

УДК 539.3

© 1999 г.

А.Г. Колпаков, И.Г. Шеремет

ЖЕСТКОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

Получены вариационные принципы и оценки для жесткостей неоднородных пластинок периодического строения, вытекающие из асимптотического метода анализа задачи теории упругости в областях малой толщины [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело периодического строения, занимающее область малой толщины ε (фиг. 1). Характерный размер ячейки периодичности (ЯП) P_ε тела в плоскости Ox_1x_2 также имеет порядок ε . Упругие постоянные $a_{ijkl}(x/\varepsilon)$ тела – функции аргумента x , периодические по $x_1, x_2 \in P_\varepsilon$.

Известно [1] (для случая плоской пластинки [2]), что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи теории упругости для описанного тела стремится к решению задачи теории пластинок с определяющими уравнениями

$$N_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 e_{\gamma\delta} + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 \rho_{\gamma\delta} \quad (1.1)$$

$$M_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 e_{\gamma\delta} + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^2 \rho_{\gamma\delta}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

где $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$ – усилия и моменты; $e_{\gamma\delta}, \rho_{\gamma\delta}$ – деформации в плоскости пластинки и кривизны; $A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{v+\mu}$ ($v, \mu = 0, 1$) – жесткости пластинки (при $v = \mu = 1$ – изгибные, при $v = \mu = 0$ – в плоскости пластинки), вычисляемые следующим образом [1, 2]. Решается так называемая ячеечная задача (ЯЗ)

$$(a_{ijkl}(y) N_{k,l}^{\gamma\delta v} + (-1)^v a_{ij\gamma\delta}(y) y_3^v),_{,j} = 0 \text{ в } P_1 \quad (1.2)$$

$$(a_{ijkl}(y) N_{k,l}^{\gamma\delta v} + (-1)^v a_{ij\gamma\delta}(y) y_3^v), n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1$$

функция $N^{\gamma\delta v}(y)$ периодична по $y_1, y_2 \in P_1, j = \partial/\partial y_j$. Условие периодичности имеет следующий смысл: Γ_1 – свободная поверхность ЯП. Оставшаяся часть границы ЯП, обозначим ее Γ_0 , представляет собой грани соприкосновения соседних ЯП. Условие периодичности относится именно к этим граням.

Жесткости подсчитываются по формуле

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{v+\mu} = \left\langle (-1)^\mu y_3^\mu (a_{\alpha\beta kl}(y) N_{k,l}^{\gamma\delta v} + (-1)^v y_3^v (a_{\alpha\beta\gamma\delta}(y))) \right\rangle \quad (1.3)$$

$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{mes S_1 P_1} \int \cdot dy$ – среднее по ЯП $P_1 = \varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \{y = x/\varepsilon : x \in P_\varepsilon\}$ в безразмерных

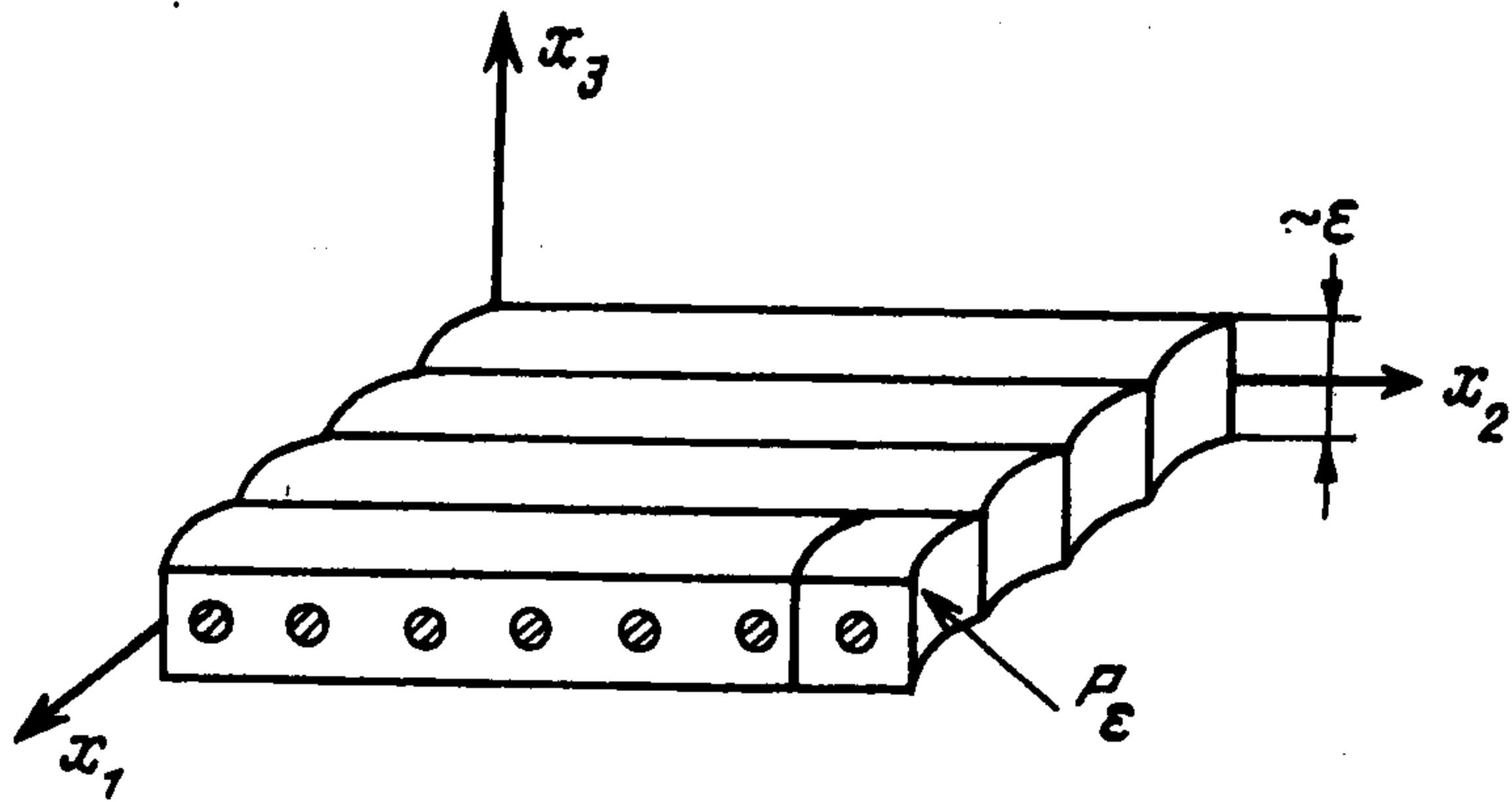
координатах $y = x/\varepsilon, S_1$ – проекция P_1 на плоскость Oy_1y_2 .

