

УДК 539.3

© 1999 г. И.И. Аргатов

ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА В ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ УПРУГОГО ТЕЛА

Рассматривается пространственная контактная задача для упругого тела произвольной геометрии с одной плоской гранью, в которую вдавливаются штамп в форме эллиптического параболоида. Криволинейная граница тела частично закреплена, а на остальной границе (вне области контакта) тело свободно от напряжений. Предполагается, что размеры площадки контакта малы в сравнении с характерным размером тела. При помощи метода срачиваемых асимптотических разложений выводится модельная задача одностороннего контакта без трения для пограничного слоя, которая решается с привлечением аппарата теории Герца. Строятся асимптотические модели контактного взаимодействия разной степени точности, включающие поправки на геометрию и условия закрепления упругого тела. Исследуется чувствительность к данным факторам параметров эллиптической области контакта.

1. Постановка задачи. Штамп в форме эллиптического параболоида под действием системы сил с равнодействующей Q и моментами M_1, M_2 относительно горизонтальных осей поступательно вдавливается без трения в плоский участок Γ_c границы упругого тела Ω на глубину δ_0 ; тело закреплено на участке Γ_u , а на Γ_σ и Γ_c вне области контакта свободно от напряжений (фигура).

Пусть l – радиус наибольшего содержащегося в Ω полушара с центром в точке O . Обозначим через ε малый положительный параметр и положим

$$R_1 = \varepsilon R_1^*, \quad R_2 = \varepsilon R_2^*; \quad \delta_0 = \varepsilon \delta_0^* \quad (1.1)$$

Здесь R_1, R_2 – радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности штампа в его вершине, причем величины δ_0^* и R_1^*, R_2^* сравнимы с l .

Вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ смещений точек упругого тела Ω удовлетворяет задаче

$$L(\nabla_x)\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) \equiv -\mu \nabla_x \cdot \nabla_x \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) - \frac{\mu}{1-2\nu} \nabla_x \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.2)$$

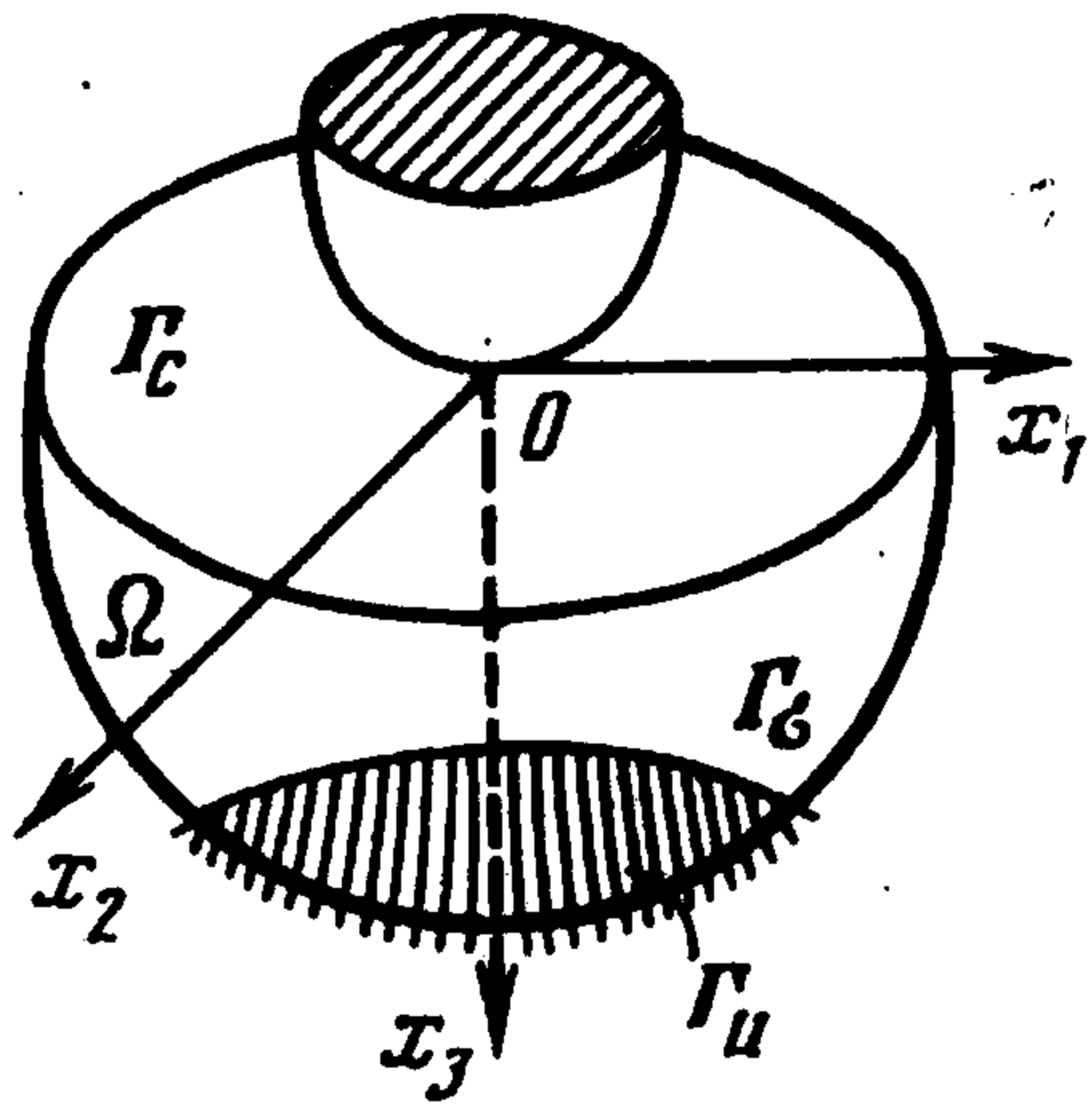
$$\sigma_{31}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \sigma_{32}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (1.3)$$

