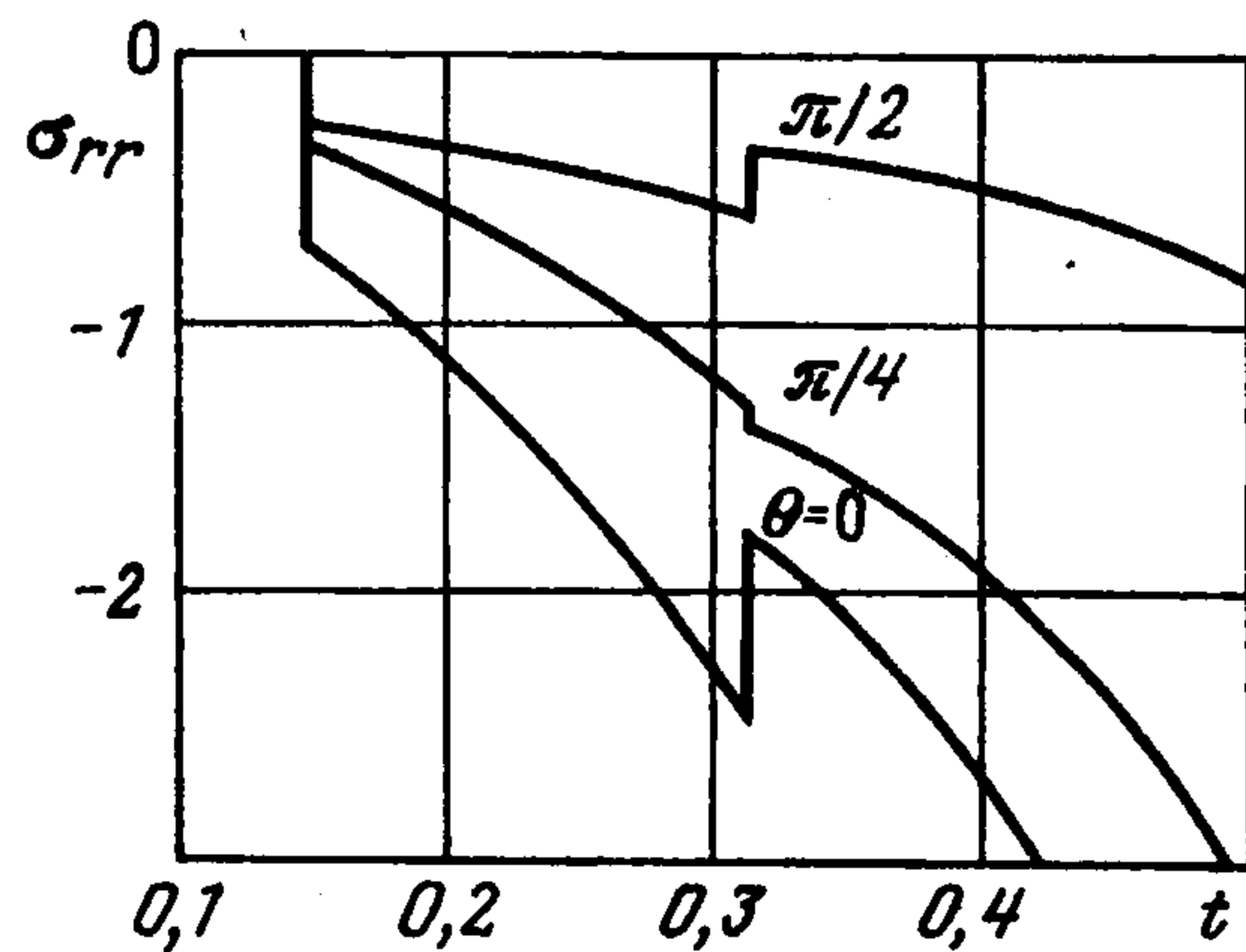
$$\begin{aligned} [T_{,n}^{(1)}] &= 0, [q_{i,n}^{(1)}] = 0, [v_{k,n}^{(1)}]v_k = -g^{\alpha\beta}[v_k]_{,\alpha}x_{k,\beta} \\ -c_3[\sigma_{ij,n}^{(1)}] &= \mu([v_{i,n}^{(1)}]v_j + [v_{j,n}^{(1)}]v_i) + \mu([v_i]v_j + [v_j]v_i)\Omega + \\ &+ \mu g^{\alpha\beta}([v_i]_{,\alpha}x_{j,\beta} + [v_j]_{,\alpha}x_{i,\beta}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решение дифференциальных уравнений системы (2.12) имеет вид