Исследование будет сосредоточено на изучении жесткостей, причем основное внимание будет уделено изгибным жесткостям.

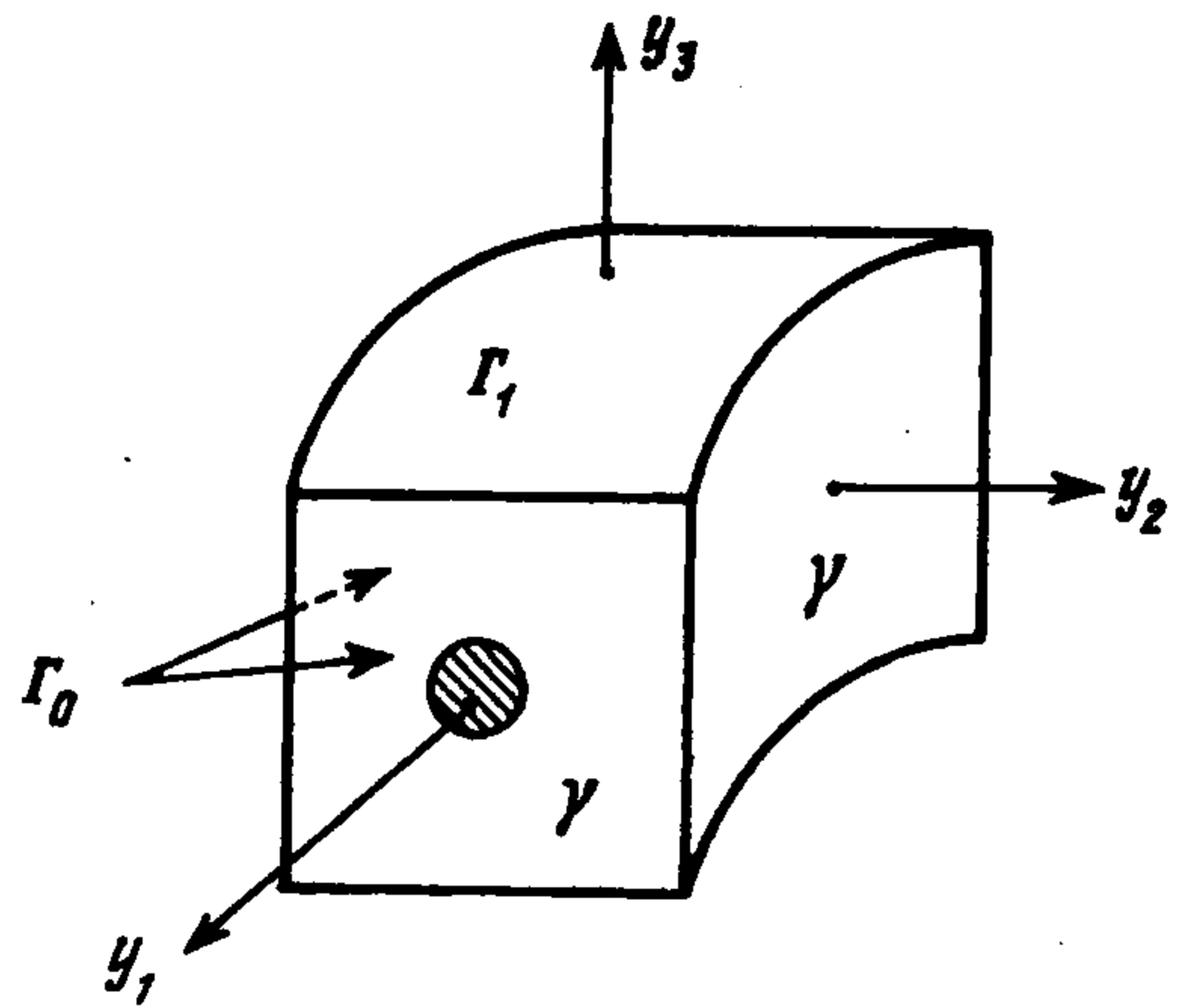
Для плоских пластинок была приведена формула ([2], формула (6.27)), которую можно записать следующим образом:

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^2 = \left\langle a_{ijkl}(y) (N_{k,l}^{\gamma\delta 1} - y_3 \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta}) (N_{i,j}^{\alpha\beta 1} - y_3 \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}) \right\rangle \quad (1.4)$$

($\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), представляющая $A_{\alpha\beta\gamma\delta}^2$ в виде квадратичного функционала, что удобно для получения вариационных принципов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Проверим, что формула (1.4) сохраняется для пластинок с неплоскими поверхностями (например, для оребренных, волнистых и т.д.). Для этого покажем, что (1.4) – следствие соотношений (1.2), (1.3). Умножим уравнение из (1.2) на $N_i^{\alpha\beta 1}$ и проинтегрируем результат по частям на P_1 с учетом остальных условий из (1.2). Получим равенство

$$0 = \langle a_{ijkl}(y)(N_{k,l}^{\gamma\delta 1} - y_3 \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta}) N_{i,j}^{\alpha\beta 1} \rangle \quad (1.5)$$

Вычитая это равенство из (1.3) при $\nu = \mu = 1$, получим (1.4).