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}) \geq \varepsilon \delta_0^* - \frac{x_1^2}{2\varepsilon R_1^*} - \frac{x_2^2}{2\varepsilon R_2^*}, \quad \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) \leq 0 \quad (1.4)$$

$$\left[u_3(\varepsilon; \mathbf{x}) - \varepsilon \delta_0^* + \frac{x_1^2}{2\varepsilon R_1^*} + \frac{x_2^2}{2\varepsilon R_2^*} \right] \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (1.5)$$

Здесь μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, $\sigma_{3j}(\mathbf{u})$ – компоненты тензора напряжений, $\sigma^{(n)}$ – вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} .



Область контакта наперед неизвестна и определяется условием положительности контактных давлений

$$p(x_1, x_2) = -\sigma_{33}(\mathbf{u}; x_1, x_2, 0)$$

Ясно, что величины R_1, R_2 и δ_0 определяют размеры области контакта. В случае (1.1) последние оказываются малыми в сравнении с характерным размером l тела Ω .

Одна из целей работы – установить зависимость между силой Q и перемещением δ_0 , а также определить моменты M_1, M_2 . На основании теории Герца в виду равенств (1.1) можем написать

$$Q = \varepsilon^2 Q^* \quad (1.6)$$

Задача (1.2)–(1.5) и родственные ей, включающие условия одностороннего контакта (1.4), изучались в рамках теории вариационных неравенств ([1–3] и др.). Развивались ([4, 5] и др.) асимптотические методы исследования вариационных неравенств. Аналитические решения контактной задачи строились для случая слоя [6] и клина [7] методом "больших λ " [8]. В настоящей работе применяется метод сращиваемых асимптотических разложений [9, 10].

