

УДК 532.546;539.371

© 1999 г.

А.Г. Егоров

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Рассматривается задача фильтрационной консолидации упругого насыщенного пористого полупространства при качении по его поверхности жесткого цилиндрического катка. Находится зависимость момента трения качения от скорости движения катка. Проводится уточнение стандартной модели консолидации с учетом двухфазного характера зоны разгрузки.

Контактным задачам теории упругости и вязкоупругости посвящена обширная литература (см., например [1, 2]). В то же время аналогичные по постановке задачи для насыщенных пористых сред, формулируемые в рамках схемы фильтрационной консолидации, практически не изучены. Между тем, они содержательны как с математической, так и с механической точки зрения. С одной стороны, имеющаяся аналогия с абстрактным вязкоупругим материалом оказывается не столь прямой, чтобы можно было непосредственно пользоваться известным аппаратом: необходима разработка специальных методов решения контактных задач фильтрационной консолидации. С другой стороны, специфика объекта порождает новые эффекты, принципиально не возникающие в рамках теории вязкоупругости. К последним, например, можно отнести возможность появления двухфазных зон в изначально полностью насыщенном пористом материале [3].

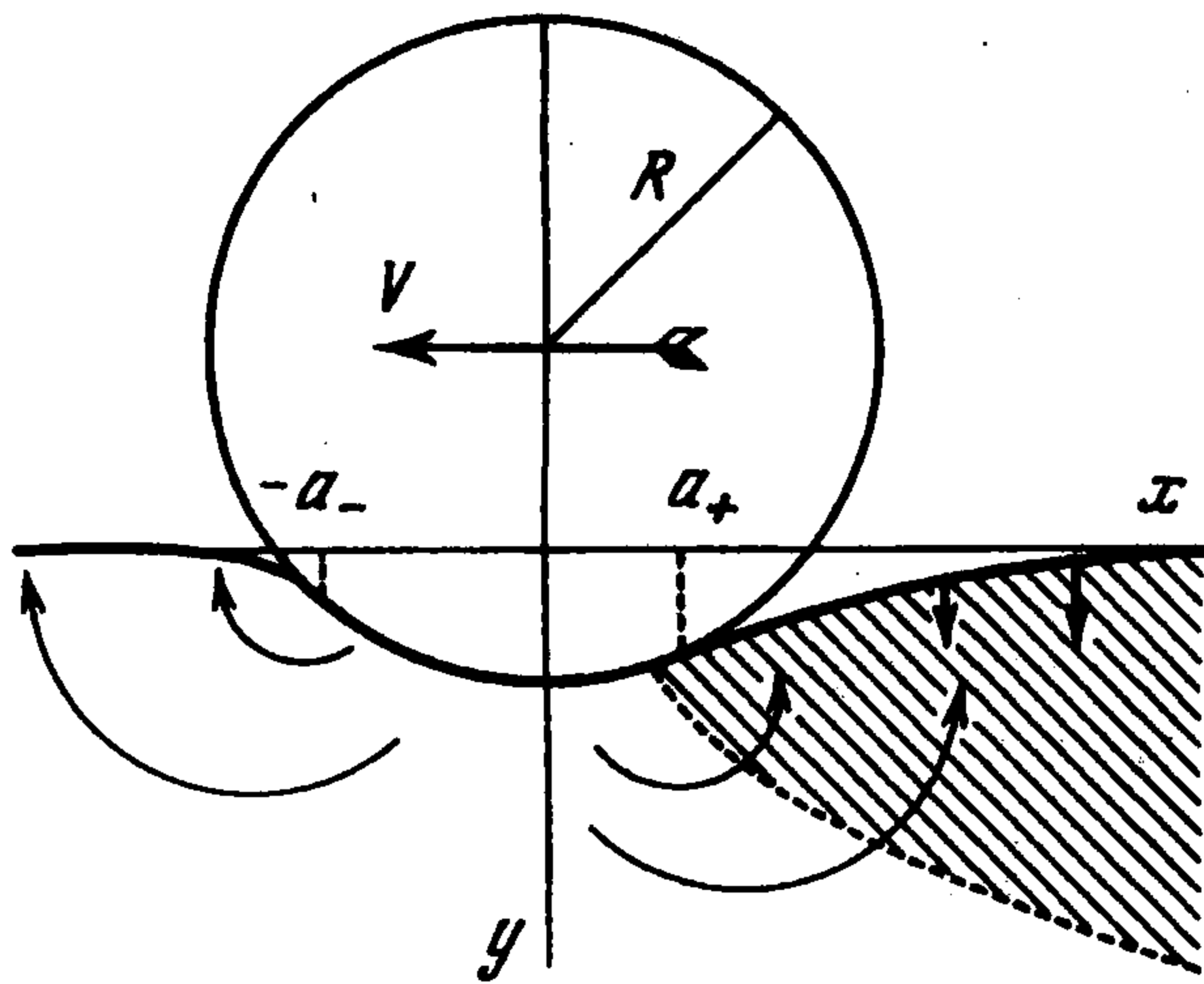
В полной мере сказанное относится и к задаче о напряженно-деформированном состоянии полупространства под действием свободно катящегося по его поверхности жесткого катка. Традиционно возникающий здесь вопрос заключается в вычислении момента трения качения. Известно [4], что, помимо универсального механизма трения Рейнольдса [5], связанно с относительным скольжением соприкасающихся поверхностей вследствие их деформации, момент трения обязан своему появлению также и вязким свойствам материала основания. Для пористой среды последние определяются фильтрационным перетоком жидкости, а соответствующий вязкий механизм трения, как правило, доминирует (см. разд. 6) над рейнольдсовским.

Вязкий механизм трения подробно рассматривается разд. 1–6 применительно к ситуации, когда деформации пористого основания описываются в рамках стандартной линейной модели фильтрационной консолидации. Достаточно точно описывая силовые характеристики рассматриваемого процесса, эта модель имеет и недостаток: не учитывает двухфазный характер (жидкость плюс газ) области разгрузки позади катка. Соответствующее уточнение модели и сопутствующие ему расчеты даны в разд. 7.

1. Постановка задачи. Пусть бесконечно длинный каток радиуса R движется справа налево со скоростью V (фиг. 1) по поверхности насыщенного пористого полупространства.

Процесс фильтрационной консолидации полупространства описывается в подвижной системе координат, связанной с катком, уравнениями [6, 7]

$$\mu \Delta u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

$$\mu \Delta u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$V \frac{\partial \theta}{\partial x} - k \Delta p = 0 \quad (1.3)$$

Здесь u_x, u_y – перемещения, p – давление жидкости, λ, μ – коэффициенты Ламе упругой пористой матрицы, $\theta = \text{div} u$ – объемная деформация среды, k – фильтрационный коэффициент, определяемый проницаемостью k_0 пористой среды и вязкостью μ_0 насыщающей ее жидкости ($k = k_0/\mu_0$). Уравнение (1.3) выписано в пренебрежении сжимаемостью зерен скелета и жидкости. В этом случае объемные макроде-

формации (первый член в (1.3)) связаны с переупаковкой зерен и однозначно определяются изменением объема пор за счет выдавливания оттуда жидкости (второй член в (1.3)). Эффективные напряжения [6] связаны с деформациями линейно

$$\sigma_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.4)$$

Граничные условия в стандартном предположении о малости деформаций ставятся на линии $y = 0$. Они таковы, что вне площадки контакта

$$y = 0; \quad x > a_+, \quad x < -a_- : \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = p = 0 \quad (1.5)$$

а внутри нее

$$y = 0; \quad -a_- < x < a_+ : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (1.6)$$

Первое условие в (1.6) означает непроницаемость катка для жидкости, второе следует из равенства нормальных перемещений в зоне контакта. Еще одно граничное соотношение должно описывать условия трения на площадке контакта. Последнее равенство в (1.6) отвечает предельной ситуации гладкого катка с нулевым коэффициентом трения между катком и материалом пористой матрицы ([2], с. 280). Выбор этого условия, с одной стороны, позволяет рассмотреть вязкий механизм трения в "чистом" виде: механизм Рейнольдса для гладкого катка не работает, и трение качения здесь связано лишь с вязкими свойствами основания. С другой стороны, касательные усилия в контактных задачах качения, как правило, значительно (на порядок [2]) меньше нормальных, в силу чего указанное условие является неплохим приближением и для общей ситуации.

