

УДК 539.3:534.1

© 1999 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ

Исследуется задача конструктивного определения собственных частот и форм колебаний распределенных систем с существенно изменяющимися параметрами. В отличие от классического случая самосопряженной краевой задачи допускается произвольная нелинейная зависимость коэффициентов уравнения от числового параметра, собственные значения которого требуется найти. Разработан оригинальный численно-аналитический метод для высокоточного построения искомого решения. Вычислительная эффективность алгоритма, обладающего свойством ускоренной (квадратичной) сходимости, проиллюстрирована расчетом модельных примеров. Подход распространен на другие классы обобщенных задач определения критических значений параметров и соответствующих им форм, в частности, на задачи потери устойчивости упругих систем с переменными жесткостными, инерционными и силовыми характеристиками. Построено высокоточное решение классической задачи Прандтля об определении критической силы, приводящей к боковому выпучиванию однородной консольной балки большой протяженности с учетом ее веса.

1. Постановка задачи. Многие проблемы механики, теории колебаний и устойчивости, теории управления, математической и теоретической физики, гидродинамики, акустики, динамики океана и атмосферы, теории упругости и др. приводят к обобщенным краевым задачам для определения собственных частот и форм колебаний, см. например [1–8]. Требуется построить решение обобщенной задачи Штурма – Лиувилля, в которой коэффициенты уравнения – произвольные нелинейные функции искомого параметра. Рассмотрим для определенности следующую постановку задачи на собственные значения и функции:

$$(p(x, \lambda)u')' + r(x, \lambda)u = 0, \quad 0 \leq x \leq l < \infty, \quad u(0) = u(l) = 0 \quad (1.1)$$

$$0 < p_1 \leq p \leq p_2 < \infty, \quad 0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \infty, \quad \lambda \in \Lambda$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по аргументу x . Функции p, r в (1.1) считаются достаточно гладкими и отделенными от нуля; они имеют определенный физический смысл. Длина интервала l задается, как правило, априори исходя из постановки задачи. Множество Λ допустимых значений λ определяется с учетом условий (1.1). Отметим, что условие положительности r может нарушаться на относительно малом множестве значений x, λ , см. далее.

Ставится задача найти такие вещественные значения λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения с краевыми условиями (1.1). Отметим, что в общем случае значения λ считаются комплексными [9–11]. Однако часто из физических соображений прикладной интерес представляют вещественные значения λ , в частности, положительные (квадрат частоты, критическая сила, параметр системы и

т.п.) и соответствующие функции $u(x, \lambda)$ [1–10]. Далее рассматриваются вещественные решения задачи (1.1).

В классической постановке, когда имеют место выражения $p \equiv p(x)$, $r \equiv \lambda p(x) - q(x)$ (обычно $p = \rho \equiv 1$), свойства решения соответствующей самосопряженной задачи исследованы достаточно подробно. Эти многочисленные результаты составляют основу теории линейных самосопряженных операторов и функционального анализа. По сравнению с классической ситуацией поведение собственных значений λ_n и функций $u_n(x) = u(x, \lambda_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) – решения обобщенной задачи (1.1) – как правило, оказывается весьма необычным и затруднительным для детального изучения. Свойства "спектра" $\{\lambda_n\}$ (и "базиса" $\{u_n(x)\}$) как функций порядкового номера n (и x) могут кардинальным образом отличаться от общеизвестных, полученных для классической задачи.

Приведем некоторые простые примеры для уравнений с переменными коэффициентами типа Эйлера, допускающих полное аналитическое решение.

Пусть $l = 1$, $p \equiv 1$, $r = (\lambda + x)^{-2}$; тогда в допустимой области $\Lambda = \{\lambda: \lambda < -1, \lambda > 0\}$ стандартными вычислениями находим

$$\lambda_n = (\exp \gamma n - 1)^{-1}, \quad \gamma = (2/\sqrt{3})\pi, \quad \lambda_n + \lambda_{-n} = -1, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

$$u_n(x) = c_n (1 + x/\lambda_n)^{1/2} \sin[(\pi/\gamma) \ln(1 + x/\lambda_n)], \quad c_n = \text{const}$$

Собственные значения λ_n (1.2) сосредоточены в весьма узких пределах вблизи $\lambda = +0$ и $\lambda = -1-0$, причем имеют место оценки

$$0 < \lambda_n \leq c \exp(-\gamma n), \quad n \geq 1, \quad c \sim 1 \quad (1.3)$$

$$0 < -(1 + \lambda_n) \leq c \exp(\gamma n), \quad n \leq -1$$

Из (1.3) следует, что величины λ_n (1.2) весьма быстро (экспоненциально) сближаются при $|n| \rightarrow \infty$. Функции $u_n(x)$ (1.2) при достаточно большом $|n|$ сколь угодно быстро осциллируют экзотическим образом.

Для функции $r = \lambda^2(1 + \lambda x)^{-2}$, получающейся из приведенной выше введением λ^{-1} и переобозначением $\lambda^{-1} \rightarrow \lambda$, в допустимой области $\Lambda = \{\lambda: -1 < \lambda < \infty\}$ получим искомое решение

$$\lambda_n = \exp \gamma n - 1, \quad (\lambda_n + 1)(\lambda_{-n} + 1) = 1, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

$$u_n(x) = c_n (1 + \lambda_n x)^{1/2} \sin[(\pi/\gamma) \ln(1 + \lambda_n x)], \quad c_n = \text{const}$$

Числа λ_n (1.4) при $n \rightarrow +\infty$ экспоненциально растут и таким же образом расходятся, а функции $u_n(x)$ с коль угодно быстро осциллируют по x ; при $n \rightarrow -\infty$ величины $\lambda_n \downarrow -1$ и экспоненциально сближаются, а функции $u_n(x)$ быстро осциллируют вблизи значения $x = 1$.