2. Внешнее асимптотическое представление. Обозначим через \mathbf{G} вектор-функцию Грина с полюсом в начале координат, удовлетворяющую соотношениям

$$L(\nabla_x)\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

$$\sigma_{3j}(\mathbf{G}; \mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \setminus O \quad (2.2)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + O(1), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{G}; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{T} – решение задачи Буссинеска (см., например, [11]) о воздействии на границу упругого полупространства $x_3 > 0$ единичной сосредоточенной силы, направленной вдоль оси Ox_3 ,

$$4\pi\mu T_i(\mathbf{x}) = x_i x_3 |\mathbf{x}|^{-3} - (1 - 2\nu)x_i |\mathbf{x}|^{-1} (|\mathbf{x}| + x_3)^{-1}, \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

$$4\pi\mu T_3(\mathbf{x}) = x_3^2 |\mathbf{x}|^{-3} + 2(1 - \nu)|\mathbf{x}|^{-1}$$

Пусть (для простоты записи формул) тело Ω целиком содержится в полупространстве $x_3 > 0$. Тогда регулярная составляющая вектор-функции Грина

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

аннулирует невязку в краевых условиях (2.4), возникающую при подстановке туда суммы (2.6), т.е.

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{g}; \mathbf{x}) = -\sigma^{(n)}(\mathbf{T}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (2.7)$$

Кроме того, при $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ справедливы разложения

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(0) + \sum_{k=1}^6 g_{1,k} \mathbf{V}_k^1(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^9 g_{2,k} \mathbf{V}_k^2(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^3) \quad (2.8)$$

$$\frac{2\pi\mu}{1-\nu} g_3(x_1, x_2, 0) = A + B_1 x_1 + B_2 x_2 + C_{11} x_1^2 + 2C_{12} x_1 x_2 + C_{22} x_2^2 + O((x_1^2 + x_2^2)^{3/2}) \quad (2.9)$$

Так как вектор-функция \mathbf{g} в окрестности начала координат удовлетворяет однородной системе Ламе (2.1) и краевым условиям (2.2), то ее ряд Маклорена, вообще говоря, будет содержать $3(m+1)$ векторный однородный полином \mathbf{V}_k^m степени m ([12], гл. 13, § 1, [13], разд. 5.3)

$$\mathbf{V}_k^m(tx_1, tx_2, tx_3) = t^m \mathbf{V}_k^m(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

Постоянные, входящие в правую часть соотношения (2.9), определяются формой и размерами тела Ω , характером его закрепления и зависят от значения постоянной Пуассона. Если L – размерность длины, то размерности величин A , B_i и C_{ij} ($i, j = 1, 2$) соответственно равны L^{-1} , L^{-2} и L^{-3} .

При уменьшении параметра ε область распределения контактных давлений стягивается к вершине штампа. Поэтому на удалении от нее напряженно-деформированное состояние тела Ω приближенно описываем решением задачи о действии на его границу в точке O сосредоточенной силы величиной Q (см. (1.6))

$$\mathbf{v}(\varepsilon; \mathbf{x}) = \varepsilon^2 Q^* \mathbf{G}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

3. Внутреннее асимптотическое представление. В области местных возмущений введем "растянутые" координаты

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad \xi_i = \varepsilon^{-1} x_i \quad (3.1)$$

При этом участки границы тела, на которых заданы краевые условия (1.5), удаляются от начала координат на расстояния большие $\varepsilon^{-1}l$ (приняли во внимание новый масштаб). Вследствие этого задача для внутреннего асимптотического представления формулируется в полупространстве $\xi_3 \geq 0$. Соотношения (1.2)–(1.4) дают

$$L(\nabla_{\xi})\mathbf{w}(\varepsilon; \xi) = 0, \quad \xi_3 < 0 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{w}; \xi) = \sigma_{32}(\mathbf{w}; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0 \quad (3.3)$$

$$w_3(\varepsilon; \xi) \geq \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2)), \quad \sigma_{33}(\mathbf{w}; \xi) \leq 0 \quad (3.4)$$

$$[w_3(\varepsilon; \xi) - \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2))]\sigma_{33}(\mathbf{w}; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0$$

$$\Phi^*(\xi_1, \xi_2) = (2R_1^*)^{-1}\xi_1^2 + (2R_2^*)^{-1}\xi_2^2$$

Формулы (3.2)–(3.4) замыкаются условием поведения $\mathbf{w}(\varepsilon; \xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, которое получим в результате сращивания с (2.11).