В дальнейшем удобно переместить начало координат в середину отрезка $(-a_-, a_+)$ и нормировать пространственные координаты на $a = (a_+ + a_-)/2$, сохранив за ними прежние обозначения. В плоскости $z = x + iy$ после этого площадке контакта отвечает отрезок $(-1, 1)$. Кроме того, с сохранением прежних обозначений нормируем перемещения на величину a^2/R , а напряжения и давление – на $2\mu a/R$.

Введем в рассмотрении вместо перемещений и давления другую тройку функций. Одна из них

$$f(z) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\theta}{r} - 2p \right) \quad (1.7)$$

аналитична, а две другие θ и $\zeta = 2u_x - yRef$ удовлетворяют уравнениям

$$2s \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta \theta, \quad \Delta \zeta = 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1.8)$$

Безразмерные параметры r и s определены соотношениями

$$r = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad s = \frac{aV}{2k(\lambda + 2\mu)}$$

Граничные условия (1.5), (1.6) в терминах функций f , ζ , θ принимают вид

$$y = 0, |x| > 1: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \theta = r \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad r \operatorname{Im} f = \theta \quad (1.9)$$

$$y = 0, |x| < 1: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2r, \quad r \operatorname{Re} f = 2(x - A); \quad A = \frac{a_- - a_+}{2a} \quad (1.10)$$

Постоянная A появляется в (1.10) в силу несимметричного расположения площадки контакта относительно середины колеса. Она подлежит определению в ходе решения задачи.

В дальнейшем наряду с θ и ζ будем рассматривать также их линейную комбинацию $\zeta - \theta/s$, являющуюся согласно (1.8) гармонической функцией. Обозначим через $h(z)$ аналитическую функцию, мнимой частью которой она является.

Обсудим дополнительные требования, накладываемые на искомые функции. На бесконечности, очевидно, θ , f , dh/dz должны исчезать. Как будет видно из дальнейшего, для h оказывается выполненным более сильное условие регулярности: не только dh/dz , но и сама функция h стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Что касается особых точек $z = \pm 1$, то условия непрерывности деформаций приводят к требованию непрерывности в них θ , f , $\nabla \zeta$. Подчеркнем, что производные от h и θ по отдельности могут иметь (и на самом деле имеют) интегрируемые особенности при $z = \pm 1$; лишь их линейная комбинация ζ должна быть непрерывно дифференцируемой.

Итак, исходная задача (1.1), (1.6) сведена к задаче (1.7), (1.8) совместного нахождения функций θ , ζ , f и величины A по граничным условиям (1.9), (1.10). В ее постановке неявно участвует размер a площадки контакта. Как правило, известен не он, а сила Q давления катка на основание, приходящаяся на единицу длины катка. Ее надлежит вычислить после решения задачи (1.7)–(1.10) интегрированием нормального напряжения p_s по площадке контакта. Последнее представляет собой разность между эффективным нормальным напряжением $p_c = \sigma_{yy}$, передающимся по пористой матрице, и давлением $p_w = p$ жидкости

$$p_s = p_c - p_w, \quad p_w(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{r} - \operatorname{Im} f \right) \Big|_{y=0}, \quad p_c(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{r} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \Big|_{y=0}$$

Соответствующие интегралы

$$q = q_w - q_c = - \int_{-1}^1 p_s(x) dx, \quad m = \int_{-1}^1 (x - A) p_s(x) dx \quad (1.11)$$

определяют [1,4] силу Q и момент M трения качения, приходящихся на единицу длины катка

$$Q = \frac{2\mu a^2}{R} q(s, r), \quad M = \frac{2\mu a^3}{R} m(s, r) \quad (1.12)$$

2. Метод решения. Сформулированная выше задача распадается на две. Вначале

можно независимо от f, A найти θ, ζ как решение уравнений (1.8) с первыми двумя граничными условиями в (1.9), (1.10). После этого правая часть в последнем из условий (1.9) определена, и таким образом, задача отыскания f и A полностью поставлена.

Опишем кратко ход решения этих задач, ссылаясь по мере необходимости на качественные свойства искомых функций. Доказательство их будет проведено в разд. 3.

Задачу для определения θ, ζ удобно свести к интегральному уравнению по части границы $y = 0, |x| > 1$ относительно $g(x) = (\partial\theta/\partial y)(x, 0)$. Для этого, используя первые соотношения в (1.9), (1.10), выразим θ и $\text{Im} h$ через g по формулам

$$\text{Im} h = -\frac{1}{\pi s} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') \ln |z - x'| dx' \quad (2.1)$$

$$\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') e^{s(x-x')} K_0(s|x-x'|) dx'$$

где K_0 — функция Макдональда. Учитывая далее непрерывную дифференцируемость ζ и воспользовавшись второй парой граничных условий (1.9), (1.10), получим искомое интегральное уравнение в виде

$$\int_{|x'|>1} K(s(x-x'))g(x')dx' = -2r \int_{|x'|<1} K(s(x-x))dx', \quad |x| > 1 \quad (2.2)$$

$$K(x;r) = e^x K_0(|x|) - r \frac{d}{dx} (\ln |x| + e^x K_0(|x|))$$

Его ядро $K(x)$ имеет логарифмическую особенность в нуле и затухает на бесконечности. Решение уравнения (2.2) отыскивается методом коллокации с мультипликативным выделением особенностей g . Последние имеют вид

$$g = O(|x \mp 1|^{-1/2}), \quad x \rightarrow \pm 1 \quad (2.3)$$

$$g = O(x^{-3/2}) \quad x \rightarrow +\infty; \quad g = O(x^{-2}) \quad x \rightarrow -\infty$$

Выделение особенностей позволяет получать приемлемые результаты даже на достаточно грубых сетках.

После нахождения g необходимые для дальнейшего значения $\text{Im} h$ и θ на границе $y = 0$ подсчитываются простым интегрированием (2.1). Заметим, впрочем, что при $x > 1$ необходимости в этом нет. Можно показать (см. разд. 3), что

$$\theta(x, 0) = \zeta(x, 0) = \text{Im} h(x, 0) = 0, \quad x > 1 \quad (2.4)$$

Указанное свойство эквивалентно тому, что на свободной поверхности позади катка наряду с σ_{yy} и σ_{xy} равна нулю также и компонента σ_{xx} . Физически это понятно: позади катка нет механизма сжатия или растяжения поверхностного слоя в направлении x .

Обратимся к задаче нахождения f, A при известной функции $\theta(x, 0)$. Это задача Синьорини. Ее решение известно [8]. Условие разрешимости определяет величину A

$$A = \frac{1}{2r\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\theta(x, 0) dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (2.5)$$

а искомая функция находится по формуле

$$f = 2z - 2\sqrt{z^2 - 1} - 2A - \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{\pi r} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\theta(x', 0)}{\sqrt{x'^2 - 1}} \frac{dx'}{x' - z} \quad (2.6)$$

где $y \sqrt{z^2 - 1}$ берется ветвь, положительная на отрезке $(1, \infty)$. Заметим, что функция $\theta(x, 0)$ ограничена при $x = -1$ и быстро убывает на бесконечности

$$\theta(x, 0) = O(|x|^{-3/2}), \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.7)$$

так что интегралы в (2.5), (2.6) определены.

