УДК 539.3 : 534.1

© 1999 г. А.П. Чугайнова

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТОВ РИМАНА В ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Изучаются условия существования инвариантов Римана одномерной системы уравнений нелинейной теории упругости. При помощи критерия диагонализуемости Хаантьеса определяется вид упругого потенциала, для которого система уравнений имеет шесть инвариантов Римана или три инварианта Римана (для волн, распространяющихся в одну сторону). В частности, показано, что для упругого потенциала, использованного для описания слабонелинейных слабоанизотропных упругих сред [1–3], выполняется критерий Хаантьеса и существуют три инварианта Римана. Описана процедура вычисления инвариантов Римана. Для определенного вида упругого потенциала, для которого выполняется критерий Хаантьеса, приближенно вычислены инварианты Римана.

1. Для системы одномерных уравнений теории упругости

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial u^i},\quad \frac{\partial u^i}{\partial t}=\frac{\partial v^i}{\partial x}\quad \left(v^i=\frac{\partial^i w}{\partial t},\ u^i=\frac{\partial^i w}{\partial x}\right),\quad i=1,2,3 \tag{1.1}$$

где w^i – компоненты вектора перемещений, $\Phi=\Phi(u^1,u^2,u^3)$ – упругий потенциал, будем искать решения типа простой волны. Для простых волн компоненты u^i и v^i удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+C\frac{\partial u^i}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v^i}{\partial t}+C\frac{\partial v^i}{\partial x}=0 \tag{1.2}$$

$C=C(u^1,u^2,u^3)$ – характеристическая скорость. Из (1.1) и (1.2) следует

$$(C^2\delta_{ij}-f_{ij})\frac{\partial u^j}{\partial x}=0,\quad f_{ij}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^i\partial u^j} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) имеет нетривиальное решение, если $\|C^2\delta_{ij}-f_{ij}\|=0$. Следовательно, $\lambda=C^2$ – собственные значения матрицы $F=\|f_{ij}\|$; $\partial u^i/\partial x$ – компоненты собственных векторов этой матрицы.

2. Определим вид упругого потенциала $\Phi=\Phi(u^1,u^2,u^3)$, для которого система уравнений (1.1) имеет шесть инвариантов Римана. Это означает, что матрица $\|f^*_{ij}\|=\begin{Vmatrix} O & F\\ I & O\end{Vmatrix}$ (здесь O – нулевая, I – единичная (3×3)-матрицы) диагонализируема и все ее собственные значения вещественны.

Используем критерий диагонализуемости Хаантьеса [4, 5], в следующей формулировке [6]. Пусть $v_i^j(u)$ – компоненты тензора (1,1) на многообразии M с локальными координатами $(u^1,\ldots,u^n)$. Тензором Хаантьеса называется трехвалентный тензор с компонентами вида

$$H^i_{jk} = v^i_s v^s_r N^r_{jk} - v^i_s N^s_{rk} v^r_j - v^i_s N^s_{jr} v^r_k + N^i_{sr} v^s_j v^r_k$$

$$N^k_{ij} = v^s_i \frac{\partial v^k_j}{\partial u^s} - v^s_j \frac{\partial v^k_i}{\partial u^s} + v^k_s \frac{\partial v^s_i}{\partial u^j} - v^k_s \frac{\partial v^s_j}{\partial u^i}$$

где N^k_{ij} – компоненты тензора Нейенхейса. Тензор $v^j_i(u)$, все собственные значения которого вещественны и различны, диагонализируется в окрестности точки на многообразии тогда и только тогда, когда тензор Хаантьеса для него равен нулю.

Для системы уравнений (1.2) $v^j_i(u)$ – компоненты матрицы $\| f^*_{ij} \|$, многообразие M – область в пространстве с координатами u^i, $v^i (i = 1, 2, 3)$. Для произвольной функции $\Phi = \Phi(u^1, u^2, u^3)$ условия Хаантьеса $H^i_{jk} = 0$ при учете того, что тензор Нейенхейса – антисимметричный, представляют собой 90 уравнений третьего порядка и имеют сложный вид. Эти уравнения могут решаться при помощи программ символьных вычислений. Поскольку не удается найти решение в общем виде, ограничимся рассмотрением более узкого класса функций Φ.