2. Вариационные принципы и оценки для изгибных жесткостей. С целью получения вариационных принципов для жесткостей установим связь между ЯЗ (1.2), ее функционалами Лагранжа и Кастильяно [3, 4] и жесткостями (1.4) (для балок прототип этого приема изложен ранее [5]). Составим функционал Лагранжа $J_u(u)$ для задачи (1.2). Он имеет вид [3, 4]

$$J_u(u) = \langle a_{ij\gamma\delta}(y) y_3 u_{i,j} \rangle - \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}(y) u_{i,j} u_{k,l} \rangle \quad (2.1)$$

и рассматривается на множестве возможных перемещений

$$V = \{u(y) \in H^1(P_1): u(y) \text{ периодична по } y_1, y_2 \in P_1\} \quad (2.2)$$

Можно получить функционал Кастильяно, рассмотрев задачу, двойственную к задаче максимизации $J_u(u)$ на V . Вычисление функционала двойственной задачи можно провести аналогично изложенному ранее ([4], гл. 7, § 4) с одним изменением, связанным с условием периодичности в определении (2.2) (оно заменяет условие жесткого закрепления из [4]).

Для рассматриваемого случая положим (используются принятые ранее обозначения [4]) $f_i = -(a_{ij\gamma\delta}(y) y_3)_{,j}$ в P_1 – массовые силы, $g_i = a_{ij\gamma\delta}(y) y_3 n_j$ на Γ_1 – поверхностные напряжения. Теперь подсчет $F^*(-\Lambda^* \sigma)$ проводится аналогично приведенному ранее ([4], гл. 7, § 4) и приводит к равенствам

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ в } P_1, \sigma_{ij} n_j - g_i = 0 \text{ на } \Gamma_1 \quad (2.3)$$

Для функций, удовлетворяющих условиям (2.3), имеем $\Lambda v = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ – деформация. При этом $v \in V$ и $v = 0$ на Γ_1 . Для гладких функций

$$\langle \sigma_{ij} n_j, v_i \rangle = \int_{\gamma} [\sigma_{ij} n_j] v_i dy \quad (2.4)$$

Квадратными скобками обозначена разность значений функции на противоположных гранях ЯП (фиг. 2). При получении формулы (2.4) учтено, что значения функции $v \in V$

равны на этих гранях. Из (2.3) получаем в принятых ранее обозначениях ([4], гл. 7, § 4)

$$F^*(-\Lambda^*\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(y)y_3)_{,j} = 0 \text{ в } P_1 \\ (\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(y)y_3)n_j = 0 & \text{на } \Gamma_1 \\ [\sigma_{ij}n_j] = 0 & \text{на } \gamma \\ +\infty & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (2.5)$$

Последнее равенство в (2.5) означает периодичность $\sigma_{ij}n_j$ по $y_1, y_2 \in P_1$.

Замечание 1. Упругие постоянные $a_{ijkl}(y)$ периодичны по $y_1, y_2 \in P_1$, поэтому условия периодичности $(\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(y)y_3)n_j$ и $\sigma_{ij}n_j$ по $y_1, y_2 \in P_1$ равносильны.

Введем множество допустимых напряжений

$$\Sigma = \{ \sigma_{ij} \in L(P_1) : (\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(y)y_3)_{,j} = 0 \text{ в } P_1, (\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(y)y_3)n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1, \\ (\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(y)y_3)n_j \text{ периодичны по } y_1, y_2 \in P_1 \} \quad (2.6)$$

Функционал Кастильяно $J_\sigma(\sigma)$ ($-G^*(-\sigma)$) в принятых ранее обозначениях ([4], гл. 7, § 4) имеет вид

$$J_\sigma(\sigma) = \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}^{-1}(y) \sigma_{ij} \sigma_{kl} \rangle \quad (2.7)$$

где a_{ijkl}^{-1} — тензор, обратный к a_{ijkl} , и в силу полученных ранее результатов ([4], гл. 7, предложение 4.1; гл. 3, теорема 4.1) выполнено соотношение

$$\max_{u \in V} J_u(u) = \min_{\sigma_{ij} \in \Sigma} J_\sigma(\sigma) \quad (2.8)$$

Замечание 2. При получении равенства (2.8) на основании упомянутых теорем из [4] надо иметь в виду, что для функций $u \in V$, удовлетворяющих условию $\langle u \rangle = 0$, для функционала $J_u(u)$ выполнено неравенство Корна [6], в силу чего условия теоремы III.4.1 [4] выполнены на $V_0 = \{u \in V : \langle u \rangle = 0\}$, и в силу нее равенство (2.8) справедливо на V_0 . Но поскольку $J_u(u)$ не меняет своего значения при перемещении тела как твердого целого, то соотношение (2.8) оказывается справедливым и для любой $u \in V$.

Обратимся теперь к формуле (1.4). При $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\nu = \mu = 1$ она принимает вид

$$A_{\alpha\beta\alpha\delta}^2 = \langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)y_3^2 \rangle - 2J_u(u) \quad (2.9)$$

Здесь учтено соотношение (2.1).

ЯЗ (1.4) является уравнением Эйлера для задачи максимизации $J_u(u)$ на V . Ее решение единственно на V_0 [6]. Тогда, если учесть замечание 2, $N^{\alpha\beta 1}$ решает приведенную выше задачу минимизации. Имея это в виду, на основании (2.7) и (2.9) получаем

$$\langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)y_3^2 \rangle - 2 \max_{u \in V} J_u(u) = A_{\alpha\beta\alpha\beta}^2 \langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)y_3^2 \rangle - 2 \min_{\sigma_{ij} \in \Sigma} J_\sigma(\sigma) \quad (2.10)$$

что представляет собой два вариационных принципа (в перемещениях и в напряжениях) для изгибных жесткостей неоднородной пластинки периодического строения.