3. Качественный анализ задачи. Поведение решения на бесконечности. При качественном анализе задачи (1.8)–(1.10) удобно рассмотреть вспомогательную задачу: уравнения (1.8) при $s = 1$ с граничными условиями

$$y = 0: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\theta}{r} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\delta(x) \quad (\text{Im } h = \zeta - \theta) \quad (3.1)$$

где δ – функция Дирака, описывающая точечную нормальную нагрузку на матрицу пористого основания. Будем помечать такое решение нулевым нижним индексом. Решение исходной задачи θ, h представляется через θ_0, h_0 и эффективные нормальные напряжения p_c на площадке контакта следующим образом:

$$\theta = -2s \int_{-1}^1 p_c(x') \theta_0(s(z - x')) dx', \quad h = -2 \int_{-1}^1 p_c(x') h_0(s(z - x')) dx' \quad (3.2)$$

Решение вспомогательной задачи может быть формально построено с помощью преобразования Фурье по x . В частности, для значений θ_0 на границе получим

$$\theta_0(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} \left(b(iv) - \frac{r}{1-r} \right) dv \quad (3.3)$$

$$b(w) = \frac{r}{1-r} - r \left(1 + wr \left(\sqrt{1 - \frac{2}{w}} - 1 \right) \right)^{-1} \quad (3.4)$$

Квадратный корень в (3.4) должен быть определен в комплексной плоскости $w = u + iv$ так, чтобы вещественная часть его была неотрицательна на мнимой оси. Это будет выполнено, если разрезать w по отрезку $(0, 2)$ и выбрать ту ветвь корня, которая больше нуля на интервале $(2, \infty)$. При этом (3.3) примет вид

$$\theta_0(x, 0) = -\frac{r}{1-r} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{wx} b(w) dw$$

Функция $b(w)$ не имеет особенностей в левой полуплоскости и стремится к нулю как w^{-1} при $w \rightarrow \infty$. По лемме Жордана [9] отсюда вытекает, что $\theta_0(x, 0) = 0$ при $x > 0$. Соотношение (2.4) является очевидным следствием этого факта.

Аналогично при отрицательных x интегрирование по мнимой оси можно заменить интегрированием по разрезу $(0, 2)$. В результате получим

$$\theta_0(x, 0) = E'(x), \quad E(x) = \frac{r^2}{\pi} \int_0^2 \frac{e^{ux} \sqrt{2-u}}{1-2r(1-r)u} \frac{du}{u^{1/2}}, \quad x < 0 \quad (3.5)$$

Укажем необходимые в дальнейшем свойства функции $E(x)$. Она и все ее производные монотонно возрастают. Характер их поведения на бесконечности определяется вкладом левой концевой точки в интеграл (3.5), так что

$$E \sim E_{-1} |x|^{-1/2}, \quad E_{-1} = r^2 \sqrt{2/\pi}, \quad x \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

и это представление можно дифференцировать любое число раз. Значения в нуле находятся прямым интегрированием (3.5)

$$E(0) = E_0 = \frac{r^2}{1-r}, \quad E'(0) = E_1 = \frac{r^2}{2(1-r)^2}, \quad \dots$$

Итак, на границе $y = 0$ имеем

$$\theta_0(x, 0) = -\frac{r}{1-r} \delta(x) + \begin{cases} 0, & x > 0 \\ E', & x < 0 \end{cases}$$

Отсюда и из (3.1) определяются последовательно граничные значения ζ_0 и мнимой части h_0 . По значениям осей мнимой части на границе функция $h_0(z)$ восстанавливается во всей полуплоскости интегралом Шварца

$$h_0 = -\frac{r}{\pi(1-r)z} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{r} E - E' \right) (x') \frac{dx'}{x' - z}$$

Последний раскладывается в ряд по степеням $z^{-1/2}$ в бесконечно удаленной точке. Главный член ряда при этом определяется характером затухания на бесконечности $E(x)$

$$h_0(z) = -E_{-1} r^{-1} z^{-1/2} + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Подобное соотношение для θ_0 получается из аналогичного интегралу Шварца представлению

$$\theta_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(x', 0) \frac{y e^{(x-x')}}{|z-x'|} K_1(|z-x'|) dx'$$

Главный член соответствующего разложения определяется величиной $E_0 - r/(1-r) = -r$ интеграла по границе от $\theta_0(x, 0)$. С учетом известной асимптотики на бесконечности модифицированной функции Бесселя K_1 найдем

$$\theta_0(z) \sim -\frac{r}{\sqrt{2\pi}} e^{-(|z|-x)} \frac{y}{|z|^{3/2}}, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

В силу (3.2) поведение (3.7), (3.8) функций θ_0, h_0 на бесконечности сохраняется и для θ, h . Необходимо лишь заменить в (3.7), (3.8) θ_0, h_0, z на $\theta/(2sq_c), h/(2sq_c), zs$ соответственно.

Что касается функции f , то из (2.5), (2.6) следует, что при $z \rightarrow \infty$ с точностью до членов порядка z^{-3} она представляется в виде

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\pi r} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\theta(x', 0)}{\sqrt{x'^2 - 1}} \frac{x' dx'}{x' - z}$$

а значит, убывает как z^{-1} при больших z . Учитывая то, что θ, h исчезают на бесконечности, можно показать, что коэффициент при соответствующем члене численно равен нагрузке, передаваемой катком на основание, т.е.

$$f \sim \frac{2q}{\pi z}, \quad q = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\theta(x, 0)}{\sqrt{x^2 - 1}} x dx \quad (3.9)$$

Основываясь на (3.7)–(3.9), можно уяснить характер изменения на бесконечности напряжений σ , давления p и связанного с ним фильтрационного потока $-\nabla p$.

Все полупространство разбивается на две области. Одна из них представляет собой примыкающий к границе позади площадки контакта пограничный слой разгрузки (заштрихован на фиг. 1). Толщина его изменяется как корень квадратный из расстояния до площадки контакта.

Вторая область – остальная часть полуплоскости. В ней h, θ много меньше f , и все определяется поведением (3.9) последней. Тензор $\sigma^0 = \sigma - p\delta^{ij}$ полных напряжений

оказывается таким же, как в известном решении Буссинеска [1] задачи о точечной нагрузке на упругое полупространство. Главными осями его являются оси полярной системы координат $\rho = |z|$, $\phi = \arg z$, причем

$$\sigma_{\rho\rho}^0 = -\frac{2q_s \sin \phi}{\pi\rho}, \quad \sigma_{\rho\phi}^0 = \sigma_{\phi\phi}^0 = 0$$

Для эффективных напряжений имеем

$$\sigma_{\rho\rho} = -\sigma_{\phi\phi} = -p = -\frac{q_s \sin \phi}{\pi\rho}$$

так что, в известном смысле, нагрузка на бесконечности поровну распределяется между жидкостью и пористой матрицей. Фильтрационный поток, определяемый градиентом давления, направлен от площадки контакта к свободной поверхности. Жидкость, двигаясь по семейству полуокружностей, выдавливается на поверхность перед катком ($x < 0$) и поступает в область разгрузки за ним ($x > 0$).