Могут быть приведены другие элементарные примеры, иллюстрирующие разнообразные необычные свойства решений обобщенной задачи (1.1). Следует отметить, что спектр может быть дискретно-континуальным, конечным или пустым. Своеобразие свойств собственных функций $u_n(x)$ проявляется в условии ортогональности, имеющем вид

$$\int_0^l \{-[p(x, \lambda_n) - p(x, \lambda_m)]u_n'(x)u_m'(x) + [r(x, \lambda_n) - r(x, \lambda_m)]u_n(x)u_m(x)\} dx = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \quad (1.5)$$

Соотношения (1.5) в классическом случае совпадают с общеизвестными. Предельным переходом в (1.5) получается аналог "обобщенной нормы" собственной функции $\|u_n(x)\|$:

$$\|u_n\|^2 = \left| \int_0^l \left[-\frac{\partial p}{\partial \lambda}(x, \lambda_n) u_n'^2(x) + \frac{\partial r}{\partial \lambda}(x, \lambda_n) u_n^2(x) \right] dx \right|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

При условии соответствующей знакоопределенности функций $\partial p/\partial \lambda$, $\partial r/\partial \lambda$ выражение (1.6) обладает обычными свойствами среднеквадратичной нормы Соболева $W_2^{(1)}$. Проблемы полноты счетной системы собственных функций $\{u_n(x)\}$ и разложимости функций $f(x) \in W_2^{(1)}$ на промежутке $0 \leq x \leq l$ по указанному "базису" остаются нерешенными.

Основные результаты, относящиеся к обобщенным задачам типа (1.1), а также к более общим, рассматриваемым в комплексной области, и ссылки на фундаментальные работы содержатся в [9–11]. Согласно имеющейся терминологии [10], задача (1.1) относится к классу несамосопряженных дифференциальных операторов. Общие свойства этих операторов исследованы в основополагающих трудах М.В. Келдыша, В.А. Стеклова, Я.Д. Тамаркина и др. В частности, установлены условия, при которых существует вещественный дискретный спектр [9]. Однако вычисления с требуемой точностью собственных значений и функций представляют принципиальные трудности; эффективных алгоритмов не существует. Высокоэффективный численно-аналитический метод решения задачи (1.1), обладающий свойством ускоренной сходимости, излагается ниже. В его основе лежит установленная авторами дифференциальная связь между собственным значением λ_n и длиной интервала l (см. ниже, соотношение (4.4)).

2. Вариационная трактовка задачи и построение оценок. Обратимся к проблеме высокоточного численного решения обобщенной задачи (1.1). Считаются выполненными определенные требования гладкости к функциям $p(x, \lambda)$, $r(x, \lambda)$ в области $0 \leq x \leq l$, $\lambda \in \Lambda$, которые следуют из дальнейших построений. С целью определения некоторого собственного значения и соответствующей функции рассмотрим семейство изопериметрических вариационных задач с параметром семейства λ на классе непрерывно дифференцируемых функций $U(x, \lambda)$:

$$J_\lambda[U] = \int_0^l p(x, \lambda) U'^2 dx \rightarrow \min_U, \quad U(0) = U(l) = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi_\lambda[U] = \|U\|_r^2 = \int_0^l r(x, \lambda) U^2 dx = 1, \quad \lambda \in \Lambda$$

Для каждого фиксированного значения $\lambda \in \Lambda$ задача (2.1) является классической. А именно, существует нормированная непрерывно дифференцируемая функция $U_1(x, \lambda)$, доставляющая абсолютный минимум функционалу J_λ : $J_\lambda[U_1] = \mu_1(\lambda) > 0$. Значение $\mu_1(\lambda)$ – минимальное собственное число, а $U_1(x, \lambda) = U(x, \mu_1(\lambda), \lambda)$ – соответствующая ему функция классической задачи Штурма – Лиувилля с параметром μ

$$(p(x, \lambda)U')' + \mu r(x, \lambda)U = 0, \quad U(0) = U(l) = 0, \quad \lambda \in \Lambda \quad (2.2)$$

Задача (2.2) имеет бесконечный набор дискретных собственных значений μ_m , таких, что $\mu_{m+1} > \mu_m > 0$ ($m = 1, 2, \dots$), причем $c(\lambda) \leq \mu_m(\lambda) / m^2 \leq C(\lambda)$ (функции $c(\lambda)$, $C(\lambda)$ положительны и не зависят от m), и собственных функций $U_m(x, \lambda) = U(x, \mu_m(\lambda), \lambda)$, обладающих свойством базиса [5, 10, 12].

Отметим, что вариационная задача (2.1) для определения последующих значений μ_m и функций U_m , $m \geq 2$, дополняется условиями ортогональности с весом $r(x, \lambda)$ функций U_m к предыдущим U_1, \dots, U_{m-1} , т.е.

$$\Phi_{\lambda_j}[U] = (U_j(x, \lambda), U)_r = \int_0^l r(x, \lambda) U_j(x, \lambda) U dx = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (2.3)$$

Предположим пока, что известны решения задачи (2.2) или вариационных изопериметрических задач (2.1), (2.3) для каждого допустимого значения $\lambda \in \Lambda$. Тогда можно определить искомое решение исходной задачи (1.1) следующим образом. Возьмем некоторое произвольное значение индекса m и рассмотрим соотношение

$$\mu_m(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \Lambda, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

где $\mu_m(\lambda)$ – гладкая функция λ , как уравнение относительно неизвестной λ . Совокупность вещественных корней $\{\lambda_n\}$, $n = n(m)$, уравнений (2.4) для всех $m \geq 1$ определяет искомый спектр задачи (1.1). На простых примерах можно убедиться, что это множество может быть пустым, конечным, счетным или (и) непрерывным, т.е. дискретно-континуальным. Поведение спектра как функции индекса и других параметров системы удается исследовать с требуемой полнотой в весьма редких случаях, когда известна аналитическая зависимость $\mu_m(\lambda)$ (см. примеры (1.2) – (1.4)) или когда задача близка к классической [9].