В области сращивания $\{\mathbf{x}: \sqrt{\varepsilon}l/2 \leq |\mathbf{x}| \leq \sqrt{\varepsilon}l\}$ при малых значениях параметра ε находим

$$\mathbf{v}(\varepsilon; \varepsilon\xi) = \varepsilon^2 Q^* \left[\varepsilon^{-1} \mathbf{T}(\xi) + \mathbf{g}(0) + \varepsilon \sum_{k=1}^6 g_{1,k} \mathbf{V}_k^1(\xi) + O(\varepsilon) \right] \quad (3.5)$$

(собрали вместе соотношения (2.11), (2.6) и двухчленное разложение (2.8), осуществили замену (3.1) и учли соотношения (2.5), (2.10)). Таким образом, на основании выражения (3.5) будем иметь

$$\mathbf{w}(\varepsilon; \xi) = \varepsilon Q^* \mathbf{T}(\xi) + \varepsilon^2 \mathbf{V}^*(\varepsilon; \xi) + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

$$\mathbf{V}^*(\varepsilon; \xi) = Q^* \left[\mathbf{g}(0) + \varepsilon \sum_{k=1}^6 g_{1,k} \mathbf{V}_k^1(\xi) \right] \quad (3.7)$$

Оставляя справа в (3.6) лишь первое слагаемое, приходим к уравнениям теории Герца. Привлекая же члены из правой части равенства (3.7), получим различной степени точности уточняющие ее модели.

Решение задачи (3.2)–(3.4), (3.6) представим в виде

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^2 V^*(\varepsilon; \xi) + \varepsilon W(\varepsilon; \xi) \quad (3.8)$$

Вектор V^* удовлетворяет соотношениям (3.2), (3.3), причем $\sigma_{33}(V^*; \xi_1, \xi_2, 0) = 0$. Третья компонента вектор-функции (3.7) при $\xi_3 = 0$ оставляет след (см. (2.10))

$$\frac{2\pi\mu}{1-\nu} V_3^*(\varepsilon; \xi_1, \xi_2, 0) = Q^* [A + \varepsilon(B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2)] \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8) в (3.2)–(3.4), (3.6), приходим к задаче

$$L(\nabla_{\xi})W(\varepsilon; \xi) = 0, \quad \xi_3 < 0$$

$$\sigma_{31}(W; \xi) = \sigma_{32}(W; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0$$

$$W_3(\varepsilon; \xi) \geq \delta_0^* - \Phi^*(\xi_1, \xi_2) - \varepsilon V_3^*(\varepsilon; \xi), \quad \sigma_{33}(W; \xi) \leq 0 \quad (3.10)$$

$$[W_3(\varepsilon; \xi) - \delta_0^* + \Phi^*(\xi_1, \xi_2) + \varepsilon V_3^*(\varepsilon; \xi)] \sigma_{33}(W; \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0$$

$$W(\varepsilon; \xi) = Q^* T(\xi) + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

Ее решение найдем, используя известные результаты (см., например, [14, 15]).

В случае (3.9) область контакта оказывается ограниченной эллипсом.

4. Первая поправка. Пусть $a = \varepsilon a^*$ и e – большая полуось и эксцентриситет эллиптической области контакта. Предположим, что через R_1 обозначен больший из радиусов кривизны. Тогда, ограничиваясь в (3.7), (3.9) только первыми членами, получим уравнения ([15], гл. 5, § 6.5).

$$\delta_0^* - \varepsilon \tilde{Q}^* A = \frac{3\tilde{Q}^*}{2a^*} K(e), \quad \tilde{Q}^* = \frac{(1-\nu)Q^*}{2\pi\mu} \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{3\tilde{Q}^*}{a^{*3}} D(e), \quad \frac{1}{R_2^*} = \frac{3\tilde{Q}^*}{a^{*3}} \frac{B(e)}{1-e^2} \quad (4.2)$$

$$D(e) = e^{-2}[K(e) - E(e)], \quad B(e) = e^{-2}[E(e) - (1-e^2)K(e)]$$

где K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Заметим, что величина \tilde{Q}^* имеет размерность L^2 .