Еще одна часть жидкости приходит в область разгрузки с поверхности. Внутри этой области имеем в погранслойных координатах $\rho, \tilde{\phi} = \phi\sqrt{\rho s}$

$$p \approx \frac{\theta}{2r} \approx -\frac{q_c}{\sqrt{2\pi\rho}} \tilde{\phi} \exp\left(-\frac{\tilde{\phi}^2}{2}\right)$$

Из физических соображений ясно, что $q_c > 0$, и, таким образом, давление в области разгрузки отрицательно; оно убывает с ростом $\tilde{\phi}$ от нуля на поверхности до своего минимального значения $\sim -\rho^{-1}$ в центре области разгрузки при $\tilde{\phi} = 1$ и быстро стремится к нулю с дальнейшим ростом $\tilde{\phi}$. Жидкость движется от поверхности и из глубины полупространства к центру области разгрузки. При этом поток от поверхности, имеющий порядок $\rho^{-3/2}$, асимптотически больше потока $q_s/\pi\rho^2$ из глубины. Общая картина движения жидкости показана стрелками на фиг. 1.

Для напряжений в области разгрузки по-прежнему главными осями являются ρ и ϕ (или, что здесь одно и то же, x и y) и $\sigma_{\rho\rho} = (1 - 2r)p$, $\sigma_{\phi\phi} = p$.

4. Быстрое движение катка. Главный член асимптотического представления решения при $s \rightarrow \infty$

$$\theta \sim 0, \quad h \sim 0, \quad A \sim 0, \quad f \sim 2(z - \sqrt{z^2 - 1}) \quad (4.1)$$

характеризуется отсутствием объемной деформации θ пористой среды. Это понятно. При быстром движении катка жидкость не успевает фильтроваться, в силу чего пористое основание становится эффективно несжимаемым.

Согласно (4.1), (1.11) площадка контакта и напряжения на ней симметричны относительно центра катка, момент трения качения равен нулю, а вся нагрузка на контакте катка с пористым основанием воспринимается жидкостью

$$q \sim q_w \sim \pi/2, \quad q_c \sim m \sim 0$$

Для выяснения характера затухания $m(s)$, $A(s)$ при $s \rightarrow \infty$ необходимо найти следующие члены асимптотического разложения. Они таковы, что с точностью до малых более высокого порядка

$$\theta = s^{-1/2}\theta^0(x, ys^{1/2}), \quad h = s^{-1}h^0, \quad f = 2(z - \sqrt{z^2 - 1}) + s^{-1}f^0 \quad (4.2)$$

$$p_c = s^{-1/2}p_c^0(x), \quad A = s^{-1}A^0, \quad m = s^{-1}m^0$$

Обратим внимание на погранслойный характер изменения θ . В напряжения и деформации θ вносит малый вклад ($s^{-1/2}$ по сравнению с единицей). Соответствующий член значим лишь при определении фильтрационного потока вблизи площадки контакта и в области разгрузки. Здесь его вклад того же порядка ($O(1)$), что и у главного члена, построенного по (4.1), и он "исправляет" рассогласование последнего с граничным условием (1.6) по фильтрационному потоку. Не будем останавливаться здесь на определении θ^0 , ограничившись нахождением f^0 и h^0 . Этого будет достаточно для вычисления A^0 и m^0 .

Из (3.2) и (3.7) имеем

$$h^0(x) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{p_c^0(x') dx'}{\sqrt{z-x'}}$$

Отсюда следует, что вещественная и мнимая части h^0 равны нулю на отрезках $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ соответственно. На отрезке $(-1, 1)$ согласно (1.10) вещественная часть dh^0/dz постоянна и равна $-r$. Таким образом, для нахождения dh^0/dz получаем смешанную краевую задачу отыскания аналитической в верхней полуплоскости и исчезающей на бесконечности функции по граничным условиям

$$y=0: \operatorname{Re} \frac{dh^0}{dz} = -2r, \quad |x| < 1; \quad \operatorname{Re} \frac{dh^0}{dz} = 0, \quad x < -1; \quad \operatorname{Im} \frac{dh^0}{dz} = 0, \quad x > 1$$

Требование ограниченности h^0 делает эту задачу однозначно разрешимой. Ее решение имеет вид

$$\frac{dh^0}{dz} = \frac{r}{\pi i} \left(\ln \frac{\sqrt{z-1} - \sqrt{2i}}{\sqrt{z-1} + \sqrt{2i}} + \frac{2\sqrt{2i}}{\sqrt{z-1}} \right)$$

Здесь берутся вещественные на положительной полуоси ветви корня и логарифма.

Из граничных условий (1.9), (1.10) следует, что мнимая часть f^0 совпадает на $(1, \infty)$ и $(-\infty, -1)$ с мнимой частью dh^0/dz , а вещественная часть f^0 на $(-1, 1)$ равна $-2A^0$. Для разности $f^1 = f^0 - dh^0/dz$ имеем, таким образом,

$$y=0: \operatorname{Im} f^1 = 0, \quad |x| > 1; \quad \operatorname{Re} f^1 = 2(r - A^0), \quad |x| < 1$$

В силу непрерывности f^0 при $z = 1$, функция f^1 должна иметь в этой точке ту же особенность, что и $-dh^0/dz$. Кроме того, она должна быть непрерывной при $z = -1$ и исчезать на бесконечности. Указанные условия однозначно определяют A^0 и f^1 :

$$A^0 = r \frac{\pi - 2}{\pi}, \quad f^1 = \frac{2r}{\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \right)$$

после чего m^0 вычисляется интегрированием $\operatorname{Im} f^1$ по площадке контакта $(-1, 1)$.

В результате получаем $m^0 = \pi r/2$ и, окончательно,

$$q \approx \frac{\pi}{2}, \quad A \approx r \frac{\pi - 2}{\pi s}, \quad m \approx \frac{\pi r}{2s}, \quad s \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

В размерных переменных

$$a \approx \sqrt{\frac{QR}{\pi \mu}}, \quad M \approx \frac{2k\mu Q}{V}, \quad V \rightarrow \infty$$

Как и следовало ожидать, в окончательные формулы входит лишь модуль сдвига μ , но не λ .

На самом деле асимптотическое поведение решения сложнее, чем это представлено формулами (4.2). Вблизи концов отрезка $(-1, 1)$ функция θ имеет внутренние экспоненциальные пограничные слои. Их учет не влияет на искомые интегральные характеристики решения, изменяя характер поведения h^0, f^0 лишь в малой окрестности точки $z = -1$. Слабая логарифмическая особенность (вместо непрерывности) f^0 при $z = -1$ есть следствие указанного факта.

5. Медленное движение катка. Для покоящегося ($s = 0$) катка давление p тождественно равно нулю, и исходная задача (1.1)–(1.6) переходит в классическую контактную задачу [1] теории упругости. Ее решение в терминах функций θ, ζ, f имеет вид

$$\operatorname{Im} f = R, \quad \theta = rR, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = r \left(1 - y \frac{\partial}{\partial y} \right) R, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = ry \frac{\partial R}{\partial x}, \quad R = 2 \operatorname{Im}(z - \sqrt{z^2 - 1}) \quad (5.1)$$

Как и в случае быстрого движения катка, площадка контакта и напряжения на ней симметричны относительно центра катка, момент трения равен нулю. Однако нагрузка на контакте воспринимается не жидкостью, а пористой матрицей

$$p_s = p_c = \frac{1-r}{2} R(x, 0), \quad q = q_c = \frac{1-r}{2} \pi, \quad q_w = m = 0 \quad (5.2)$$

Интересно поведение момента трения $m(s)$ и асимметрии $A(s)$ площадки контакта при малых s . Проведем вычисление величины A . Для ее нахождения достаточно определить функцию $\theta(z)$ на интервале $(-\infty, -1)$. При малых s в силу (3.2) и первого соотношения в (5.2) имеем в главном члене

$$\theta(x, 0) = -s(1-r) \int_{-1}^1 R(x', 0) E'(s(x-x')) dx', \quad x < -1 \quad (5.3)$$

Воспользовавшись представлением (3.5) для E , преобразуем (5.3) к виду

$$\begin{aligned} \theta(x, 0) &= \frac{2sr^2(1-r)^2}{\pi} \int_0^2 e^{sux} f(u) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} e^{-sux'} dx' du \approx \\ &\approx sr^2(1-r)^2 \int_0^2 e^{sux} f(u) du; \quad f(u) = \frac{\sqrt{u(2-u)}}{1-2r(1-r)u} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Проведенная здесь замена экспоненты во внутреннем интеграле единицей при малых s допустима в силу ограниченности ux' .