Посредством стандартных операций найдем выражение для производной $\mu_m(\lambda)$ по λ :

$$\mu'_m(\lambda) = \int_0^l \left[\frac{\partial p}{\partial \lambda}(x, \lambda) U_m'^2(x, \lambda) - \mu_m(\lambda) \frac{\partial r}{\partial \lambda}(x, \lambda) U_m^2(x, \lambda) \right] dx \quad (2.5)$$

При приближенных или численных расчетах естественно предположить, что $\mu'_m(\lambda) \neq 0$ в окрестности искомого значения λ . Производная $\mu'_m(\lambda)$ (2.5) существует и непрерывна по λ , если функции p, r непрерывно дифференцируемы по $\lambda \in \Lambda$. Знак μ'_m может быть установлен априори при соответствующей знакоопределенности производных $\partial p / \partial \lambda, \partial r / \partial \lambda$.

Для приложений основной интерес представляет эффективное построение двусторонних оценок, а также высокоточное вычисление собственных значений λ_n в предположении их существования [5, 13]. Условия существования вещественных собственных значений задачи (1.1) можно в ряде случаев установить посредством грубых оценок по $x, 0 \leq x \leq l$ функций $p(x, \lambda), r(x, \lambda)$. Исследование предлагается проводить на основе вариационной трактовки задачи (2.1), (2.3) с помощью метода Релея – Ритца, в частности, принципа Релея [5, 6, 12, 13]. Для простоты и определенности построим оценку сверху множества значений $\mu_1(\lambda), \lambda \in \Lambda$ (индекс $m = 1$ опускается ради краткости)

$$0 < \mu(\lambda) \leq \mu^*(\lambda) = J_\lambda[\psi] / \Phi_\lambda[\psi], \quad \psi(0, \lambda) = \psi(l, \lambda) \equiv 0 \quad (2.6)$$

В выражении (2.6) ψ – непрерывно дифференцируемая функция x , зависящая также от $\lambda, \lambda \in \Lambda$ и выбираемая из общих физических представлений о первой собственной функции (отсутствие промежуточных нулей, выпуклость, симметричность и т.п.). Пусть такая оценка $\mu^*(\lambda), \lambda \in \Lambda$, построена; тогда некоторую оценку λ^0 можно определить аналогично (2.6) посредством уравнения (2.4)

$$\lambda^0 = \text{Arg}_\lambda [\mu^*(\lambda) - 1], \quad \lambda, \lambda^0 \in \Lambda \quad (2.7)$$

Выберем некоторый корень λ^0 (2.7) и подставим в уравнение (1.1); рассмотрим задачу Коши

$$(p(x, \lambda^0) v')' + r(x, \lambda^0) v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \quad (2.8)$$

Построим решение $v(x, \lambda^0)$ задачи (2.8) аналитически, численно или в виде процедуры. Из выражений (2.5), (2.6) и второй осцилляционной теоремы сравнения Штурма [9, 14] следует, что положительный первый корень ξ уравнения $v(x, \lambda^0) = 0$ при выполнении условий $\partial p / \partial \lambda \leq 0, \partial r / \partial \lambda > 0$ (или $\partial p / \partial \lambda < 0, \partial r / \partial \lambda \geq 0$) удовлетворяет неравенствам

$$\xi \leq l, \quad \lambda^0 \geq \lambda; \quad \xi = \xi(\lambda^0) = \arg_x v(x, \lambda^0) \quad (2.9)$$

Если же $\partial p/\partial \lambda \geq 0$, $\partial r/\partial \lambda < 0$ (или $\partial p/\partial \lambda > 0$, $\partial r/\partial \lambda \leq 0$), то справедливы неравенства, обратные к (2.9). Отметим, что при $\xi > l$ функции p, r произвольным гладким образом с сохранением условий на производные по λ продолжаются на промежуток $x \in (l, \xi]$.

3. Метод ускоренной сходимости для высокоточного решения вспомогательной задачи. Введем числовой параметр $\varepsilon = 1 - \xi/l$; малость величины $|\varepsilon|$ характеризует относительную близость λ^0 к λ , см. [13]. Из соотношений (2.6) – (2.9) следует, что λ^0 , $v(x, \lambda^0)$ – точное решение обобщенной задачи (1.1) на известном интервале $0 \leq x \leq \xi$, $\xi = \xi(\lambda^0)$. Будем считать его приближенным решением для исходного интервала $0 \leq x \leq l$. Эти допущения лежат в основе излагаемого подхода к построению искомого решения. Применим методы теории возмущений для уточнения указанного приближенного решения и построения его со сколь угодно высокой степенью точности по степеням малого параметра ε в вышеизложенном смысле.