Для удобства записи последующих формул индексы у величин u^i, v^i ($i = 1, 2, 3$) будем писать внизу, поскольку никаких тензорных преобразований дальше проводиться не будет.

Пусть функция Φ имеет осесимметричный вид $\Phi = G(u_1, u_2^2 + u_3^2)$. Рассмотрим компоненту H^6_{22} тензора Хаантьеса для матрицы $\| f^*_{ij} \|$

$$H^6_{22} = 16u_3 \left((u_2^2 + u_3^2) \left(\frac{\partial^2 G}{\partial^2 (u_2^2 + u_3^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial (u_2^2 + u_3^2)} \right)^2 \right)$$

Из условия $H^6_{22} = 0$ следует, что

$$\Phi = G(u_1, u_2^2 + u_3^2) = P(u_1) + b_0 (u_2^2 + u_3^2), \quad b_0 = \mathrm{const} \qquad (2.1)$$

где $P(u_1)$ – произвольная функция. Если функция Φ имеет вид (2.1), то все уравнения $H^k_{ij} = 0$ выполняются. Очевидно, что собственные значения матрицы $\| f^*_{ij} \|$ вещественны. Следовательно, если функция Φ имеет вид (2.1), то система уравнений (1.1) имеет шесть инвариантов Римана.

Рассмотрим другой случай, когда функция Φ – сумма произвольных функций $P(u_1)$ и $f(u_2, u_3)$. В этом случае уравнения $H^k_{ij} = 0$ $(i, j, k = 1 - 6)$ сводятся к системе двух независимых уравнений для функции f

$$H^6_{22} = f_{,33} f_{,223} - f_{,23} f_{,233} - f_{,22} f_{,223} + f_{,222} f_{,23} = 0 \qquad (2.2)$$

$$H^6_{23} = f_{,22} f_{,233} - f_{,23} f_{,223} - f_{,33} f_{,233} + f_{,333} f_{,23} = 0 \qquad (2.3)$$

$$(f_{,ij} = \partial^2 f / \partial u_i \partial u_j, \quad f_{,ijk} = \partial^3 f / \partial u_i \partial u_j \partial u_k)$$

Если $f_{,23} = 0$, то все уравнения $H^k_{ij} = 0$ выполняются и собственные значения матрицы $\| f^*_{ij} \|$ вещественны и различны. Рассмотрим случай $f_{,23} \neq 0$. В этом случае, сложив уравнения (2.2) и (2.3), получим уравнение в частных производных для функции f

$$(h_1(u_3) + h_2(u_2)) f_{,23} = 0$$

где h_1 и h_2 – произвольные функции. Следовательно, $h_1(u_3) = -h_2(u_2) = C_0 = \mathrm{const}$. Решение системы уравнений (2.2) и (2.3) есть сумма произвольных функций f_1 и f_2:

$$f(u_2, u_3) = f_1(u_3 - au_2) + f_2(u_2 + au_3), \quad a - 1/a = -C_0$$

Таким образом, для того чтобы система уравнений (1.1) имела шесть инвариантов Римана, необходимо, чтобы функция Ф имела вид

$$\Phi = P(u_1) + f_1(u_3 - au_2) + f_2(u_2 + au_3)$$

Если сделать линейное преобразование переменных u_2 и u_3, то в новых переменных функция Ф представляет собой сумму трех произвольных функций

$$\Phi = P(u_1) + f_1(u_2) + f_2(u_3) \tag{2.4}$$

Следовательно, если предположить, что в Ф отделяется функция одной переменной, то из уравнений $H_{ij}^k = 0$ следует, что система уравнений (1.1) имеет шесть инвариантов Римана в том случае, когда две другие переменные в Ф тоже разделяются (возможно после линейного преобразования переменных), т.е. Ф имеет вид (2.4). Можно показать, что в этом случае все собственные значения матрицы $\| f_{ij}^* \|$ вещественны и различны.