При произвольных $u \in V$, $\sigma_{ij} \in \Sigma$ из (2.11) получаем двустороннюю оценку для жесткостей

$$\langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)y_3^2 \rangle - 2J_u(u) \geq A_{\alpha\beta\alpha\beta}^2 \geq \langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)y_3^2 \rangle - 2J_\sigma(\sigma) \quad (2.11)$$

3. Примеры. 3.1. Вариационный принцип в напряжениях на множестве, не зависящем от упругих постоянных. Рассмотрим вариационный принцип в напряжениях. Его удобно записать в терминах величин $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - a_{ij\delta}(\mathbf{y})y_3$. Пользуясь замечанием 1, получим из (2.10)

$$A_{\alpha\beta\alpha\beta}^2 = \max_{\sigma'_{ij} \in \Sigma} \left\langle -a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y})\sigma'_{ij}\sigma'_{kl} + 2\sigma_{\alpha\beta}y_3 \right\rangle \geq \left\langle a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y})\sigma'_{ij}\sigma'_{kl} + 2\sigma'_{\alpha\beta}y_3 \right\rangle \text{ для любых } \sigma'_{ij} \in \Sigma' \quad (3.1)$$

где

$$\Sigma' = \{\sigma_{ij} \in L(P_1) : \sigma_{ij,j} = 0 \text{ в } P_1, \sigma_{ij}n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1, \sigma_{jj}n_j \text{ периодична по } y_1, y_2 \in P_1\} \quad (3.2)$$

Множество Σ' (3.2) описывает равновесные напряжения в P_1 с соответствующими краевыми условиями. При этом Σ' не зависит от упругих постоянных. В частности, в качестве Σ' могут быть взяты напряжения, соответствующие решениям ЯЗ (1.4) с любыми упругими постоянными, например, решениям для пластинки из однородного материала.

3.2. Оценка сверху. Полагая в (2.11) $\mathbf{u} = 0$, получим

$$A_{\alpha\beta\alpha\beta}^2 \leq \left\langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{y})y_3^2 \right\rangle \quad (3.3)$$

3.3. Оценка на основании напряжений в однородных пластинках с плоскими поверхностями. Воспользуемся соотношением (3.1) и замечанием к нему. В однородных пластинках с плоскими поверхностями при изгибе $\sigma'_{\alpha\alpha} \neq 0$ ($\alpha\alpha = 11, 22$), а остальные $\sigma'_{\alpha\beta} = 0$. Очевидно, напряжения указанного вида принадлежат Σ' . Рассмотрим случай $\alpha = \beta = 1$ – изгибную жесткость A_{1111}^2 . Выражение в правой части (3.1) для изотропного материала принимает вид

$$\left\langle -a_{1111}^{-1}(\mathbf{y})\sigma_{11}'^2 - a_{2222}^{-1}(\mathbf{y})\sigma_{22}'^2 - 2a_{1122}^{-1}(\mathbf{y})\sigma_{11}'\sigma_{22}' + 2\sigma_{11}'y_3 \right\rangle \quad (3.4)$$

Поскольку принадлежность к Σ' не накладывает на $\sigma_{11}', \sigma_{22}'$ никаких ограничений, можно провести максимизацию выражения (3.4) по $\sigma_{11}', \sigma_{22}'$. Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$-a_{1111}^{-1}\sigma_{11}' - a_{1122}^{-1}\sigma_{22}' + y_3 = 0$$

$$-a_{1122}^{-1}\sigma_{11}' - a_{2222}^{-1}\sigma_{22}' = 0$$

При учете соотношений $a_{1111}^{-1} = a_{2222}^{-1} = 1/E$, $a_{1122}^{-1} = -\nu/E$ (E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона) для изотропного материала получим

$$-\frac{\sigma_{11}'}{E} + \frac{\nu\sigma_{22}'}{E} + y_3 = 0, \quad \frac{\nu\sigma_{11}'}{E} - \frac{\sigma_{22}'}{E} = 0 \quad (3.5)$$

Решение (3.5) есть

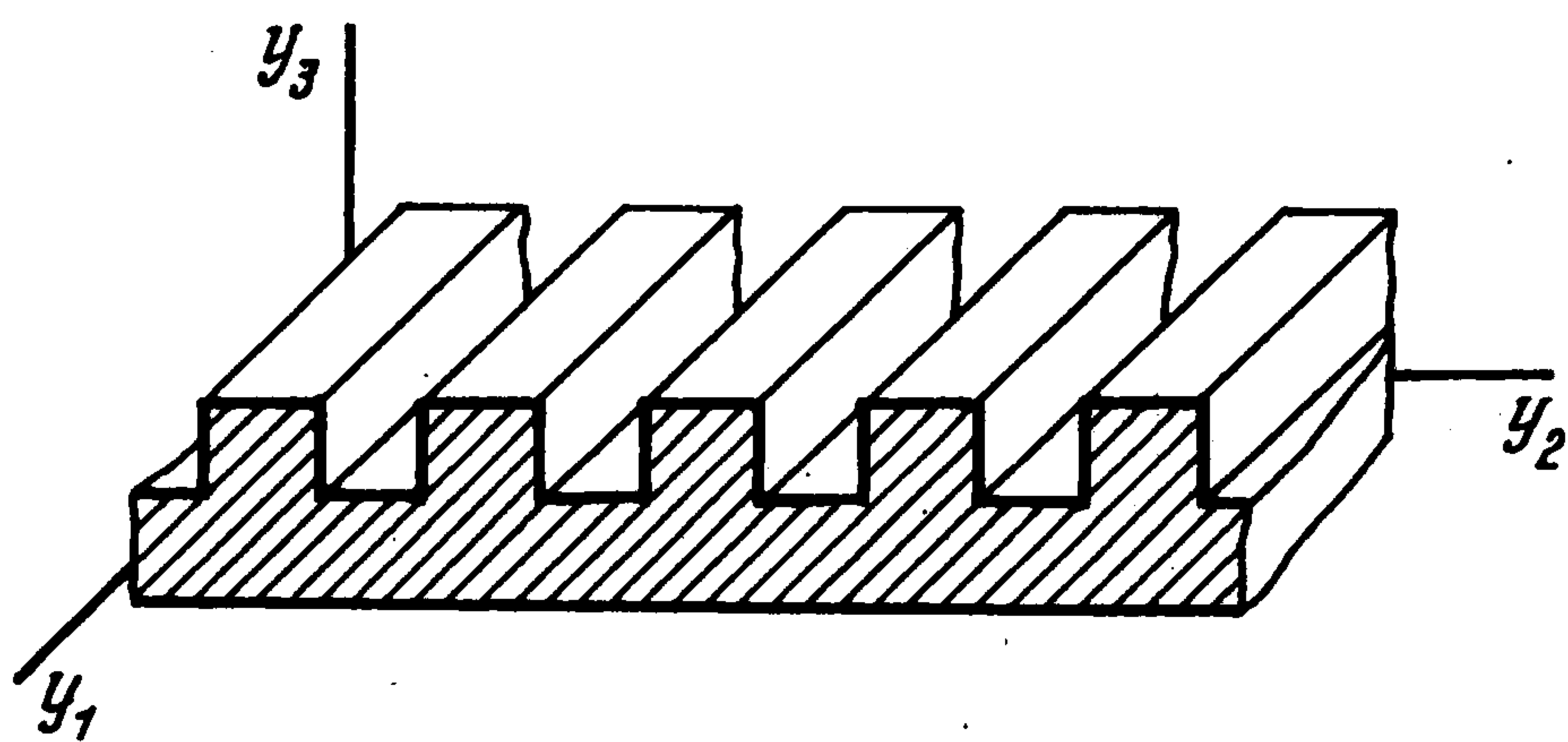
$$\sigma_{11}' = F(\mathbf{y}), \quad \sigma_{22}' = -\nu(\mathbf{y})F(\mathbf{y}); \quad F(\mathbf{y}) = E(\mathbf{y})y_3/(1 - \nu^2(\mathbf{y}))$$