Отметим, что достаточной малости величины $|\varepsilon|$ можно добиться посредством применения метода Релея – Ритца к задаче (2.2), см. [5, 9, 12]. Для произвольного значения индекса m , $m \geq 1$, исследование проводится аналогично: абсцисса ξ есть m -й нуль функции v , а значение λ^0 отвечает оценке $\mu_m^*(\lambda)$.

Изложим процедуру уточнения значения $\mu(\lambda)$ и функции $U(x, \lambda)$ семейства задач Штурма – Лиувилля (2.2). Подход основан на методе возмущений Ляпунова – Пуанкаре [13] и процедуре продолжения по параметру $\lambda \in \Lambda$. Рекуррентный алгоритм имеет весьма простой вид

$$\mu^{(k+1)}(\lambda) = \mu^{(k)}(\lambda) - \varepsilon^{(k)}(\lambda) \xi^{(k)}(\lambda) p(\xi^{(k)}, \lambda) V'^2(\xi^{(k)}, \mu^{(k)}, \lambda) \|V\|_r^{-2} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon^{(k)} = 1 - \xi^{(k)}/l, \quad \xi^{(k)}(\lambda) = \arg_x V(x, \mu^{(k)}(\lambda), \lambda), \quad \lambda \in \Lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В качестве начального приближения $\varepsilon^{(0)}, \xi^{(0)}$ принимаются величины, аналогичные найденным выше. Они определяются на основе решения задачи Коши для функции $V(x, \mu, \lambda)$ при известном значении $\mu^{(0)} = \mu^*(\lambda)$. Общая схема для произвольного $k \geq 0$ имеет форму

$$(p(x, \lambda) V')' + \mu^{(k)}(\lambda) r(x, \lambda) V = 0, \quad V(0) = 0, \quad V'(0) = 1 \quad (3.2)$$

Функция $V(x, \mu^{(k)}(\lambda), \lambda)$ строится на интервале $0 \leq x \leq \xi^{(k)}(\lambda)$, где $\xi^{(k)}$ – m -й нуль функции V . Квадрат нормы функции V с весом $r(x, \lambda)$ на интервале $0 \leq x \leq \xi^{(k)}(\lambda)$ в (3.1) определяется стандартным образом квадратурой типа (2.1), либо интегрированием уравнения для функции $W = \partial V / \partial \mu$ в виде

$$\|V\|_r^2 \equiv \int_0^{\xi^{(k)}} r(x, \lambda) V^2(x, \mu^{(k)}, \lambda) dx = p(\xi^{(k)}, \lambda) V'(\xi^{(k)}, \mu^{(k)}, \lambda) W(\xi^{(k)}, \mu^{(k)}, \lambda) \quad (3.3)$$

$$(p(x, \lambda) W')' + \mu^{(k)}(\lambda) r(x, \lambda) W = -r(x, \lambda) V(x, \mu^{(k)}, \lambda), \quad W(0) = W'(0) = 0$$

Правая часть уравнения (3.3) для W известна, однако в вычислительном аспекте удобнее совместно интегрировать задачу Коши (3.2), (3.3) и проводить вычисление $\|V\|_r^2$.

Таким образом, алгоритм уточнения решения $\mu(\lambda)$, $U(x, \lambda) = V(x, \mu, \lambda)$ задачи Штурма – Лиувилля (2.2) сводится к высокоточному интегрированию задач Коши (3.2), (3.3) для V, W , определения требуемого корня $\xi^{(k)}(\lambda)$ и вычисления добавки порядка $\varepsilon^{(k)} = O((c_\mu \varepsilon)^{\theta(k)})$, где $\theta(k) = 2^k$, для искомого $\mu(\lambda)$ (3.1); постоянная $c_\mu(\lambda) \sim 1$ в оценке вычисляется конструктивно [13, 15, 16]. После построения функции $\mu(\lambda)$ для допустимых $\lambda \in \Lambda$ из уравнения (2.4) находятся собственные значения λ_n и функции

$u_n(x)$ задачи (1.1). Этот подход предпочтительно выполнить в виде процедуры продолжения по параметру λ , используя точное значение $\mu(\lambda)$ в качестве начального приближения для определения $\mu(\lambda + \delta\lambda)$, где величина $\delta\lambda$ достаточно мала, что устанавливается вычислением [15, 16].

Отметим, что множество Λ , для которого проводятся построения, может быть уточнено и, как правило, значительно сужено следующим образом. Введем функции $f^\pm(\lambda)$ ($f = p$ или $f = r$) вида

$$f^+(\lambda) = \max_x f(x, \lambda), f^-(\lambda) = \min_x f(x, \lambda), f^+ > f^- > 0, \lambda \in \Lambda \quad (3.4)$$

Согласно (3.4) для задачи (2.2) найдем грубые оценки сверху и снизу для искомого $\mu_m(\lambda)$:

$$(\pi m)^2 p^-(\lambda)/r^+(\lambda) < \mu_m(\lambda) < (\pi m)^2 p^+(\lambda)/r^-(\lambda), \lambda \in \Lambda, \quad \mu_m(\lambda_n) = 1 \quad (3.5)$$

Таким образом, функция $\mu_m(\lambda)$ должна быть построена лишь для значений $\lambda \in \Lambda$, совместных с (3.5), что в конкретных задачах приводит к существенному сокращению вычислений, см. примеры (1.2)–(1.4). Изложенный выше алгоритм ускоренной сходимости достаточно просто реализуем на современных ЭВМ без привлечения дорогостоящего программного обеспечения, основанного на методах Релея–Ритца, конечных элементов и др. Он позволяет получать практически точные результаты за 2–3 итерации; при $\epsilon_{с\mu} = 0,1$ – $0,01$ относительная погрешность расчетов составит величину порядка 10^{-4} – 10^{-16} . Метод "пристрелки" для достижения аналогичной погрешности потребует от 13 до 50 итераций.