3. Определим вид другого потенциала Ф, для которого система уравнений (1.1) для простых волн имеет три инварианта Римана. В этом случае матрица этой системы F (см. (1.3)) симметрична и, следовательно, имеет три вещественных собственных значения $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$. Предполагая, что они различны, применим критерий Хаантьеса. Среди компонент H_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2, 3)$ тензора Хаантьеса отличны от нуля только компоненты $H_{12}^3, H_{13}^2, H_{21}^3, H_{23}^1, H_{31}^2, H_{32}^1$. Условие равенства нулю переменных компонент сводится к одному уравнению для функции Ф. Если Ф имеет осесимметричный вид: $\Phi = G(u_1, u_2^2 + u_3^2)$, это условие выполняется всегда и система уравнений (1.3) имеет три инварианта Римана.

Рассмотрим случай, когда в плоскости u_2, u_3 есть слабая анизотропия, т.е. функция Ф имеет вид

$$\Phi = G(u_1, u_2^2 + u_3^2) + g_0(u_2^2 - u_3^2), \quad g_0 = \text{const}$$

где g_0 – параметр анизотропии. Запишем уравнение $H_{12}^3 = 0$ (равенство нулю остальных ненулевых компонент тензора Хаантьеса сводится к этому же уравнению)

$$H_{12}^3 = A(u_1, u_2, u_3)g_0 + B(u_1, u_2, u_3)g_0^2 + C(u_1, u_2, u_3)g_0^3 = 0$$

Функции A, B, C не зависят от g_0, из последнего уравнения следует, что если

$$A(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad B(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad C(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{3.1}$$

то критерий Хаантьеса выполняется. Выражения для функций A, B, C имеют вид

$$\begin{aligned} &A(u_1, u_2, u_3) = \xi_1 \varphi(u_1, u_2, u_3) \\ &B(u_1, u_2, u_3) = -\xi_1 \eta \\ &C(u_1, u_2, u_3) = -64 u_2 u_3 \xi_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\xi_1 = \frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial (u_2^2 + u_3^2)}, \quad \eta = \frac{\partial^3 G}{\partial^3 (u_2^2 + u_3^2)}, \quad \xi_2 = \frac{\partial^3 G}{\partial u_1 \partial^2 (u_2^2 + u_3^2)}$$

Функция $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ имеет сложный вид и поэтому здесь не приведена.

Из выражений (3.2) следует, что если $\xi_1 = 0$, то справедливы равенства (3.1), и условие диагонализуемости Хаантьеса выполняется. Следовательно, функция Ф, описывающая упругий потенциал, имеет вид

$$\Phi = P(u_1) + Q(u_2^2 + u_3^2) + g_0(u_2^2 - u_3^2)$$

где P и Q – произвольные функции.

В случае, если $\xi_2 = 0$, $\eta = 0$, имеем

$$A(u_1, u_2, u_3) \neq 0, \quad B(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad C(u_1, u_2, u_3) = 0$$

и функцию упругого потенциала можно записать в виде

$$\Phi = A_0(u_2^2 + u_3^2)^2 + N(u_1)(u_2^2 + u_3^2) + M(u_1) + g_0(u_2^2 - u_3^2) \tag{3.3}$$

где A_0 – произвольная постоянная, $M(u_1)$, $N(u_1)$ – функции, которые можно определить, подставив вторые производные функции $\Phi = \Phi(u^1, u^2, u^3)$, имеющей вид (3.3), в уравнение $H_{12}^3 = 0$. В результате получим полином по переменным u_2 и u_3. Из равенства нулю коэффициентов при степенях переменных u_2 и u_3 следуют два дифференциальных уравнения для функций $N(u_1)$, $M(u_1)$

$$N' g_0(-64A_0^2 + 24A_0 N'' - 2(N'')^2 + N'N''') = 0 \tag{3.4}$$

$$N' g_0(-16A_0 N - 6(N')^2 + 4NN'' + 8A_0 M'' - 2N''M'' + N'M''') = 0 \tag{3.5}$$

Эти уравнения имеют два очевидных решения: $g_0 = 0$, т.е. $\Phi = G(u_1, u_2^2 + u_3^2)$, и $N(u_1) = N_1 = \text{const}$ – такой вид функции упругого потенциала приведен в работах [1–3].