Отметим, что это – точное значение напряжений для однородных и слоистых пластинок [1, 7].

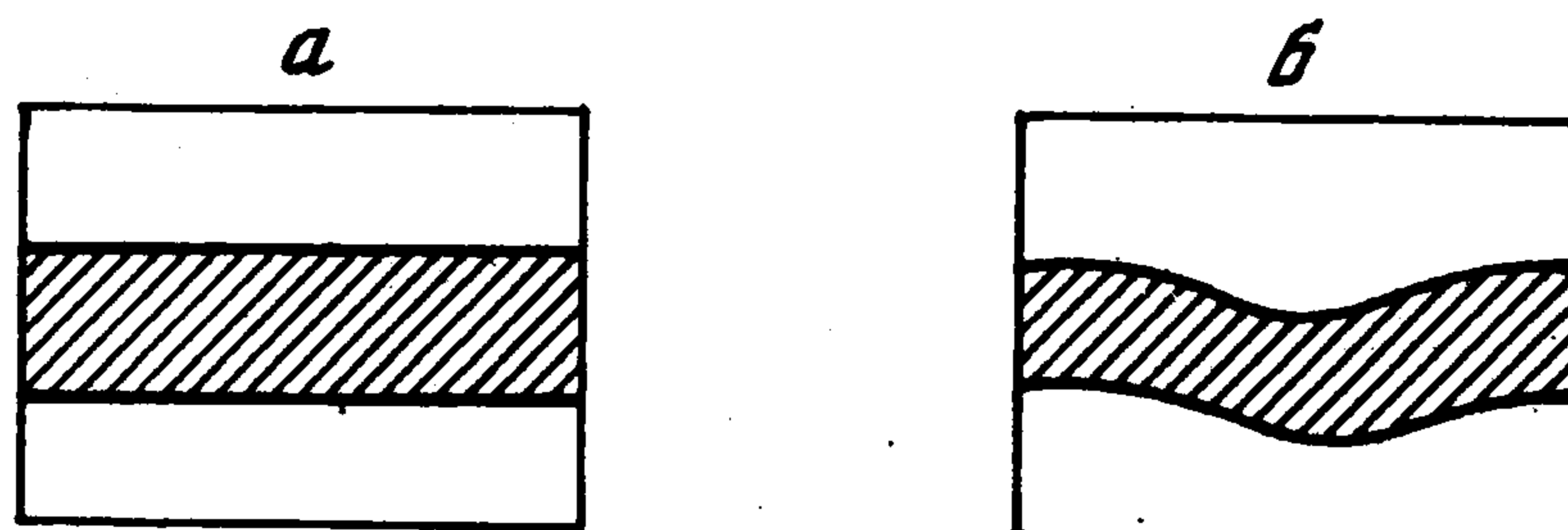
Подстановка полученных напряжений в (4.2) дает

$$A_{1111}^2 \geq \langle F(\mathbf{y}) \rangle = \left\langle \frac{E(\mathbf{y})y_3^2}{1 - \nu^2(\mathbf{y})} \right\rangle \quad (3.6)$$

Правая часть этой оценки соответствует классической формуле для вычисления жесткостей однородных и слоистых пластинок. Для других типов пластинок (3.6) – верхняя оценка. При этом $E(\mathbf{y}), \nu(\mathbf{y})$ могут произвольно зависеть от \mathbf{y} . В частности, оценка применима



Фиг. 3



Фиг. 4

для случая возмущений геометрии слоев в пластинке слоистого строения [8]. То, что жесткость слоистой пластинки с идеальными слоями дает минимум жесткости, согласуется с отсутствием в соответствующих формулах из [8] линейного члена в разложении жесткости в ряд теории возмущений.

Отметим, что из совпадения правой части неравенства (3.6) с жесткостью пластинки с идеальными слоями следует, что пластинка с неплоскими слоями будет иметь большую жесткость.

Так, из изображенных на фиг. 3 пластинок, пластинка *б* имеет большую жесткость, чем пластинка *а*.

Согласно (3.3)

$$A_{1111}^2 \leq \left\langle \frac{E(y)(1-\nu(y))y_3^2}{(1+\nu(y))(1-2\nu(y))} \right\rangle$$

Разность между верхней и нижней оценками при $\nu = 0,3$ для всех компонентов, равна $\sim 0,8 \langle E(y) y_3^2 \rangle$.