Остается воспользоваться соотношением (2.5), определяющим величину A . Подставляя в него (5.4) и меняя порядок интегрирования, получим

$$A \approx \frac{sr(1-r)^2}{2\pi} \int_0^2 f(u) \int_{-\infty}^{-1} e^{sux} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} du$$

Внутренний интеграл подсчитывается явно ([10], с. 323); он равен $K_0(su)$ и, следовательно, при малых s совпадает с $-(\gamma + \ln(us/2))$, где γ – постоянная Эйлера. С учетом этого окончательное выражение для A запишем в виде

$$A \approx \frac{sr}{4(1-r)} \left(\ln \frac{1}{s} + A_1 \right), \quad s \rightarrow 0; \quad (5.5)$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} (1-r)^2 \int_0^2 f(u) \left(\ln \frac{2}{u} - \gamma \right) du$$

С изменением r от нуля до $1/2$ величина $A_1(r)$ убывает от $2\ln 2 - \gamma - 1/2$ до $2\ln 2 - \gamma - 1$. Промежуточные значения A_1 приведены ниже

r	0	0,1	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$A_1 \times 10^3$	309	238	156	111	61	7	-52	-118	-191

Аналогично ведет себя и момент трения m . Опуская вычисления, приведем для него лишь окончательный результат

$$m \approx \frac{\pi r s}{8} \left(\ln \frac{1}{s} + A_2 \right), \quad A_2 = A_1 + \frac{5}{4}, \quad s \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

6. Анализ результатов. Из результатов предыдущих разделов ясно, что при рассмотрении зависимостей q и m от безразмерной скорости s движения катка удобно перенормировать общую нагрузку и момент трения следующим образом:

$$\tilde{q} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2}{\pi} q \right), \quad \tilde{m} = \frac{3m}{r}$$

При этом асимптотический характер поведения $\tilde{q}(s)$ и $\tilde{m}(s)$ в нуле и на бесконечности не зависит от r . Более того, оказывается, что \tilde{q} , \tilde{m} для разных r близки друг к другу во всем диапазоне изменения s . Этот факт иллюстрируется фиг. 2, где представлены предельные при $r = 0$ (сплошные кривые) и $r = 0,5$ (штриховые кривые) зависимости \tilde{q} и \tilde{m} от s . При $0 < r < 0,5$ кривые занимают промежуточное положение.

Величина q входит в формулу (1.12), связывающую длину a площадки контакта с приложенной нагрузкой Q . Зависимость q от s указывает на то, что a определяется не только нагрузкой Q , но и скоростью V движения катка. Связь a с V однако слаба и во многих ситуациях ее допустимо игнорировать. Действительно, с ростом V от нуля до бесконечности q возрастает незначительно: от $(1-r)\pi/2$ до $\pi/2$. Приняв для него среднее значение, получим

$$a \approx \sqrt{\frac{QR}{\pi\mu(1-r/2)}} \quad (6.1)$$

Относительная погрешность при таком определении a во всех случаях не превосходит 22%, а при типичных значениях $r \sim 0,3-10\%$.

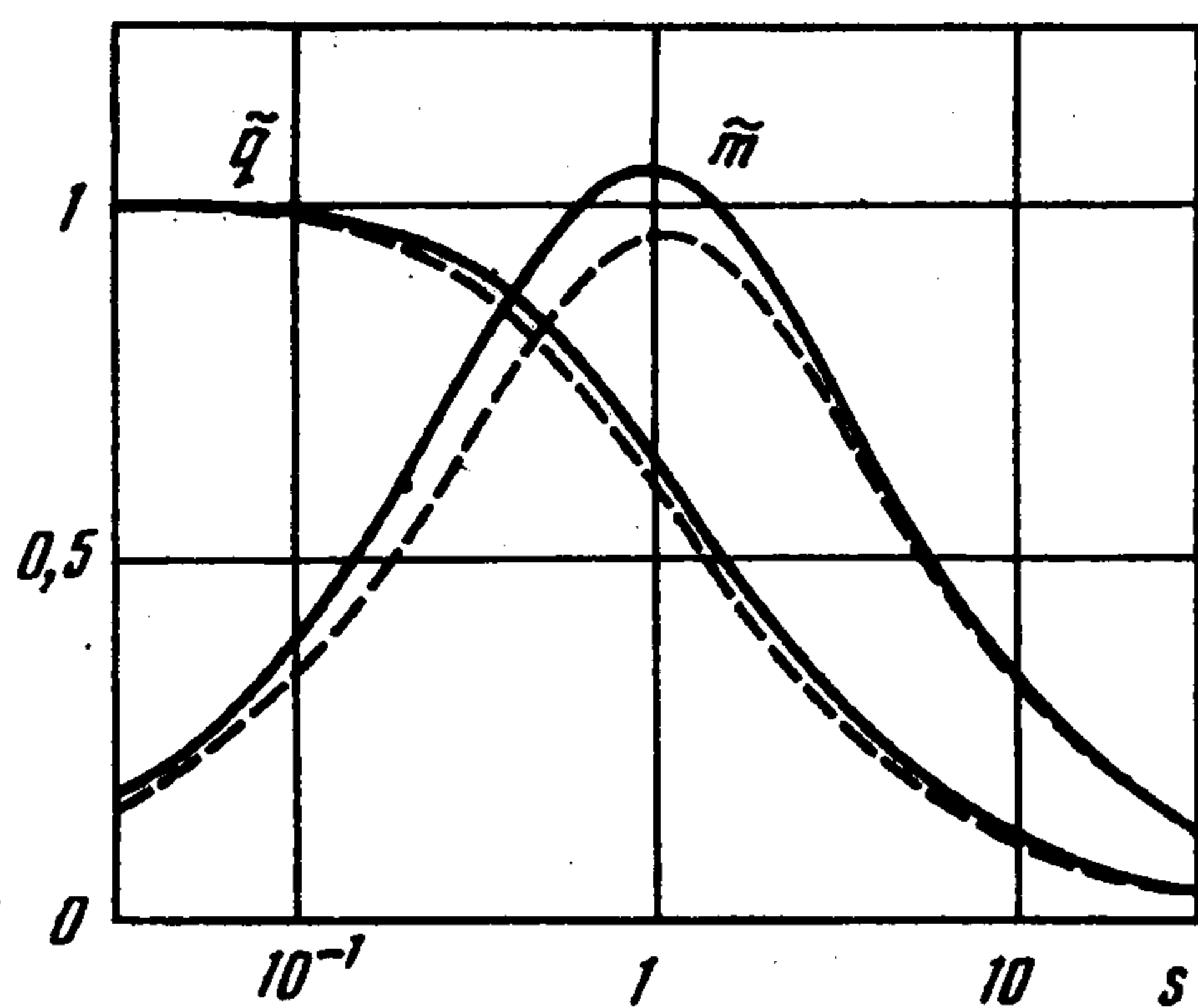
Зависимость $\tilde{m}(s)$ является, по-существу, зависимостью момента трения от скорости при фиксированных прочих параметрах. Из фиг. 2 видно, что она немонотонна. Имеется характерная скорость