В случае $N(u_1) \neq \text{const}$ решим уравнение, соответствующее обращению в нуль выражения в скобках в уравнении (3.4). Используя замену переменных $N'' = f(N')$, $N' = x \neq \text{const}$ (если $N' = \text{const}$, то $A_0 = 0$) и вводя переменную $\tau = \ln x$, запишем это уравнение в виде

$$df/d\tau = \chi(f)/f, \quad \chi(f) = 2f^2 - 24A_0 f + 64A_0^2 \tag{3.6}$$

Решения уравнения (3.6) имеют вид

$$f_1 = 8A_0, \ f_2 = 4A_0 \quad (\chi(f) = 0)$$

$$f_{3,4} = 8A_0 + \frac{x^2}{2k_0^2} \pm 2\frac{x}{k_0}\sqrt{A_0 + \frac{x^2}{16k_0^2}} \quad (\chi(f) \neq 0)$$

$k_0 = \text{const}$

Корни $f_1, f_2, f_{3,4}$ соответствуют трем сериям решений уравнения (3.4)

$$N(u_1) = 4A_0 u_1^2 + b_1 u_1 + b_0 \tag{3.7}$$

$$N(u_1) = 2A_0 u_1^2 + b_1 u_1 + b_0 \tag{3.8}$$

$b_1 = \text{const}, \quad b_0 = \text{const}$

$$N(u_1) = 2A_0(u_1 - k_2)^2 - k_0^2 \ln(u_1 - k_2) + k_3, \quad k_3 = \text{const} \tag{3.9}$$

Постоянная k_2 связана только со сдвигом по u_1, поэтому далее полагаем $k_2 = 0$.

Подставив выражения (3.7), (3.8) и (3.9) для функции $N(u_1)$ в уравнение (3.5), получим три дифференциальных уравнения для функции $M(u_1)$, решениями которых являются три соответствующие серии выражений для функции $M(u_1)$

$$M(u_1) = -\frac{10}{3}A_0 u_1^4 + c_3 u_1^3 + c_2 u_1^2 + c_1 u_1 + c_0 \tag{3.10}$$

$$c_2 = \frac{1}{8A_0}(-8A_0b_0 + 3b_1c_3 + 3b_1^2)$$

$$c_3 = \text{const}, \quad c_1 = \text{const}, \quad c_0 = \text{const}$$

$$M(u_1) = A_0u_1^4 + \frac{b_1}{6}u_1^3 + c_2u_1^2 + c_1u_1 + c_0 \tag{3.11}$$

$$c_2 = \text{const}, \; c_1 = \text{const}, \; c_0 = \text{const}$$

$$M(u_1) = A_0u_1^4 - 2A_0u_1^2c_1 + u_1c_2 - k_0^2u_1^2 \ln u_1 - \frac{1}{4A_0}(-k_0^4 - 4A_0k_0^2c_1)\ln u_1 + c_3 \tag{3.12}$$

$$c_1 = \text{const}, \; c_2 = \text{const}, \; c_3 = \text{const}, \; k_0 = \text{const}$$

Функции $N(u_1)$ (3.7), (3.8), (3.9) и $M(u_1)$ (3.10), (3.11), (3.12) и выражение (3.3) определяют конкретный вид упругого потенциала Φ, для которого система уравнений (1.3) имеет три инварианта Римана.

4. Рассмотрим частный случай, когда функция упругого потенциала Φ имеет вид

$$\Phi = R^4 + g_0(u_2^2 - u_3^2), \quad R^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{4.1}$$

(в (3.3) положено $A_0 = 1$; в (3.8) $b_0 = 0$, $b_1 = 0$; в (3.11) $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$).

В этом случае, если $g_0 = 0$ ($\Phi = R^4$), собственные значения матрицы F определяются следующим образом: $\lambda_{(1)} = 12R^2$, $\lambda_{(2,3)} = 4R^2$. Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, \mathbf{a}_{(3)}$ с компонентами

$$\mathbf{a}_{(1)} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{a}_{(2)} = (-u_3, 0, u_1), \quad \mathbf{a}_{(3)} = (-u_2, u_1, 0)$$

и инварианты Римана системы уравнений (1.1) имеют вид $I_{(1)} = H_1(R^2)$, $I_{(2)} = H_2(u_1/u_3)$, $I_{(3)} = H_3(u_1/u_2)$, где H_1, H_2, H_3 – произвольные функции.