3.4. *Однонаправленные пластинки.* Пусть область, занятая пластинкой, имеет вид цилиндра с направляющей Oy_1 (фиг. 4). В этом случае $n_1 = 0$ на Γ_1 – свободной поверхности ЯП и напряжения вида $\sigma'_{11} \neq 0$, $\sigma'_{ij} = 0$ при $ij \neq 11$ принадлежат Σ' для любых σ'_{11} . Тогда соотношение (3.1) для $\alpha = \beta = 1$ (жесткость в направлении оси Oy_1) принимает вид

$$\langle -a_{1111}^{-1}(y)\sigma'_{11}{}^2 + 2\sigma'_{11}y_3 \rangle \quad (3.7)$$

Из уравнения Эйлера для (3.7) следует, что $\sigma'_{11} = -y_3/a_{1111}^{-1}$. Подставляя это значение в (3.7) и учитывая, что для изотропных материалов $a_{1111}^{-1} = 1/E$, получим оценку

$$A_{1111}^2 \geq \langle E(y)y_3^2 \rangle \quad (3.8)$$

3.5. *Оценка жесткости через решение во "внутренней" области.* Рассмотрим жесткость на изгиб A_{2222}^2 (в направлении Oy_2) для пластинки типа представленной на фиг. 3. С механической точки зрения ясно, что в данном направлении ребра на изгиб работают мало, а оценка жесткости снизу дается, например, жесткостью горизонтального слоя, выделенного на фиг. 3 штриховкой. Это можно обосновать строго, исходя из оценок в напряжениях.

Пусть $P \subset P_1$ – подобласть ЯП, в которой выполнены соотношения

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ в } P \quad (3.9)$$

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \text{ на } S - \text{ части } \partial P, \text{ не пересекающейся с } \Gamma_0 \quad (3.10)$$

$$\sigma_{ij}n_j \text{ периодичны по } y_1, y_2 \in P_1 \quad (3.11)$$

Определим

$$\sigma'_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{в } P \\ 0 & \text{в } P_1 \setminus P \end{cases}$$

Введенная функция $\sigma'_{ij} \in \Sigma'$. Действительно, для любой функции $v \in D^\infty(P_1)$ (множество бесконечно дифференцируемых финитных функций на P_1 [9]) в силу (3.9), (3.10) и формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_{P_1} \sigma'_{ij} \nu_{i,j} dy + \int_S \sigma_{ij} n_j \nu_i dy = 0 \quad (3.12)$$

где S – определенная в (3.10) часть границы P . Вторым интеграл в (3.12) равен нулю, в силу чего $\sigma'_{ij,j} = 0$ в P_1 . Остальные условия принадлежности к Σ' выполнены автоматически.

В качестве примера рассмотрим вафельную пластинку, имеющую две системы ребер, направленных вдоль осей Oy_1 и Oy_2 . Пластинка с любой из этих систем ребер помещается в исходной и является цилиндрической. Вследствие этого оценка (3.8) выполнена для жесткостей вафельной пластинки A_{1111}^2 и A_{2222}^2 .

3.6. Случайные структуры. В телах случайной структуры из введенных выше условий, накладываемых на допустимые перемещения и напряжения, не выполнено одно – условие периодичности. Рассмотрим типичный фрагмент случайной структуры как ЯП и повторим его периодически. Получим пластинку периодической структуры. С механической точки зрения можно ожидать тождественности исходной и полученной пластинок, если случайное распределение было пространственно однородным и выбранный фрагмент был достаточно большим в сравнении с неоднородностями ("представительный" фрагмент). Для периодической среды справедливы вариационные принципы. Хотелось бы отказаться от условия периодичности. На уровне механической обоснованности такой способ имеется. Из предыдущего следует, что должны быть периодичны локальные напряжения и они должны в среднем совпадать с глобальными. Но последние – периодичны (так как просто постоянны) на "представительном" фрагменте. Таким образом, с механической точки зрения условие периодичности можно заменить условием совпадения среднего значения локальных деформаций (или напряжений) с глобальными (с учетом их типа – глобальный изгиб). Приняв такую замену, приходим к обобщению вариационного принципа Немат-Насера-Гори [10] на пластинки.

4. Жесткости в плоскости пластинки. Выше был рассмотрен основной для пластинок случай – оценка изгибных жесткостей. Аналогичные оценки можно получить для жесткостей в плоскости пластинки $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^0$. Для этого в приведенных выше выкладках следует положить $v = \mu = 0$ в разд. 1, а в разд. 2 опустить множитель u_3 в соответствующих местах. Указанные действия приводят к вариационному принципу, имеющему вид (2.10), но при этом

$$J_u(\mathbf{u}) = \langle a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y}) u_{i,j} \rangle - \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{i,j} u_{k,l} \rangle \quad (4.1)$$

$$\Sigma = \{ \sigma_{ij} \in L(P_1) : (\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y}))_{,j} = 0 \text{ в } P_1,$$

$$(\sigma_{ij} - a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y})) n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1,$$

$$\sigma_{ij} n_j \text{ периодичны по } y_1, y_2 \in P_1 \}$$

Вариационный принцип (3.1) принимает для рассматриваемого случая вид

$$A_{\alpha\beta\alpha\beta}^0 = \max_{\sigma'_{ij} \in \Sigma'} \langle -a_{ijkl}^{-1}(\mathbf{y}) \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} + 2\sigma_{\alpha\beta} \rangle \quad (4.2)$$

При этом $J_\sigma(\sigma)$ и Σ' те же, что и ранее.

Аналогами оценок, полученных в разд. 3, являются следующие оценки для жесткостей в плоскости пластинки:

$$A_{\alpha\beta\alpha\beta}^0 \leq \langle a_{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{y}) \rangle \text{ для пластинок любого типа}$$

$$A_{1111}^0 \geq \left\langle \frac{E(\mathbf{y})}{1-\nu^2(\mathbf{y})} \right\rangle \text{ для пластинок с плоскими гранями}$$

$$A_{1111}^0 \geq \langle E(\mathbf{y}) \rangle \text{ для однонаправленных пластинок}$$

Для пластинок случайной структуры в этом случае также приходим к вариационному принципу типа Немат-Насера-Гори в отношении деформаций в плоскости пластинки.