$$V_* \approx 2k(\lambda + 2\mu) / a \quad (6.2)$$

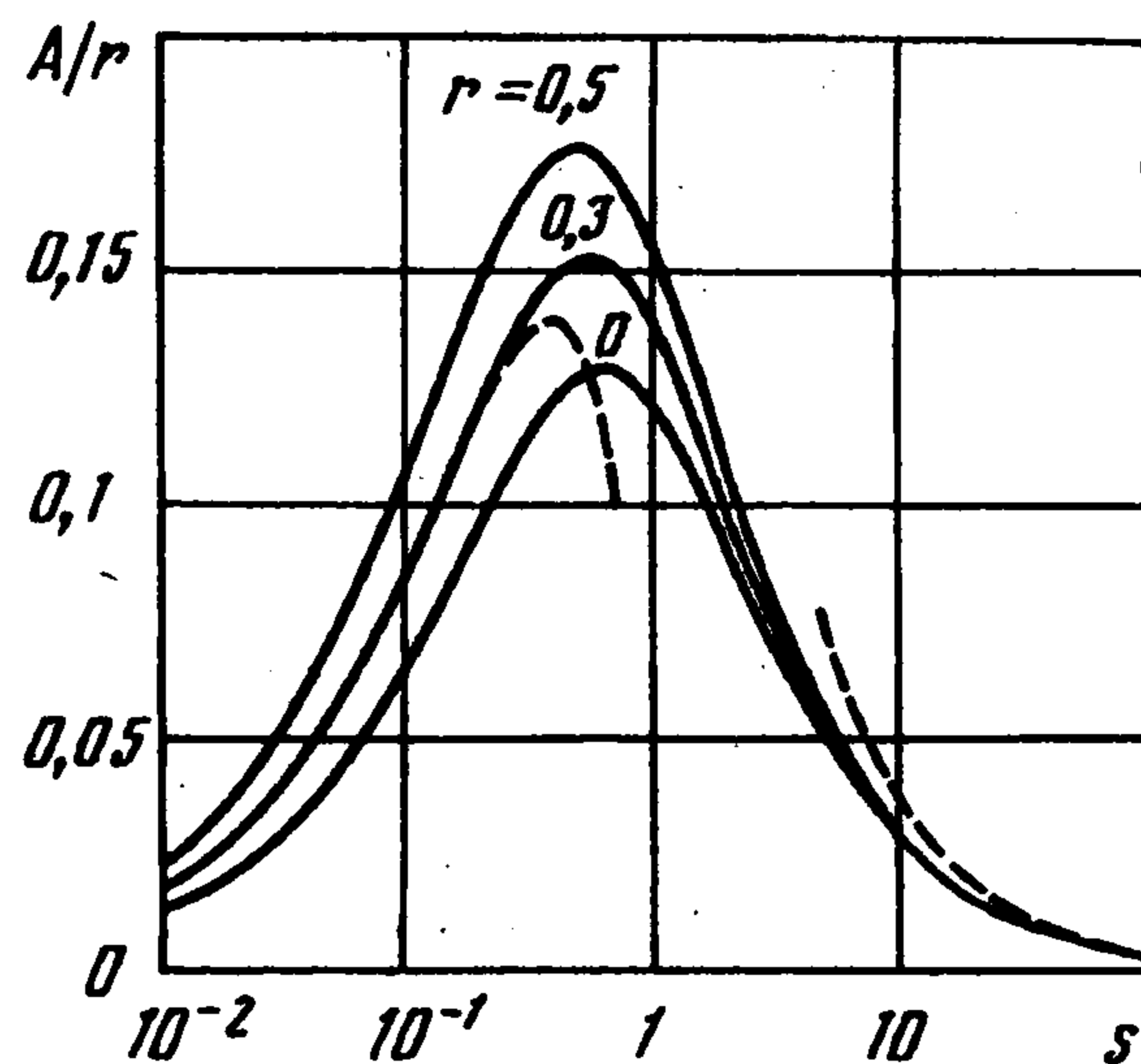
при которой трение качения максимально. С увеличением скорости до бесконечности или уменьшением ее до нуля трение исчезает. Такая ситуация является общей [1, 2, 4] для изучаемого механизма.

Аналогичным образом ведет себя с изменением скорости и асимметрия $A(s)$ площадки контакта. Это видно из фиг. 3, представляющей результаты расчета A/r в зависимости от s при разных r . Для $r = 0,3$ штрихами даны асимптотики, полученные в разд. 5, 6. Отметим, что даже максимально возможное значение, достигаемое $A(s; r)$ при $r = 0,5$, $s = 0,56$ весьма невелико и составляет лишь 0,088.