Если $g_0 \neq 0$, собственные значения $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ матрицы F определяются из уравнения

$$-\sigma^3 + 8\sigma^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 32u_1^2g_0^2 + 4\sigma g_0(4u_2^2 - 4u_3^2 + g_0) = 0$$

$$\lambda = \sigma + 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

Каждому собственному значению $\lambda_{(i)}$ соответствует собственный вектор, компоненты которого x_1, x_2, x_3 определяются формулами

$$x_1 = u_1/u_2 - 2u_1g_0/(\sigma u_2), \quad x_2 = 1$$

$$x_3 = \sigma/(8u_2u_3) - u_1^2/(u_2u_3) - u_2/u_3 - g_0/(4u_2u_3) + 2u_1^2g_0/(\sigma u_2u_3) \tag{4.2}$$

Если величина g_0 мала, но отлична от нуля, собственные значения имеют вид

$$\lambda_{(1)} = 12R^2 + 2(u_2^2 - u_3^2)g_0/R^2$$

$$\lambda_{(2,3)} = 4R^2 + Dg_0 \tag{4.3}$$

$$D = \left[(u_3^2 - u_2^2) \pm \sqrt{(u_3^2 - u_2^2)^2 + 4u_1^2R^2}\right]/R^2$$

Найдем инварианты Римана системы уравнений (1.1) в случае, когда Φ имеет вид (4.3) и величина g_0 мала. Гиперболическую систему уравнений (1.1) при учете равенств (1.2) можно записать в виде

$$C_{(k)}\frac{\partial u_i}{\partial t} + f_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad f_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i \partial u_j}, \quad k = 1,2,3 \tag{4.4}$$

где $C_{(k)} = C_{(k)}(u_1, u_2, u_3)$ – характеристическая скорость, индекс в скобках означает характеристическую скорость, соответствующую собственному значению с таким же индексом. В дальнейшем изложении величина, отмеченная индексом в скобках, соответствует собственному значению с таким же индексом.

Уравнения системы (4.4) умножим слева на собственный вектор $\mathbf{a}_{(k)} = (a_{1(k)}, a_{2(k)}, a_{3(k)})$ матрицы F (нижний индекс без скобок – номер компоненты собственного вектора). Получим

$$a_{i(k)} C_{(k)} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_{(k)} a_{j(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0$$

где по повторяющимся индексам без скобок производится суммирование, $\lambda_{(k)} = (C_{(k)})^2$ – собственное значение матрицы F. Если для каждого собственного значения найти интегрирующий множитель $\mu_{(k)}$, такой, что

$$\mu_{(k)} a_{i(k)} = \frac{\partial I_{(k)}}{\partial u_i} \tag{4.5}$$

то систему (4.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial I_{(k)}}{\partial t} + C_{(k)} \frac{\partial I_{(k)}}{\partial x} = 0$$

Из уравнений (4.5) исключим $\mu_{(k)}$ и получим систему двух уравнений в частных производных для определения инвариантов Римана $I_{(k)}$

$$\frac{\partial I_{(k)}}{\partial u_1} = \frac{a_{1(k)}}{a_{2(k)}} \frac{\partial I_{(k)}}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial I_{(k)}}{\partial u_3} = \frac{a_{3(k)}}{a_{2(k)}} \frac{\partial I_{(k)}}{\partial u_2}, \quad k = 1,2,3 \tag{4.6}$$

Систему уравнений (4.6) для первого инварианта Римана $I_{(1)}$ при учете выражений для компонент собственного вектора $\mathbf{a}_{(1)} = (a_{1(1)}, a_{2(1)}, a_{3(1)})$ (4.2), (4.3) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial I_{(1)}}{\partial u_1^2} + \left(\frac{1}{4R^2} g_0 - 1 \right) \frac{\partial I_{(1)}}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial I_{(1)}}{\partial u_3^2} + \left(\frac{1}{2R^2} g_0 - 1 \right) \frac{\partial I_{(1)}}{\partial u_2} = 0 \tag{4.7}$$

Будем искать решение системы (4.7) в приближенном виде

$$I_{(1)} = H_1(R) + g_0 T_{(1)} + O(g_0^2) \tag{4.8}$$

где $H_1(R)$ – первый инвариант Римана в случае $g_0 = 0$. Тогда из (4.7) следует система уравнений для $T_{(1)}$, решив которую, получим

$$T_{(1)} = \Phi_1(R) + (u_2^2 - u_3^2) \frac{1}{8R^3} \frac{\partial H_1(R)}{\partial R} \tag{4.9}$$

где Φ_1 – произвольная функция.