5. Смешанные (несимметричные) жесткости. Жесткости $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^1$ являются "компенсаторами" жесткостей $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^{\nu+\mu}$ ($\nu + \mu = 0, 2$) при смене локальной системы координат в следующем смысле. Решение задачи теории пластинок не зависит от "привязки" локальной системы координат (именно – плоскости $y_3 = 0$) к ЯП P_1 , но $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^2$ зависят от нее, см. (1.2), (1.3). Эта зависимость компенсируется изменением $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^1$. Конкретный вид этой зависимости исследуется в другой работе авторов. Здесь же важно наводящее соображение о связанности $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^1$ с $A_{\alpha\beta\alpha\beta}^{\nu+\mu}$ ($\nu + \mu = 0, 2$) и отсчетной плоскостью $y_3 = h$.

Рассмотрим функционал

$$J_u^h(\mathbf{u}) = \langle a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y})(y_3 + h)u_{i,j} \rangle - \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{i,j}u_{k,l} \rangle \quad (5.1)$$

где h – произвольное не равное нулю число.

Решение задачи

$$J_u^h(\mathbf{u}) \rightarrow \max, \quad \mathbf{u} \in V \quad (5.2)$$

как нетрудно проверить, есть

$$N^{\gamma\delta} = -N^{\gamma\delta 1} + hN^{\gamma\delta 0} \quad (5.3)$$

где $N^{\gamma\delta\nu}$ ($\nu = 0, 1$) – решение ЯЗ (1.2).

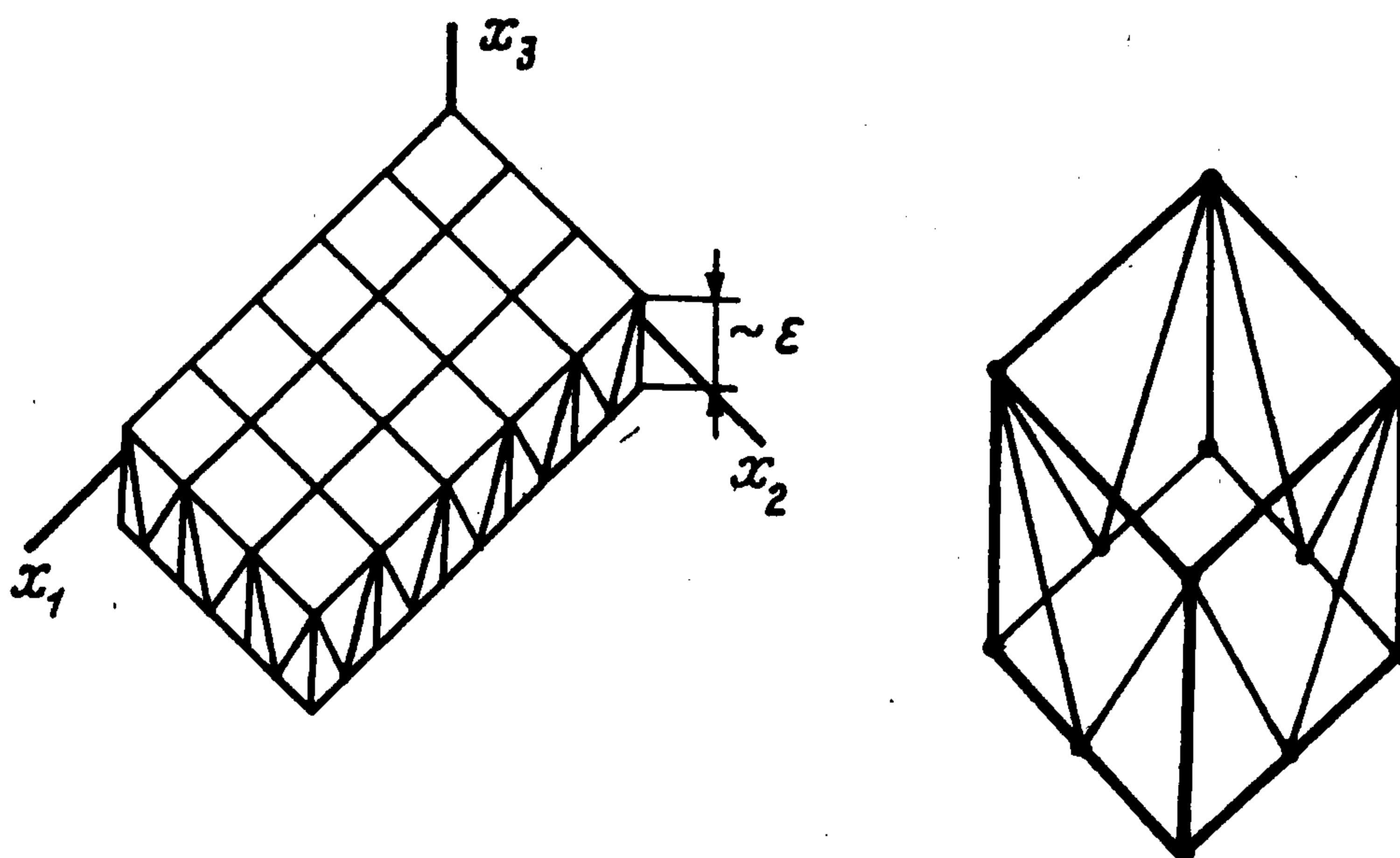
Подстановка (5.3) в (5.1) дает

$$\begin{aligned} J_u^h(\mathbf{u}) &= \langle a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y})(y_3 + h)(-N_{i,j}^{\gamma\delta 1} + hN_{i,j}^{\gamma\delta 0}) \rangle - \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})(-N_{i,j}^{\gamma\delta 1} + hN_{i,j}^{\gamma\delta 0})(-N_{k,l}^{\gamma\delta 1} + hN_{k,l}^{\gamma\delta 0}) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} A_{\gamma\delta\gamma\delta}^2 - \frac{h^2}{2} A_{\gamma\delta\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(\mathbf{y})y_3^2 \rangle + \frac{h^2}{2} \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(\mathbf{y}) \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle -2a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y})N_{i,j}^{\gamma\delta 1} + 2a_{ij\gamma\delta}(\mathbf{y})y_3N_{i,j}^{\gamma\delta 0} - a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{i,j}^{\gamma\delta 0}N_{k,l}^{\gamma\delta 1} + a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{i,j}^{\gamma\delta 1}N_{k,l}^{\gamma\delta 0} \rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь использованы равенства (см. разд. 2, 4)

$$J_u^h(N^{\gamma\delta 1}) = -\frac{1}{2} A_{\gamma\delta\gamma\delta}^2 + \frac{1}{2} \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(\mathbf{y})y_3^2 \rangle$$

$$J_u^h(N^{\gamma\delta 0}) = -\frac{1}{2} A_{\gamma\delta\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(\mathbf{y}) \rangle$$



Фиг. 5

Величина $J_u(N^{\gamma\delta\nu})(\nu = 0, 1)$ дается формулами (2.1) и (4.1), соответственно.