4. Прямой метод высокоточного решения обобщенной задачи. Изложенный в разд. 3 подход целесообразно применять на предварительной стадии исследования вопросов существования и определения области допустимых значений искомого параметра. Однако в конкретных расчетах при уточнении некоторого значения λ он может приводить к избыточным вычислениям, связанным с высокоточным построением функции $\mu(\lambda)$ в широкой области допустимых значений, задаваемой неравенствами (3.5), и численным решением уравнения (2.4). Более экономичным оказывается метод непосредственного уточнения оценки λ^0 .

Процедура уточнения порождающего решения $\lambda^0, u(x, \lambda^0)$ (2.6)–(2.9) основана на введении возмущенного аргумента $y = \xi x$ и представлении задачи (1.1) в виде возмущенной [13, 15, 16]. Применение метода возмущений с помощью стандартной схемы разложения по степеням малого параметра ϵ приводит к одностепенным неоднородным краевым задачам.

Рассмотрим, в частности, задачу первого приближения и учтем условие, аналогичное альтернативе Фредгольма (ортогональность с весом $r(x, \lambda^0)$ порождающего решения $u(x, \lambda^0)$ и неоднородности). Получим в итоге уточненное значение $\lambda^{(1)}$, учитывающее члены порядка ϵ , т.е. с погрешностью $O(\epsilon^2)$:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^0 - \epsilon \xi p(\xi, \lambda^0) v'^2(\xi, \lambda^0) d^{-1}(\lambda^0), \quad \epsilon = 1 - \xi/l, \quad \xi = \xi(\lambda^0) \quad (4.1)$$

$$d(\lambda^0) = \int_0^\xi [-p'_\lambda(x, \lambda^0) v'^2(x, \lambda^0) + r'_\lambda(x, \lambda^0) v^2(x, \lambda^0)] dx = p(\xi, \lambda^0) v'(\xi, \lambda^0) w(\xi, \lambda^0)$$

Функция $w(x, \lambda^0)$ в (4.1) определяется как совместное с $u(x, \lambda^0)$ решение задачи Коши (аналогичной задаче (3.3) для W)

$$(p(x, \lambda^0) w')' + r(x, \lambda^0) w = -(p^{-1} \partial p / \partial \lambda)' p v' + (r p^{-1} \partial p / \partial \lambda - \partial r / \partial \lambda) v, \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad (4.2)$$

Функции p, r и их производные по x, λ в правой части уравнения (4.2) берутся при $\lambda = \lambda^0$.

С помощью соотношений (4.1), (4.2) строится рекуррентный алгоритм ускоренной сходимости по малому параметру ϵ типа (3.1)–(3.3). На каждом шаге k он заключается в последовательном уточнении значения λ , интегрировании задачи Коши для v с

учетом этого уточнения (и для w с целью определения "квадрата нормы" v в $W_2^{(1)}$ с весами $-p'_\lambda(x, \lambda^{(k)})$, $r'_\lambda(x, \lambda^{(k)})$) и высокоточном определении абсциссы $\xi^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} + \varepsilon^{(k)} \xi^{(k)} p(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)}) v'^2(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)}) / d(\lambda^{(k)}), \quad \xi^{(k)}(\lambda^{(k)}) = \\ &= \arg_x v(x, \lambda^{(k)}), \quad \varepsilon^{(k)} = 1 - \xi^{(k)} / l \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \lambda^{(0)} = \lambda^0, \varepsilon^{(0)} = \varepsilon = 1 - \xi(\lambda^0) / l, \xi^{(0)} = \xi(\lambda^0), d \neq 0$$

Функции v , w в (4.3) вычисляются по формулам (4.1), (4.2) при найденном на предыдущем шаге k значении $\lambda^{(k)}$. Аналог "квадрата нормы" $d(\lambda^{(k)})$ имеет вид (4.1). Из (4.1), (4.3) предельным переходом получим дифференциальное соотношение

$$d\lambda/dl = \chi(l, \lambda), \quad \chi(l, \lambda) = -p(l, \lambda) u'^2(l, \lambda) / d(\lambda) \quad (4.4)$$

В результате модификации алгоритма (3.1)–(3.3) получена прямая процедура уточнения решения λ , u исходной задачи (1.1), обладающая свойством ускоренной сходимости, т.е. приводящая к погрешности $\varepsilon^{(k)} = O((c_\lambda \varepsilon)^{\theta(k)})$ ($|\varepsilon| \ll 1$, $c_\lambda \sim 1$), где $\theta(k) = 2^k$, на k -м шаге итерации, $k = 0, 1, 2, \dots$. Сходимость функций $v(x, \lambda^{(k)})$ к $u(x, \lambda)$ и производных по x будет равномерной для всех $0 \leq x \leq l$ и ускоренной по номеру итерации k . Следует отметить, что без потери точности по степеням $\varepsilon^{(k)}$ во всех формулах (3.1), (3.3), (4.1), (4.3) можно положить $\xi^{(k)} = l$, кроме формул для вычисления параметра $\varepsilon^{(k)} = 1 - \xi^{(k)} / l$. Обоснование сходимости и оценка радиуса сходимости $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ получаются согласно изложенному ранее [13, 16].