Эксцентриситет области контакта находим из уравнения

$$\frac{R_2^*}{R_1^*} = \frac{(1-e^2)D(e)}{B(e)} \quad (4.3)$$

после чего из (4.2) выражаем a^* через \tilde{Q}^* и подставляем в (4.1). Имеем

$$\delta_0^* = c_{\delta}(e) \left(\frac{\tilde{Q}^*}{\sqrt{R}} \right)^{2/3} + \varepsilon \tilde{Q}^* A \quad (4.4)$$

$$R^* = \frac{2R_1^* R_2^*}{R_1^* + R_2^*}, \quad c_{\delta}(e) = K(e) \left(\frac{9(1-e^2)}{4E(e)} \right)^{1/3} \quad (4.5)$$

Уравнение, связывающее величину прижимающей штамп силы с его перемещением, перепишем, возвращаясь к использованию реального масштаба, в виде

$$\delta_0 = c_{\delta}(e) \left(\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{R}} \right)^{2/3} + \tilde{Q}A, \quad \tilde{Q} = \frac{(1-\nu)Q}{2\pi\mu} \quad (4.6)$$

R – среднее гармоническое радиусов кривизны R_1, R_2 .

Выразим теперь Q через δ_0 . С точностью, с которой было выписано уравнение (4.4), положим

$$\tilde{Q}^* = \tilde{Q}_0^* + \varepsilon \tilde{Q}_1^*; \quad \tilde{Q}_0^* = \sqrt{R^*} \delta_0^{*3/2} c_\delta^{-3/2}(e) \quad (4.7)$$

(величина \tilde{Q}_0^* определена из (4.4) при $\varepsilon = 0$).

Подставим выражение (4.7) в (4.4), заменим приращение первого слагаемого его дифференциалом и, пренебрегая величинами порядка ε^2 , получим

$$\tilde{Q}_1^* = -\frac{3R^*A}{2c_\delta^3(e)} \delta_0^{*2} \quad (4.8)$$

Итак, к формуле (4.6) присоединяется такая:

$$\tilde{Q} = \frac{\sqrt{R} \delta_0^{3/2}}{c_\delta^{3/2}(e)} - \frac{3RA\delta_0^2}{2c_\delta^3(e)} \quad (4.9)$$

Для характерного размера области контакта (в "растянутом" масштабе) согласно (4.7) имеем представление

$$a^* = a_0^* + \varepsilon a_1^*; \quad a_0^* = \sqrt{R^*} \delta_0^* c_a(e) \quad (4.10)$$

$$a_1^* = -R^* \delta_0^* A \frac{c_a^2(e)}{3K(e)}, \quad c_a(e) = \left(\frac{E(e)}{K(e)(1-e^2)} \right)^{1/2}$$

Наконец, контактное давление вычисляется по формуле ([15], гл. 5, § 6.5)

$$p(x_1, x_2) = \frac{3Q}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2(1-e^2)}} \quad (4.11)$$

5. Вторая поправка. Сохраняя в (3.7) оба слагаемые, находим, что внутри области контакта должно соблюдаться равенство (см. (3.10))

$$\begin{aligned} W_3(\varepsilon; \xi_1, \xi_2, 0) &= \delta_0^* - \frac{\xi_1^2}{2R_1^*} - \frac{\xi_2^2}{2R_2^*} - \varepsilon \tilde{Q}^* A - \varepsilon^2 \tilde{Q}^* (B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2) = \\ &= \delta_0^* - \varepsilon \tilde{Q}^* A - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2R_i^*} (\xi_i - \xi_i^0)^2 + O(\varepsilon^4), \quad \xi_i^0 = -\varepsilon^2 \tilde{Q}^* R_i^* B_i \end{aligned}$$