Из ЯЗ (1.2) можно вывести (аналогично выводу (1.5)) равенство

$$\langle a_{ijkl}(y)(N_{k,l}^{\gamma\delta\nu} + (-1)^\nu y_3^\nu \delta_{k\gamma} \delta_{l\delta}) N_{i,j}^{\alpha\beta\mu} \rangle = 0 \quad (5.5)$$

Пользуясь (5.5) и учитывая, что согласно определению (1.3)

$$A_{\gamma\delta\gamma\delta}^1 = \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) y_3 - a_{\gamma\delta kl}(y) N_{k,l}^{\gamma\delta 1} \rangle = \langle y_3 (a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) + a_{\gamma\delta kl}(y) N_{k,l}^{\gamma\delta 0}) \rangle$$

получим

$$J_u^h(N^{\gamma\delta}) = -\frac{1}{2} A_{\gamma\delta\gamma\delta}^2 - \frac{h^2}{2} A_{\gamma\delta\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) y_3^2 \rangle + \frac{h^2}{2} \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) \rangle - h A_{\gamma\delta\gamma\delta}^1 + h \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) y_3 \rangle \quad (5.6)$$

С учетом определения $N^{\gamma\delta}$ как решения задачи (5.2) получаем из (5.6) следующий вариационный принцип:

$$\langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) y_3^2 \rangle + 2h \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) y_3 \rangle + h^2 \langle a_{\gamma\delta\gamma\delta}(y) \rangle - (A_{\gamma\delta\gamma\delta}^2 + 2h A_{\gamma\delta\gamma\delta}^1 + h^2 A_{\gamma\delta\gamma\delta}^0) = \max_{u \in V} J_u^h(u) \quad (5.7)$$

Величина в правой части равенства (5.7) равна

$$\min_{\sigma_{ij} \in \Sigma_h} J_\sigma(\sigma) \quad (5.8)$$

где Σ_h получается заменой в (2.6) y_3 на $y_3 + h$. С учетом (5.8) получаем двойственный вариационный принцип (в напряжениях).

В этом разделе получены вариационные принципы для приведенной в левой части равенства (5.7) комбинации жесткостей $A_{\gamma\delta\gamma\delta}^{\nu+\mu}$ ($\nu, \mu = 0, 1$). Это соответствует сказанному в начале раздела. Поскольку жесткости пластины в плоскости и на изгиб $A_{\gamma\delta\gamma\delta}^{\nu+\mu}$ ($\nu + \mu = 0, 2$) вычисляются (оцениваются) независимо, то (5.7), (5.8) – вариационный принцип для смешанных (несимметричных) жесткостей.

6. Применение вариационных принципов к конечномерным конструкциям. Приведенные в разд. 3 примеры касались одного из типов пластин. Рассмотрим в данном разделе еще один вид пластин, для которых применение вариационных принципов представляется перспективным – пластины сложной структуры [11, 12], ЯП которых – конечномерная конструкция.

Рассмотрим в качестве примера вытянутую в плоскости Ox_1x_2 конструкцию, ЯП которой составлена из стержней (типа представленной на фиг. 5). К таким конструкциям относятся разного рода ажурные перекрытия (обобщая принятую терминологию [13], их можно характеризовать как "ажурные сетки").

Перемещения узлов ЯП U определяют энергию деформации стержней, в силу чего функционал $J_u(u)$ выражается через U

$$J_u(u) = J(U) \quad (6.1)$$

Если элементы ЯП являются балками (т.е. существенную роль играют их изгибы), то, вводя обобщенные перемещения V (включающие повороты узлов), также приходим к выражению вида (6.1).

Проводя минимизацию (6.1), получаем жесткости ажурной сетки.

Практические методы проведения конечномерной минимизации хорошо разработаны [14]. Преимуществом предложенного подхода является возможность избежать вывода уравнений равновесия, который нетривиален даже для однослойных сеток [11].

В общем случае, в частности для анизотропных пластин, эффективность предложенного метода аналогична эффективности традиционных вариационных методов [14]. Получение эффективных оценок зависит от удачного выбора допустимых полей перемещений или напряжений. В любом случае применим метод конечных элементов. Обсуждавшийся выше случай стержневых (балочных) конструкций является примером применения метода конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б.Д., Каламкаргов А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993. 256 с.
2. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in Appl. Sci. 1984. V. 6. № 2. P. 159–191.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
4. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
5. Kolpakov A.G. Variational principles for stiffnesses of a non-homogeneous beam // J. Mech. Phys. Solids. 1998. V. 46. № 6. P. 1039–1053.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Усреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
7. Колпаков А.Г. Расчет и проектирование слоистых пластинок // Журн. ПМТФ. 1989. № 4. С. 152–161.
8. Колпаков А.Г. Структурная чувствительность слоистых композитов // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 30–37.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 4. М.: Мир, 1971. 371 с.
10. Nemat-Nasser S., Hori M. Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials. Amsterdam: Elsevier, 1993. 687 p.
11. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. Analysis, design and optimization of composite structures. Chichester; New York: Wiley, 1997. 356 с.
12. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. On the analysis and design of fiber-reinforced composite shells // Trans of the ASME. J. Appl. Mech. 1996. V. 63. № 4. С. 939–945.
13. Пшеничников Г.И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
14. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.