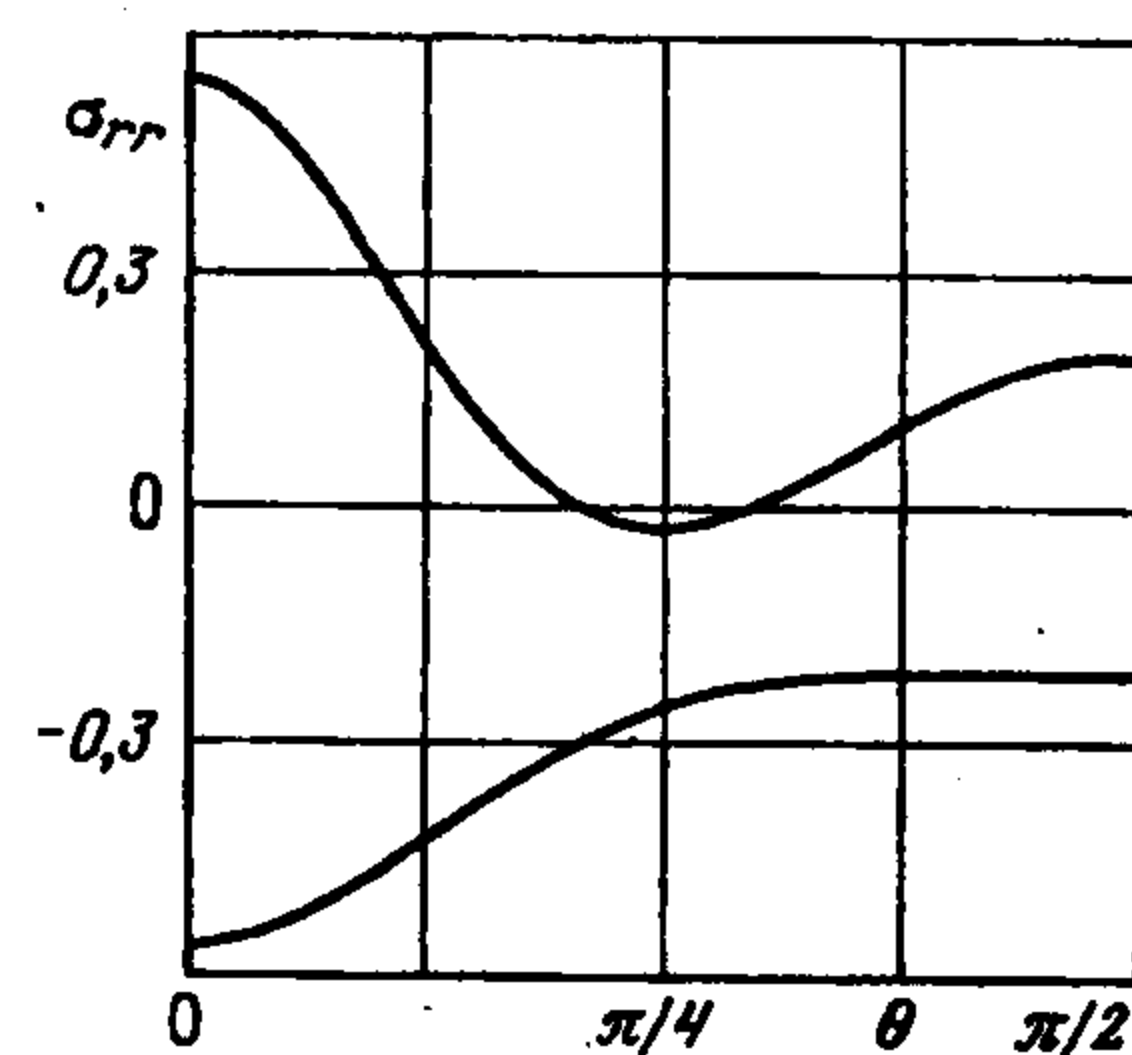
$$\begin{aligned} \omega_{nN}^{(1)} &= [\omega_{n0N}r_0 / (r_0 - c_N t) + (a_N\omega_{0N}r_0 / (r_0 - c_N t) - F_T r_0 / (r_0 - c_N t)^2)] \exp(-b_N t) \\ [v_{i,n}^{(1)}] &= v_{i0}r_0 / (r_0 - c_3 t) \end{aligned} \quad (2.15)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Соотношения (2.3)–(2.6) и (2.13)–(2.15) используются для построения тензора напряжений, температуры, вектора теплового потока и скоростей перемещений. Используя (2.3)–(2.5), подставим лучевые разложения (2.6) для теплового потока и тензора напряжений в (1.2) и положим  $t = 0$ ,  $r = r_0$ . Добавляя условие на ЭВ  $[v_k]v_k = 0$ , получим систему пяти уравнений