(выделены полные квадраты). Следовательно, в рассматриваемом случае вновь приходим к уравнениям (4.1)–(4.6) с той разницей, что центр пятна контакта смещается в точку с координатами ξ_i^0 ($i = 1, 2$), или, что то же самое,

$$x_i^0 = -\frac{(1-\nu)Q}{4\pi\mu} R_i B_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

Закон распределения контактного давления имеет вид (4.11), где справа надо заменить x_1 и x_2 на $x_1 - x_1^0$ и $x_2 - x_2^0$, соответственно.

Однако, формулы (4.7), (4.8) уточняются

$$\tilde{Q}^* = \tilde{Q}_0^* + \varepsilon \tilde{Q}_1^* + \varepsilon^2 \tilde{Q}_2^*; \quad \tilde{Q}_2^* = \frac{21R^{*3/2}A^2}{8c_\delta^{9/2}(e)} \delta_0^{*5/2} \quad (5.2)$$

Для моментов системы нагрузок, удерживающей штамп в вертикальном положении, получаем выражения

$$M_1 = x_2^\circ Q, \quad M_2 = -x_1^\circ Q \quad (5.3)$$

Из представления решения задачи (3.10) в виде обобщенного потенциала простого слоя вытекает разложение

$$W(\varepsilon; \xi) = Q^* T(\xi) + \sum_{i=1}^2 M_i^* S^{(i)}(\xi) + \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^* S^{(2,n)}(\xi) + O(|\xi|^{-4}), \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

$$S^{(i)}(\xi) = -\frac{\partial T(\xi)}{\partial \xi_2}, \quad S^{(2)}(\xi) = \frac{\partial T(\xi)}{\partial \xi_1}, \quad S^{(2,n)}(\xi) = \frac{\partial^2 T(\xi)}{\partial \xi_1^{2-n} \partial \xi_2^n} \quad (5.4)$$

Интегральные характеристики давления обладают следующими значениями:

$$M_1^* = Q^* \xi_2^\circ, \quad M_2^* = -Q^* \xi_1^\circ \quad (5.5)$$

$$M_{2,0}^* = \frac{Q^*}{2} \left[\frac{1}{5} a^{*2} + (\xi_1^\circ)^2 \right], \quad M_{2,1}^* = \xi_1^\circ \xi_2^\circ Q^*, \quad M_{2,2}^* = \frac{Q^*}{2} \left[\frac{1}{5} a^{*2} (1 - e^2) + (\xi_2^\circ)^2 \right] \quad (5.6)$$

6. Уточнение конструкции асимптотики. Произведем в (5.4) обратную к (3.1) замену координат (множитель ε слева поставлен в виду (3.8))

$$\varepsilon W(\varepsilon; \varepsilon^{-1} x) \sim \varepsilon^2 Q^* T(x) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^2 M_i^* S^{(i)}(x) + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^* S^{(2,n)}(x) + \dots \quad (6.1)$$

По методу сращиваемых разложений выписанные справа в (6.1) слагаемые в главном определяют характер особенности в точке O внешнего асимптотического представления.

Уточняя формулу (2.11), примем во внимание, что коэффициенты (5.5) оказываются порядка ε^2 (см. (5.1)), и внешнее асимптотическое представление исходной задачи (1.2)–(1.5) назначим в виде

$$v(\varepsilon; x) = Q G(x) + \sum_{n=0}^2 M_{2,n} G^{(2,n)}(x) \quad (6.2)$$

где введены (как и сила Q на данном этапе не определенные) полимоменты

$$M_{2,n} = \varepsilon^4 M_{2,n}^*, \quad n = 0, 1, 2 \quad (6.3)$$

Вектор-функция $G^{(2,n)}$ удовлетворяет соотношениям (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) и такому:

$$G^{(2,n)}(x) = S^{(2,n)}(x) + O(1), \quad |x| \rightarrow 0$$

Результатом сращивания внешнего (6.2) и внутреннего асимптотических представлений вместо соотношения (3.6) будет следующее:

$$w(\varepsilon; \xi) = \varepsilon Q^* T(\xi) + \varepsilon \sum_{n=1}^2 M_{2,n}^* S^{(2,n)}(\xi) + \varepsilon^2 V^*(\varepsilon; \xi) + O(|\xi|^{-4}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (6.4)$$