Развитый метод применим к задачам более общего вида, описываемых системами уравнений, граничными условиями третьего рода, условиями периодичности, смешанными граничными условиями и др. Как показывает вычислительная практика, метод обладает высокой вычислительной эффективностью: простотой реализации алгоритма, ускоренной сходимостью, экономичностью по отношению к оперативной памяти и выполняемым операциям, устойчивостью к сбоям, отсутствием накопления ошибок округлений. Эти свойства метода позволяют успешно исследовать также задачи с регулярными особенностями, что весьма проблематично для других подходов. Метод особенно эффективен при проведении массовых высокоточных расчетов, связанных с параметрическим синтезом систем, описываемых обобщенными краевыми задачами на собственные значения и функции (см. разд. 6).

5. Модельные примеры. С целью тестирования алгоритма проведем расчеты иллюстративных примеров по методу ускоренной сходимости.

5.1. Пусть $l = p = 1$, $r(x, \lambda) = (\lambda + x^2)^{-2}$; тогда функция r определена для всех $0 \leq x \leq 1$ при $\lambda \in \Lambda = \{\lambda: \lambda > 0, \lambda < -1\}$. Рассмотрим ради определенности значения $\lambda > 0$; согласно (3.4), (3.5) получим грубые оценки λ_n : $0 < \lambda_n < (\pi n)^{-1}$. С помощью аналитических ухищрений удастся построить точное решение в виде

$$u(x, \lambda) = c(\lambda + x^2)^{1/2} \sin \varphi(x, \lambda), \quad \varphi(x, \lambda) = (1 + \lambda^{-1})^{1/2} \operatorname{arctg} x \lambda^{-1/2} \quad (5.1)$$

$$\lambda_n = \operatorname{Arg}[\varphi(1, \lambda) - \pi n], \quad n = 1, 2, \dots; \lambda_n = (2n)^{-2} + O(n^{-4}), \quad n \gg 1$$

$$\lambda_1 = 0,165643, \lambda_2 = 0,048674, \lambda_3 = 0,023214, \dots$$

Полученные собственные значения λ_n и функции $u(x, \lambda_n)$ примем в качестве точных. Численную реализацию алгоритма ускоренной сходимости (4.1)–(4.3) удастся выполнить с помощью элементарных вычислительных средств, обеспечивающих точность расчетов с относительной погрешностью порядка 10^{-6} и небольшим быстродействием; требования к оперативной памяти минимальны.

На основе принципа Релея по формулам (2.6), (2.7) вычисляется грубая оценка снизу $\lambda_1^0 = \lambda_{1*} = 0,16$ первого значения λ_1 для пробной функции $\psi(x, \lambda) = \sin \pi x$. Решение задачи Коши (2.8) приводит согласно (2.9), (4.1) к значениям $\xi = 0,935549$, $\varepsilon = 0,064451$ и к уточненному

значению $\lambda_{1*}^0 = 0,165425$, довольно близкому к λ_1 (5.1). Следующая итерация (4.3) дает приближенное значение $\lambda_{1*}^{(2)*} = 0,165656$ – оценке сверху, также весьма близкой к λ_1 . На основе двусторонних оценок для λ_1 вычисляется среднее значение, относительная погрешность которого $\Delta\lambda_1/\lambda_1 \leq 10^{-4}$. Небольшое несоответствие полученной и теоретической погрешностей может быть обусловлено ошибками округления калькулятора или величиной ϵ_λ . Отметим, что весьма быстрая сходимость алгоритма через несколько итераций практически исчерпывает точностные возможности современных компьютеров.

Так, если расчеты проводятся с относительной погрешностью 10^{-20} – 10^{-30} , то при $\epsilon_\lambda = 0,1$ – $0,01$ количество итераций не должно превосходить $k = 4$ – 6 . Обычно на практике расчеты проводятся с относительной погрешностью 10^{-3} – 10^{-5} . Поэтому достаточно выполнить 2–3 итерации (вместо 15–20 по методу "пристрелки").

Возьмем для сравнения грубую оценку λ_1 сверху: $\lambda_1^0 = \lambda_1^* = 0,17$. В соответствии с изложенной методикой получаются величины: $\xi = 1,052775$, $\epsilon = -0,052775$, а уточненное значение $\lambda_{1*}^{(1)} = 0,165545$ – оценка снизу. Следующая итерация дает значение $\lambda_{1*}^{(2)} = 0,165637$ – также оценку снизу, но уточненную. Используя точное значение λ_1 (5.1), находим, что относительная погрешность $\Delta\lambda_1/\lambda_1 \leq 4 \cdot 10^{-5}$.

5.2. Приведем весьма краткий расчет модельного примера, аналитическое решение которого неизвестно. Пусть $l = p = 1$, $r(x, \lambda) = (\lambda + 0,1 \sin \pi x)^{-2}$; функция r определена для всех $0 \leq x \leq 1$ при $\lambda \in \Lambda = \{\lambda: \lambda > 0, \lambda < -0,1\}$. Рассмотрим значения $\lambda > 0$; согласно (3.4) (3.5) имеем оценки $0 < \lambda_n < (\pi n)^{-1}$. С помощью принципа Релея по аналогии с 5.1 получим грубую оценку снизу одного из собственных значений $\lambda_1^0 = \lambda_{1*} = 0,2$. Вычисления по формулам (2.8), (2.9), (4.1) приводят к величинам: $\xi = 0,894047$, $\epsilon = 0,105953$; уточненная оценка снизу $\lambda_{1*}^{(1)} = 0,229819$. На ее основе получим $\xi^{(1)} = 0,984095$, $\epsilon^{(1)} = 0,015905$. Следующая итерация вновь приводит к уточненной оценке снизу $\lambda_{1*}^{(2)} = 0,235203$. Третья итерация дает, наконец, оценку сверху $\lambda_{1*}^{(3)*} = 0,235283$, что обеспечивает относительную погрешность $\Delta\lambda_1/\lambda_1 \leq 4 \cdot 10^{-6}$.