$$\delta\omega_{01}/(1-\tau c_1^2) + \delta\omega_{02}/(1-\tau c_2^2) = g_0(0)\exp(-dr_0^2 \sin^2 \theta) \quad (3.1)$$

$$(c_1\omega_{01} + c_2\omega_{02})v_i + c_3v_{i0} = 0, \quad v_{i0}v_i = 0 \quad (3.2)$$

Отметим, что условие (3.2) выполняется на любой достаточно гладкой поверхности, свободной от нагрузки. Из решения системы (3.2) следует, что  $v_{i0} = 0$ . Таким образом ( $[v_i] = 0$ ), показано, что в случае свободной границы ( $\sigma_{ij}v_j = 0$ ) ЭВ представляет собой волну ускорения. Из решения системы (3.1), (3.2) следует, что

$$w_{0N} = F_n \exp(-dr_0^2 \sin^2 \theta) \quad (3.3)$$

$$F_N = c_M(1-\tau c_N^2)(1-\tau c_M^2)g_0(0)/(\delta(c_M(1-\tau c_M^2) - c_N(1-\tau c_N^2)))$$

$$M = 3 - N$$

Используя соотношения (2.3)–(2.5), (2.13)–(2.15), подставим лучевые разложения (2.6) для теплового потока и тензора напряжений в краевые условия (1.2). Продифференцируем полученные уравнения по времени  $t$  и положим  $t = 0$ ,  $r = r_0$ . Добавляя условие на ЭВ  $[v_{k,n}^{(1)}] = -g^{\alpha\beta}[v_k]_{,\alpha}x_{k,\beta}$ , получим систему пяти уравнений для определения  $\omega_{n0N}^{(1)}, v_{in0}^{(1)}$ . Решение этой системы имеет вид

$$\omega_{n0N}^{(1)} = F_{nN}^{(1)} \exp(-dr_0 \sin^2 \theta)$$

$$v_{in0}^{(1)} = \frac{1}{c_3} (S_0 v_i + \sum_{N=1}^2 (-c_N^2 F_{nN}^{(1)} v_i + 2c_3^2 r_0 F_N d \sin 2\theta \cdot x_{i,1})|_{\Sigma_N(0)})$$

Здесь

$$F_{nN}^{(1)} = (Q_0 c_M(1-\tau c_M^2) - S_0 \delta)(1-\tau c_N^2) \times \\ \times (\delta c_N(c_M(1-\tau c_M^2) - c_N(1-\tau c_N^2)))^{-1}$$

$$Q_0 = \sum_{N=1}^2 \left[ \frac{c_N}{r_0} F_T + \frac{c_N}{r_0} - b_N + \frac{c_N^2(1-2\tau b_N)}{1-\tau c_N^2} \right] \times$$

$$\times \frac{c_M(1-\tau c_M^2)g_0(0)}{c_M(1-\tau c_M^2) - c_N(1-\tau c_N^2)}, \quad M = 3 - N$$

$$S_0 = \sum_{N=1}^2 \left[ 2 \left( \frac{c_N^2}{r_0} - c_N b_N - \frac{2c_3^2}{r_0} \right) + \frac{c_N^2}{2} F_T \right] F_N$$

Дифференцируя краевые условия (1.2)  $m$  раз по времени  $t$  и полагая  $t = 0, r = r_0$ , можно определить последующие коэффициенты разложения  $\omega_{n0N, \nu_{in0}}^{(m)}$ .