Здесь в соответствии с (2.8), (2.9)

$$V^*(\varepsilon; \xi) = Q^* \left[g(0) + \varepsilon \sum_{k=1}^6 g_{1,k} V_k^1(\xi) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^9 g_{2,k} V_k^2(\xi) \right] + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^* g^{(2,n)}(0)$$

$$\frac{2\pi\mu}{1-\nu} V_3^*(\varepsilon; \xi_1, \xi_2, 0) = Q^* A + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^* A^{(2,n)} +$$

$$+ Q^* [\varepsilon (B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2) + \varepsilon^2 (C_{11} \xi_1^2 + 2C_{12} \xi_1 \xi_2 + C_{22} \xi_2^2)] \quad (6.5)$$

Решение задачи для пограничного слоя (3.2)–(3.4), (6.4), выделив полиномиальную часть, представим в форме (3.8). При этом вектор W удовлетворяет задаче (3.10), в которой надо сделать подстановку (6.5) и последнее соотношение заменить таким:

$$W(\varepsilon; \xi) = Q^* T(\xi) + \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^* S^{(2,n)}(\xi) + O(|\xi|^{-4}), \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

7. Третья поправка. В общей ситуации коэффициент C_{12} в (6.5) не равен нулю. Тем самым, эллиптическая область контакта оказывается повернутой относительно осей координат на некоторый угол ϕ . Если $R_1^* = R_2^*$, то ϕ определяется квадратичной формой

$$\sum_{i,j=1}^2 C_{ij} \xi_i \xi_j \quad (C_{21} = C_{12})$$

Если $R_1^* > R_2^*$, то при малых ε в главном

$$\phi = -\varepsilon^3 \tilde{Q}_0^* \frac{2R_1^* R_2^*}{R_1^* - R_2^*} C_{12} \quad (7.1)$$

причем значение \tilde{Q}_0^* дается второй формулой (4.7).

Для определения характеристик области контакта и зависимости между силой и перемещением (удерживая только члены до порядка ε^3 включительно) имеем уравнения

$$\delta_0^* - \varepsilon \tilde{Q}^* A - \varepsilon^3 \sum_{n=0}^2 \tilde{M}_{2,n}^{*0} A^{(2,n)} = \frac{3\tilde{Q}^*}{2a^*} K(e) \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{R_1^*} + \varepsilon^3 2\tilde{Q}_0^* C_{11} = \frac{3\tilde{Q}^*}{a^{*3}} D(e), \quad \frac{1}{R_2^*} + \varepsilon^3 2\tilde{Q}_0^* C_{22} = \frac{3\tilde{Q}^*}{a^{*3}} \frac{B(e)}{1-e^2} \quad (7.3)$$

Величины $\tilde{M}_{2,n}^{*0} = (1-\nu)(2\pi\mu)^{-1} M_{2,n}^{*0}$ согласно (5.6) принимают значения

$$\tilde{M}_{2,n}^{*0} = \frac{\tilde{Q}_0^*}{10} a_0^{*2}, \quad \tilde{M}_{2,1}^{*0} = 0, \quad \tilde{M}_{2,2}^{*0} = \frac{\tilde{Q}_0^*}{10} a_0^{*2} (1-e_0^2) \quad (7.4)$$

Здесь \tilde{Q}_0^* , a_0^* и e_0 – решение системы (7.2), (7.3) при $\varepsilon = 0$.