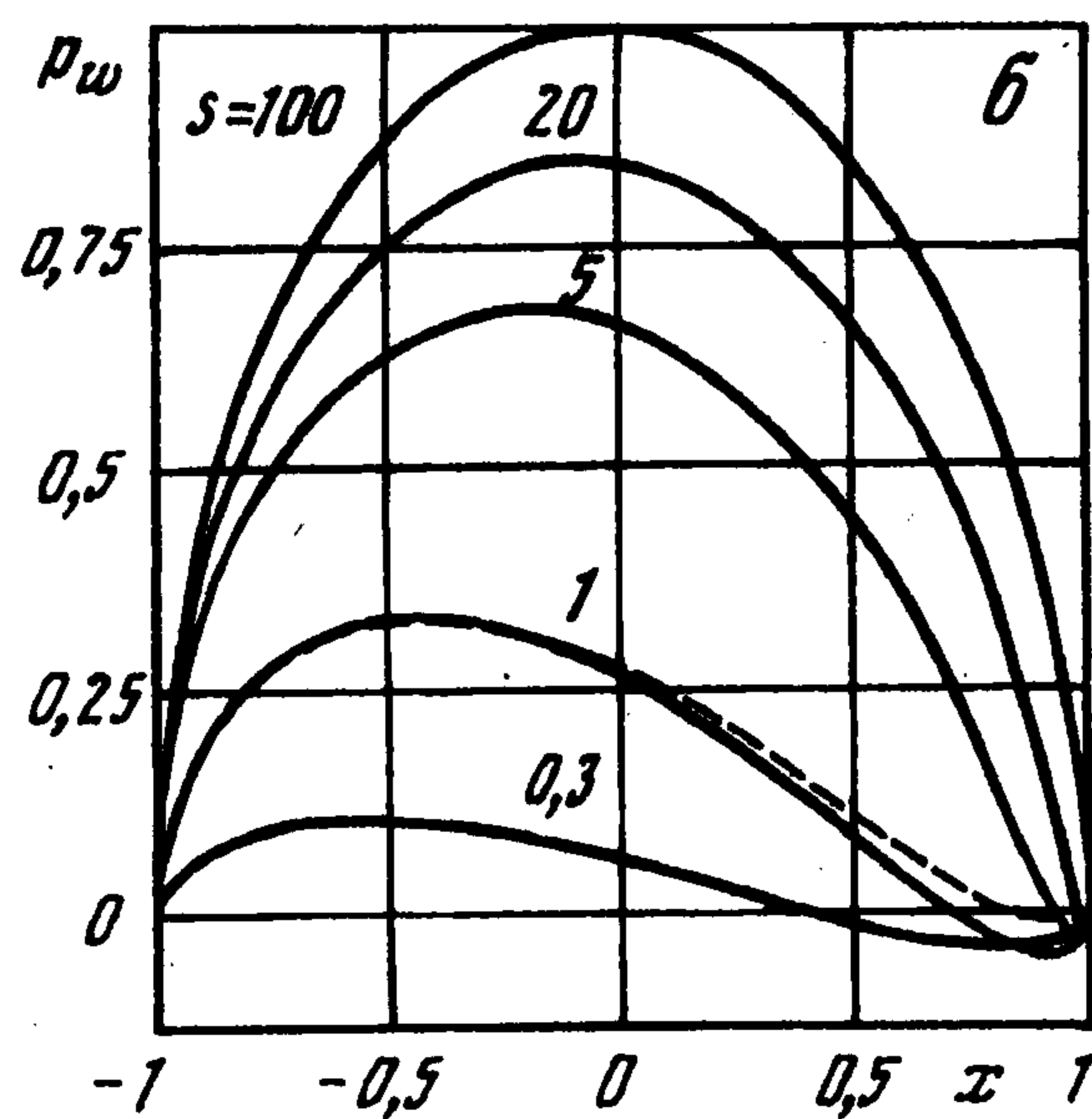
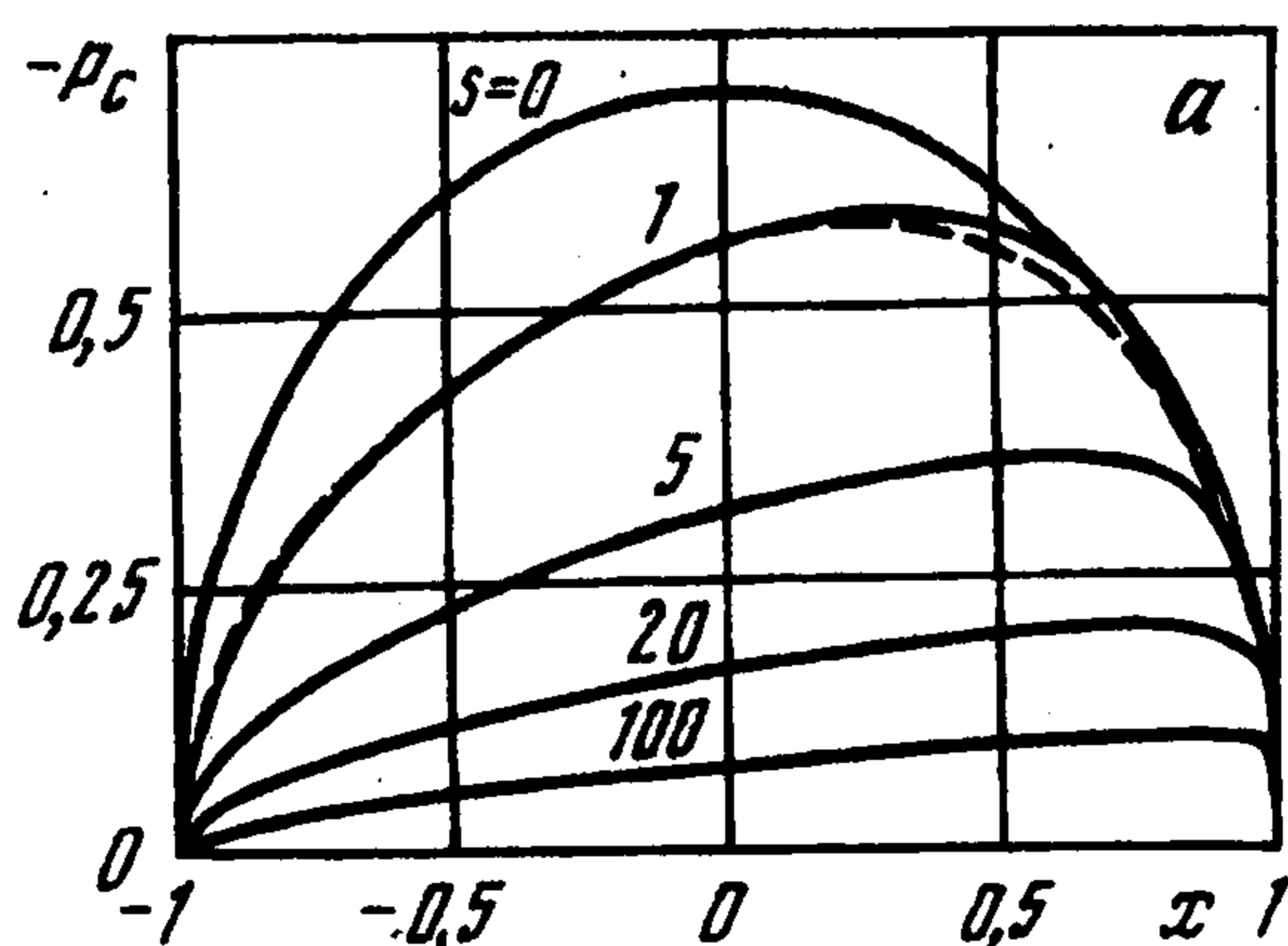
Сравним по величине, пренебрегая для простоты их взаимовлиянием, вязкий и рейнольдсовый механизмы трения. Рассмотрим безразмерный коэффициент трения качения $F = M/(arQ)$. При фиксированном r для вязкого механизма F зависит лишь от безразмерной скорости s движения катка, а для механизма Рейнольдса — от коэф-