Для иллюстрации полученных решений на фиг. 1 изображены графики изменения радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$  и температуры  $T$  от времени  $t$  для фиксированных глубин  $r = 0,95$  (штриховая линия) и  $r = 0,85$  (сплошная линия). В качестве материала выбран алюминий ( $\delta = 0,028, \tau = 4,18, \eta = 1,94$ , единица безразмерного времени – 2,39 Пс, единица безразмерной температуры – 300°C, единица безразмерного напряжения –  $1,41 \cdot 10^9$  Па), радиус шара  $r_0 = 1, g_0(t) = 1$ . С приходом первого фронта термоупругой волны радиальные напряжения и температура испытывают скачок. До прихода второго фронта сжимающие напряжения и температура возрастают. Это объясняется тем, что в задаче для шара существенен геометрический фактор. Уменьшение площади движущейся к центру шара поверхности оказывает большее влияние, чем разгрузка материала, как это наблюдается в задаче для полупространства [3]. Основной вклад в изменение температуры дает второй фронт. Отметим, что влияние первого фронта термоупругой волны на изменение температуры незначительно и им можно пренебречь, так как величина скачка первого фронта температуры составляет всего 2% от величины скачка второго фронта температуры.

Зависимость радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$  от времени  $t$  при  $r = 0,85$  для значений угла  $\theta = 0, \theta = \pi/4, \theta = \pi/2$  показана на фиг. 2. Из первого краевого условия (1.2) следует, что на границе шара тепловой поток монотонно убывает с ростом угла  $\theta$  от нуля до  $\pi/2$ . Из графиков видно, что максимальная величина скачка переднего фронта радиального напряжения ( $t = 0,147$ ) наблюдается при угле  $\theta = 0$ , а минимальное значение – при угле  $\theta = \pi/2$ . В дальнейшем со временем сжимающие напряжения возрастают до прихода второго фронта ( $t = 0,312$ ). Вторым фронтом вызывает скачкообразное уменьшение сжимающих радиальных напряжений при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  (разгрузка материала) и увеличение – при  $\theta = \pi/4$  (догружение материала). Расчеты показывают, что фронт ЭВ наступает при  $t = 0,298$  и его влияние на изменение радиального напряжения незначительное.

На фиг. 3 изображены графики зависимости разрывов БВ радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$  от угла  $\theta$  при  $r = 0,85$ . Передний фронт БВ (нижняя кривая), распространяющийся со скоростью  $c_1 = 1,018$ , представляет собой монотонную функцию. Определяющим фактором формирования этого фронта является тепловая нагрузка, которая действует на границе шара  $r_0 = 1$ . Уменьшающийся с ростом угла  $\theta$  тепловой поток вызывает меньшее сжимающее радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$ . Величина скачка второго фронта БВ (верхняя кривая), движущегося со скоростью  $c_2 = 0,480$ , уменьшается на отрезке  $[0, \pi/4]$  и увеличивается на отрезке  $[\pi/4, \pi/2]$ . Положительные значения радиального напряжения  $\sigma_{rr}$  вызывают разгрузку, а отрицательные значения – догружение материала. Видно, что догружение материала наблюдается вблизи угла  $\pi/4$ .

Приведенные решения справедливы для термоупругого тела и могут использоваться при расчете сферических зеркал резонаторов оптических квантовых генераторов, подвергающихся действию высокоинтенсивных тепловых потоков в короткие промежутки времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Parkus H.* Instationäre Wärmespannungen. Wien: Springer, 1959. 165s. = *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 251 с.
2. *Nowacki W.* Thermoelasticity. PWN Oxford; Warszawa: Pergamon Press, 1962. = *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.
4. *Быковцев Г.И., Шаталов А.Г.* Импульсное нагревание полупространства с учетом термоупругого сопряжения и конечности скорости распространения тепла // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 101–107.
5. *Шаталов А.Г.* Разрывные решения в связной задаче термоупругости. // Механика деформируемых сред. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. ун-та, 1979. Вып. 4. С. 85–90.
6. *Thomas T.* Plastic flow and fracture in solids. New York; London: Acad. Press, 1961. = *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
7. *McConnell A.J.* Application of Tensor Analysis. New York: Dover, 1957. = *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
8. *Бабичева Л.А., Быковцев Г.И., Вerveйко Н.Д.* Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических средах // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 1. С. 145–155.

Воронеж

Поступила в редакцию  
21.IX.1998