Предполагается, что левая часть первого равенства (7.3) меньше левой части второго, так что большая ось эллипса, ограничивающего область контакта, ориентирована вдоль оси абсцисс. В случае $R_1^* = R_2^*$ коэффициенты C_{11} и C_{22} в (7.3) должны быть заменены меньшим и большим собственными значениями матрицы $\|C_{ij}\|$, соответственно.

Не выходя за рамки принятой точности, из (7.3) выводим

$$\frac{R_2^*}{R_1^*} \left(1 + \varepsilon^3 2\tilde{Q}_0^* [C_{11} R_1^* - C_{22} R_2^*] \right) = \frac{(1-e^2) D(e)}{B(e)} \quad (7.5)$$

Значит, эксцентриситет площадки контакта, вообще говоря, зависит и от силы, действующей на штамп.

Обозначим через e_0 корень уравнения (4.3). Тогда результат приближенного решения уравнения (7.5) имеет вид

$$e^2 = e_0^2 - \varepsilon^3 2\tilde{Q}_0^* (C_{11} R_1^* - C_{22} R_2^*) c_e(e_0) \quad (7.6)$$

$$c_e(e_0) = \frac{2B(e_0)^2}{E(e_0)C(e_0) + B(e_0)D(e_0)}; \quad C(e) = e^{-2}[D(e) - B(e)] \quad (7.7)$$

При выводе (7.6), (7.7) использованы формулы для полных эллиптических интегралов и их производных ([16], гл. 9, разд. С, § 2.3).

Уравнение, связывающее силу с перемещением, можно получить подстановкой в (7.2) величины a^* через \tilde{Q}^* и e , выраженной из соотношений (7.3). Асимптотика его решения (зависимость \tilde{Q}^* от δ_0^* с точностью до членов порядка ε^4) строится с привлечением формулы (7.6).

8. Замечания. На следующем этапе уточнения конструкции асимптотики, вообще говоря, в модельной задаче для пограничного слоя не будут соблюдаться условия, обеспечивающие эллиптичность области контакта ([17], § 3).

Формулы (4.10), (5.1), (7.1), (7.6) показывают чувствительность параметров пятна контакта к размерам, форме и условиям закрепления упругого тела.

Напомним, что $A = 4\pi\mu(1-\nu)^{-1}g_3(0)$, где g_3 – нормальная к границе составляющая регулярной части вектор-функции Грина. При помощи формулы Бетти получается представление

$$g_3(0) = - \int_{\Gamma_u} \sigma^{(n)}(\mathbf{G}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) ds + \int_{\Gamma_\sigma} \sigma^{(n)}(\mathbf{g}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}) ds$$

В случае, когда Γ_σ отсутствует, а Γ_u разделяет полупространство на две области Ω и Ω_∞ , нетрудно доказать отрицательность коэффициента A . Так, согласно (2.7)

$$g_3(0) = - \int_{\Gamma_u} \sigma^{(n)}(\mathbf{g}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) ds + \int_{\Gamma_u} \sigma^{(n)}(\mathbf{T}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) ds$$

Пусть $E(\Omega; \mathbf{u})$ – запасенная телом Ω потенциальная энергия упругой деформации, отвечающая полю перемещений \mathbf{u} . Тогда, используя известный [18] прием и теорему Клапейрона, найдем

$$g_3(0) = -2E(\Omega; \mathbf{g}) - 2E(\Omega_\infty; \mathbf{T})$$

Автор благодарит С.А. Назарова за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0876).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Кравчук А.С. Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 283–288.
4. Назаров С.А. О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 115–126.
5. Аргатов И.И., Назаров С.А. Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 110–118.
6. Порошин В.С. К вопросу об ограниченности контактных давлений на контуре эллиптического в плане штампа, взаимодействующего с упругим слоем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 466–472.
7. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.

8. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672–683.
9. Ван-Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
10. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
13. Арутюнян Н.Х., Мовчан А.Б., Назаров С.А. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. Т. 10. № 4. С. 3–91.
14. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
15. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
17. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1959. 107 с.
18. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
9.VII.1998