Аналогичные расчеты для другого собственного значения позволяют достаточно просто получить $\lambda_2 = 0,097163$ с относительной погрешностью $\Delta\lambda_2/\lambda_2 \leq 4 \cdot 10^{-5}$.

Таким образом, расчет нетривиальных тестовых примеров свидетельствует об эффективности разработанного численно-аналитического метода решения обобщенных задач на собственные значения и функции. Этот метод не имеет аналога в научной литературе. С его помощью проведем высокоточный расчет более содержательной задачи о боковом выпучивании консольной балки под действием сосредоточенной на конце и распределенной нагрузок.

6. Эффективное решение задачи Прандтля. Рассмотрим классическую задачу о боковом выпучивании протяженной консольной балки с узким прямоугольным сечением [5, 6]. Предполагается, что наряду с сосредоточенной на конце изгибающей силой P значительное влияние на устойчивость оказывает распределенная массовая сила, например сила тяжести [5]. Краевая задача для угла скручивания β приводится к виду

$$(\sigma(x)\beta')' + \frac{1}{\alpha(x)} [Px + g \int_0^x (x-s)\rho(s)ds]^2 \beta = 0, \quad \beta'(0) = \beta(l) = 0 \quad (6.1)$$

Здесь $\sigma(x)$ – крутильная жесткость; $\alpha(x)$ – жесткость на изгиб, ортогональный вертикальной плоскости; $\rho(x)$ – линейная плотность; g – ускорение сил тяготения. Балка считается достаточно узкой и протяженной, т.е. $d^2/hl \ll 1$, где d, h – линейные характерные размеры (толщины) балки в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно [6]. Неизвестными в задаче (6.1) являются критическое значение $P = P_*$, при котором в балке происходит боковое выпучивание с кручением, т.е. появляется нетривиальное решение $\beta(x, P_*)$, а также указанная форма потери устойчивости. Величина P_* характеризует несущую способность балки. Классические результаты от-

носятся, в основном, к случаю балки постоянного сечения (σ , α , ρ – постоянны) и, кроме того, влиянием весовой (распределенной) составляющей в (6.1) обычно пренебрегают [5, 6]. Последнее допущение для достаточно длинных балок может привести к существенным погрешностям – большому завышению величины P_* .

Рассмотрим задачу (6.1) с учетом влияния веса в предположении постоянства сечения балки. Введем соответствующие безразмерные параметры λ , θ и нормированный аргумент x ; получим обобщенную задачу на собственные значения и функции типа (1.1)

$$\beta'' + (\lambda x + \theta x^2)^2 \beta = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \beta'(0) = \beta(1) = 0 \quad (6.2)$$

$$\lambda = Pl^2(\sigma\alpha)^{-1/2}, \quad \theta = 1/2 \rho g l^3 (\sigma\alpha)^{-1/2}$$

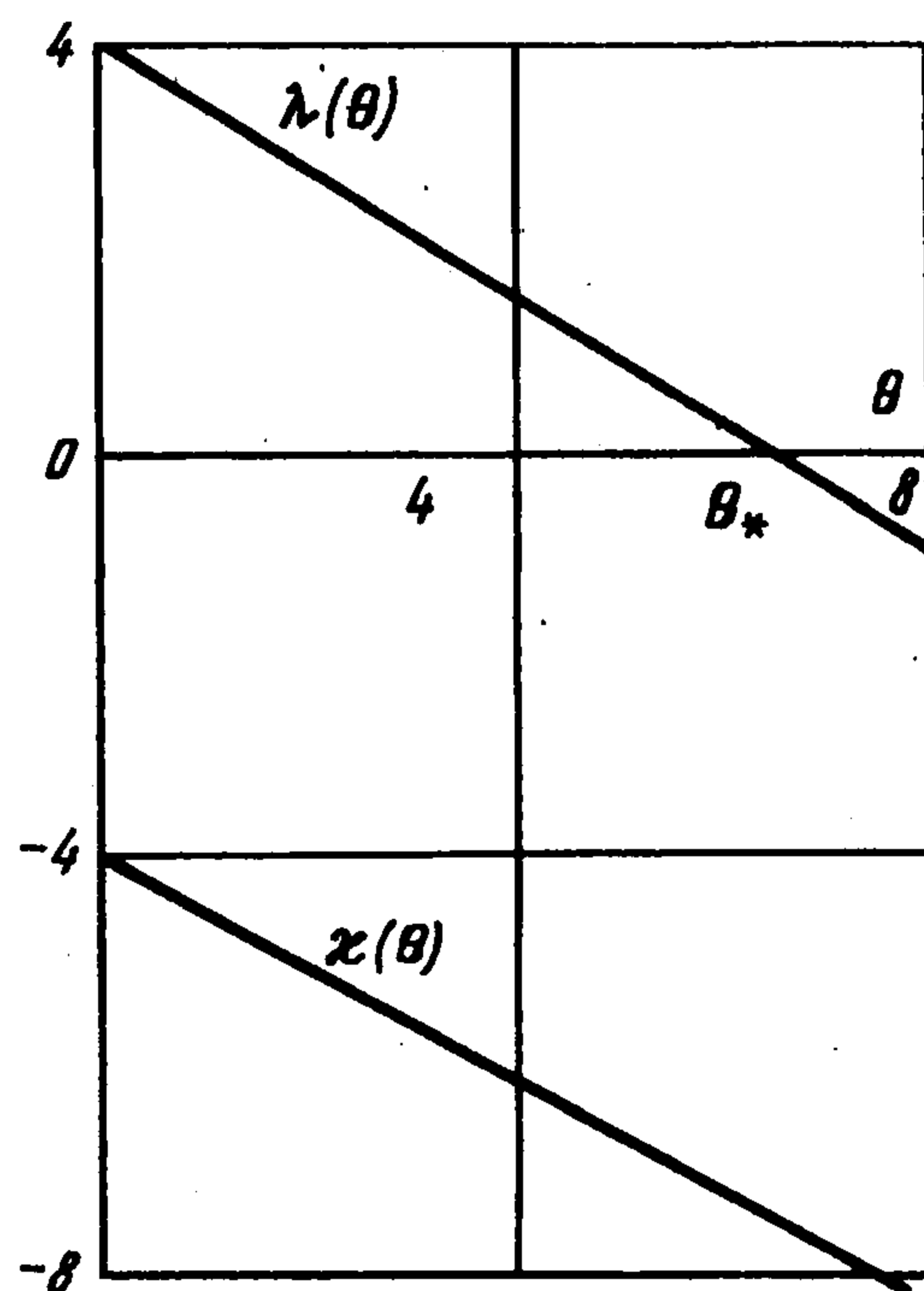
Отметим, что коэффициент податливости $r(x, \lambda, \theta) \equiv 0$ (r – множитель перед β) при $x = 0$, и, кроме того, на левом конце имеет место условие 2-го рода (свободный конец). В этом случае схема построения искомого решения (см. разд. 2 – 4) сохраняется, однако изменяются начальные условия в задачах Коши (2.8) $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ и (3.2) $V(\theta) = 1$, $V'(0) = 0$. Ставится задача определения первого собственного значения $\lambda = \lambda(\theta)$ для достаточно большого множества значений $\theta \geq 0$.