Таким образом, найден первый инвариант Римана (выражения (4.8) и (4.9)) системы уравнений (1.1) в случае, когда Φ имеет вид (4.1) и величина g_0 мала, но отлична от нуля.

Выражения для компонент собственных векторов $\mathbf{a}_{(2)}$ и $\mathbf{a}_{(3)}$ (4.2) сложные, поэтому для определения $I_{(2)}$ и $I_{(3)}$ компоненты векторов $\mathbf{a}_{(2)}$ и $\mathbf{a}_{(3)}$ были представлены в виде рядов по u_1. Тогда система (4.6) для $I_{(2)}$ имеет вид

$$\frac{\partial I_{(2)}}{\partial u_1} = -\frac{2u_1 u_2}{u_3^2 - u_2^2} \frac{\partial I_{(2)}}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial I_{(2)}}{\partial u_3} = \left(-\frac{u_2}{u_3} + \frac{2u_2 u_1^2}{u_3(u_3^2 - u_2^2)} \right) \frac{\partial I_{(2)}}{\partial u_2} \tag{4.10}$$

Решение системы (4.10) будем искать в виде

$$I_{(2)} = T_{(2)} + u_1^2 S_{(2)}, \quad T_{(2)} = T_{(2)}(u_2, u_3), \quad S_{(2)} = S_{(2)}(u_2, u_3) \tag{4.11}$$

Тогда из второго уравнения системы (4.10) получим

$$T_{(2)} = \Phi_2(u_2/u_3) \tag{4.12}$$

где Φ_2 – произвольная функция.

Из первого уравнения системы (4.10) найдем

$$S_{(2)} = -u_2\Phi_2'(u_2/u_3)/[u_3(u_3^2-u_2^2)] \tag{4.13}$$

Таким образом, выражения (4.1)–(4.13) определяют значение второго инварианта Римана с точностью до линейных по g_0 и квадратичных по u_1 членов.

Систему (4.6) для третьего инварианта Римана при учете выражений для компонент собственного вектора $\mathbf{a}_{(3)}$ (4.2) при малых u_1 запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{(3)}}{\partial u_1} &= \left(\frac{u_3^2-u_2^2}{u_1u_2} + \frac{2u_3^2u_1}{u_2(u_3^2-u_2^2)}\right)\frac{\partial I_{(3)}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial I_{(3)}}{\partial u_3} &= \left(-\frac{u_2}{u_3} - \frac{2u_3u_1^2}{u_2(u_3^2-u_2^2)}\right)\frac{\partial I_{(3)}}{\partial u_2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Решение системы (4.14) будем искать в виде

$$I_{(3)} = T_{(3)}(1 + u_1^2S_{(3)} + \ldots),\quad T_{(3)} = T_{(3)}(u_1, u_2, u_3),\quad S_{(3)} = S_{(3)}(u_2, u_3) \tag{4.15}$$

Тогда из (4.14) в старшем приближении получим систему уравнений для $T_{(3)}$, решив которую, получим

$$T_{(3)} = u_1^{2m}(u_3^2-u_2^2)^{-m},\quad m - \text{целое число} \tag{4.16}$$

Подставив выражения (4.15) и (4.16) в первое уравнение системы (4.14), найдем поправку $S_{(3)}$:

$$S_{(3)} = -2mu_3^2(u_3^2-u_2^2)^{-2} + C_1(u_3^2-u_2^2)^{-1} \tag{4.17}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Выражения (4.15)–(4.17) определяют приближенное значение третьего инварианта Римана $I_{(3)}$.

Автор благодарит А.Г. Куликовского и Г.А. Алексеева за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00991).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
2. *Куликовский А.Г.* Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.
3. *Чугайнова А.П.* О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.
4. *Haantjes J.* On X_m – forming sets of eigenvectors // Indagationes Math. 1955. V. 17. No. 2. P. 158–162.
5. *Hijenhuis A.* X_m – forming sets of eigenvectors // Indagationes Math. 1951. V. 13. No. 2. P. 200–212.
6. *Мохов О.И.* Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы. Дисс. на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук. М., 1996. 243 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.III.1998