Случай $\theta = 0$ приводит к известному результату [6]: $\lambda(0) = 4,013$; более точное значение, полученное методом ускоренной сходимости, $\lambda(0) = 4,012597$. Результаты высокоточных расчетов для $\theta > 0$ приведены на графике (фигура); расчеты проводились с относительной погрешностью 10^{-6} – 10^{-7} . Из графика $\lambda(\theta)$ следует, что при увеличении θ значение λ монотонно (практически линейно) убывает и достигает нулевого значения $\lambda(\theta_*) = 0$ при $\theta = \theta_* \approx 6,4269$. При дальнейшем увеличении θ ($\theta > \theta_*$) величина $\lambda(\theta)$ становится отрицательной, т.е. балка имеет отрицательную несущую способность вследствие влияния собственного веса. Для придания устойчивости требуется "подпирающее" усилие $P < P_* \leq 0$. Однако величина $|P|$ не должна быть слишком большой во избежание бокового выпучивания из-за чрезмерной сосредоточенной нагрузки $P < 0$.

Отметим, что при $\theta = 0$ задача имеет также отрицательное собственное значение $\kappa(0) = -\lambda(0)$, не лишенное механического содержания ($P_* < 0$).

Соответствующие значения $\kappa(\theta)$, $\theta > 0$ также представляют интерес (представлены на графике, см. фигуру). Наряду с положительными значениями θ могут быть рассмотрены отрицательные (ускорение массовых сил направлено вверх). Отметим, что из вида задачи (6.2) следует центральная симметрия $\lambda(\theta) = -\kappa(-\theta)$. Постановка задачи о несущей способности балки может быть модифицирована следующим образом. Требуется определить для всех $|\theta| < \infty$ суммарную силу $\Delta P(\theta)$, характеризующую упругую устойчивость балки как при нагрузке вниз ($P^+ > 0$), так и вверх ($P^- < 0$), т.е. найти $\Delta P(\theta) = P^+ - P^- = [\lambda(\theta) - \kappa(\theta)]\sqrt{\sigma\alpha}l^2$. С помощью кривых $\lambda(\theta)$, $\kappa(\theta)$ поворотом в плоскости на угол π получается искомая зависимость для $-\theta_* \leq \theta \leq \theta_*$. Вследствие указанной симметрии величину ΔP , т.е. зависимости $\lambda(\theta)$, $\kappa(\theta)$, достаточно построить при $\theta > 0$.

Отметим, что с помощью метода ускоренной сходимости, изложенного в разд. 2–4, может быть исследована задача (6.1) для произвольных конкретных функций $\sigma(x)$, $\alpha(x)$, $\rho(x)$, в том числе задача оптимизации распределения массы балки при учете естественных ограничений [17].



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л.Н.* Динмическая теория приливов. М.: Наука, 1987. 472 с.
2. *Эккарт К.* Гидродинамика океана и атмосферы. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 327 с.
3. *Чепмен С., Линдзен Р.* Атмосферные приливы. М.: Мир, 1972. 295 с.
4. *Голицын Г.С., Дикий Л.А.* Собственные колебания планетных атмосфер в зависимости от скорости вращения планеты // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1966. Т. 2. № 3. С. 225–235.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
6. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
7. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
8. *Маркеев А.П.* Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322–336.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
10. *Садовничий В.А.* Несамосопряженный оператор // Математическая энциклопедия. М.: Изд-во Сов. энциклопедия, 1982. Т. 3. С. 1006–1010.
11. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
12. *Крылов Н.М.* Избранные труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР. 1961. 307 с.
13. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.
14. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
15. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Эффективное решение задачи Штурма–Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
16. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
17. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1998