Фиг. 2



Фиг. 3

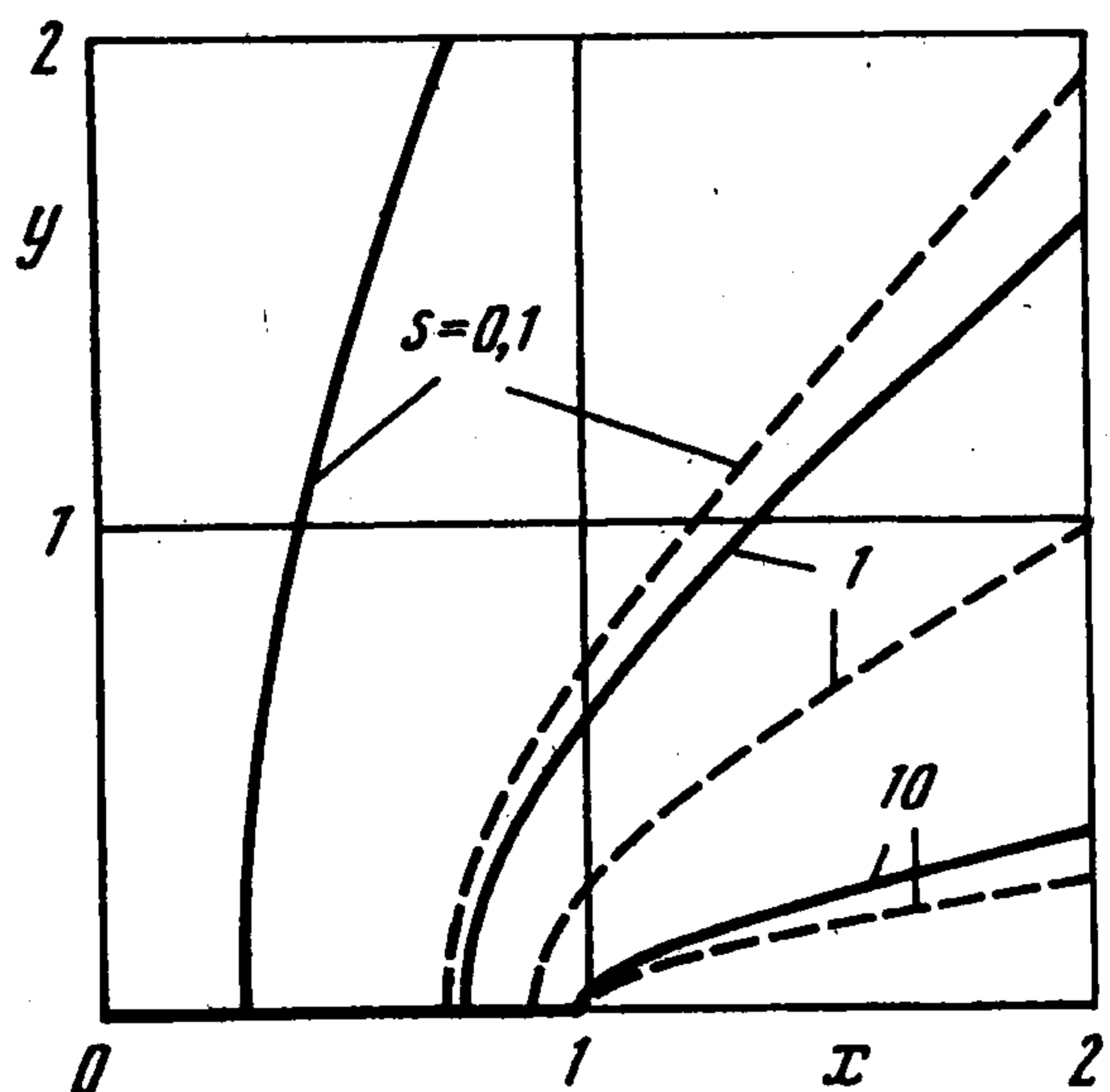


Фиг. 4

коэффициента трения скольжения [2]. Своих максимально возможных значений в обоих случаях F достигает при промежуточных значениях соответствующего параметра. Этот максимум составляет (фиг. 2) примерно 0,2 для вязкого механизма. Для механизма трения Рейнольдса он равен ([2], с. 286) $1,5 \cdot 10^{-3}$. Разница – в два порядка. Таким образом, для насыщенных пористых сред вязкий механизм трения в общем случае доминирует над механизмом трения Рейнольдса.

Из проведенного в разд. 4, 5 асимптотического анализа решения следует, что с увеличением безразмерной скорости s от нуля до бесконечности эффективные напряжения $p_c(x)$ на площадке контакта убывают по абсолютной величине от $(1-r)\sqrt{1-x^2}$ до нуля, а давление $p_w(x)$ жидкости растет от нуля до $\sqrt{1-x^2}$. Представление о характере изменения этих функций при промежуточных s дают сплошные линии на фиг. 4. Расчеты здесь проведены для $r = 0,3$, при разных значениях безразмерной скорости s .

Обращает на себя внимание наличие участка отрицательного давления в задней части площадки контакта. Оно согласуется с данной в разд. 3 картиной процесса в области разгрузки. Область отрицательных давлений, начинающаяся на площадке контакта, простирается вдоль свободной поверхности вплоть до бесконечности. Граница этой области изображена сплошными линиями на фиг. 5. Здесь также расчеты выполнены для $r = 0,3$, при разных значениях s . С ростом s граница приближается к свободной поверхности. Одновременно участок отрицательного давления на площадке контакта стягивается к его концу.



Фиг. 5

Наличие области отрицательных давлений представляется интересной (но вовсе не редкой в теории фильтрационной консолидации [3]) особенностью рассматриваемой задачи. Напомним, что давление отсчитывается от атмосферного давления. В теории фильтрации принято связывать дополнительное к атмосферному снижение давления в областях, примыкающих к свободной поверхности, с двухфазным характером (вода плюс воздух) заполнения их порового пространства [11, 12]. Используемая в настоящей работе классическая модель фильтрационной консолидации этого не учитывает. Для адекватного описания процессов в области разгрузки ее необходимо соответствующим образом уточнить.

7. Уточнение модели. Было указано [3] возможное обобщение рассматриваемой модели, учитывающее отмеченное выше обстоятельство. В соответствии с ним представим уравнение баланса массы жидкости (1.3) в виде, пригодном, как в области полного, так и частичного насыщения

$$V \left(S \frac{\partial \theta}{\partial x} + m \frac{\partial S}{\partial x} \right) - k \nabla \cdot \kappa \nabla p = 0 \quad (7.1)$$

Здесь S – водонасыщенность, m – пористость, $\kappa(p)$ – фазовая проницаемость по жидкости недонасыщенной пористой среды. В области полного насыщения $S = 1$, $\kappa = 1$, и (7.1) переходит в (1.3). Для крупнозернистой среды либо при больших внешних нагрузках можно принять предельные зависимости S и κ от p

$$\kappa = S \in H(p) \quad (7.2)$$

где H – функция Хевисайда, а знак включения означает принадлежность S графику соответствующей многозначной функции. В то же время указанные предположения позволяют пренебречь влиянием капиллярного давления на эффективные напряжения, сохранив тем самым уравнения (1.1), (1.2) без изменения.

Таким образом, (1.1)–(1.3) переходят в (1.1), (1.2), (7.1), (7.2). Дифференциальное включение (7.1), (7.2) выделяет две пространственные подобласти. В одной из них (область фильтрации) $p > 0$, $S = 1$, и исходная модель (1.1)–(1.3) остается в силе. В другой (двухфазная область) $0 < S < 1$, $p = 0$, и вместо (1.3) имеем соотношение

$$\partial / \partial x (\theta + m \ln S) = 0 \quad (7.3)$$

определяющее насыщенность в ней.

Условия сопряжения на границе γ между этими областями сводятся к требованию непрерывности давления и нормального потока жидкости

$$\gamma: p = 0, \quad Vm(S_- - 1)n_x + k \partial p_+ / \partial n = 0 \quad (7.4)$$

Здесь n – нормаль к γ , направленная в сторону области фильтрации, индексы плюс и минус отмечают области фильтрации и двухфазности.

В рассматриваемой здесь ситуации условие (7.4) допускает дополнительное упрощение. Это связано с тем, что граница $\gamma: x = x_0(y)$ отвечает монотонно возрастающей функции x_0 , так что $n_x < 0$ в (7.4). Но в силу положительности p в области фильтрации и первого из условий сопряжения (7.4) величина $\partial p_+ / \partial x$ в (7.4) неотрицательна. А это возможно лишь когда на γ одновременно $\partial p_+ / \partial x = 0$ и $S_- = 1$. Первое из этих условий приводит к тому, что задачу для определения p и γ можно поставить независимо от

нахождения S как классическое вариационное неравенство (см, например, [13])

$$V \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta p, \quad p \geq 0 \quad (7.5)$$

После решения соответствующей задачи второе условие совместное с (7.3) определяет насыщенность в двухфазной области

$$x > x_0(y): \quad m \ln S = \theta(x, y) - \theta(x_0, y) \quad (7.6)$$

Заметим, что в силу малости θ величина S близка к единице, и в (7.6) допустимо заменить $\ln S$ на $(S - 1)$.

Обсудим кратко основные моменты численного решения задачи (1.1), (1.2), (7.5). Оно проводится сеточными методами. Предварительно область $\text{Im } z > 0$ отображается на единичный полукруг, в котором осуществляется переход к полярным координатам $0 < \rho < 1, 0 < \varphi < \pi$:

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad z = -(w + w^{-1})/2$$

Для них исходная задача в терминах функций $f_i = \text{Im } f, \theta, \zeta$, принимает вид

$$-\Delta f_i = 0 \quad (7.7)$$

$$-\Delta \theta + sL\theta = 0, \quad \theta \geq r f_i, \quad (7.8)$$

$$-\Delta \zeta + L\theta = 0 \quad (7.9)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L = \frac{1-\rho^2}{\rho^2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1+\rho^2}{\rho^3} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\rho = 1: \quad \frac{\partial f_i}{\partial \rho} = -2 \sin \varphi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = r \frac{\partial f_i}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0 \quad (7.10)$$

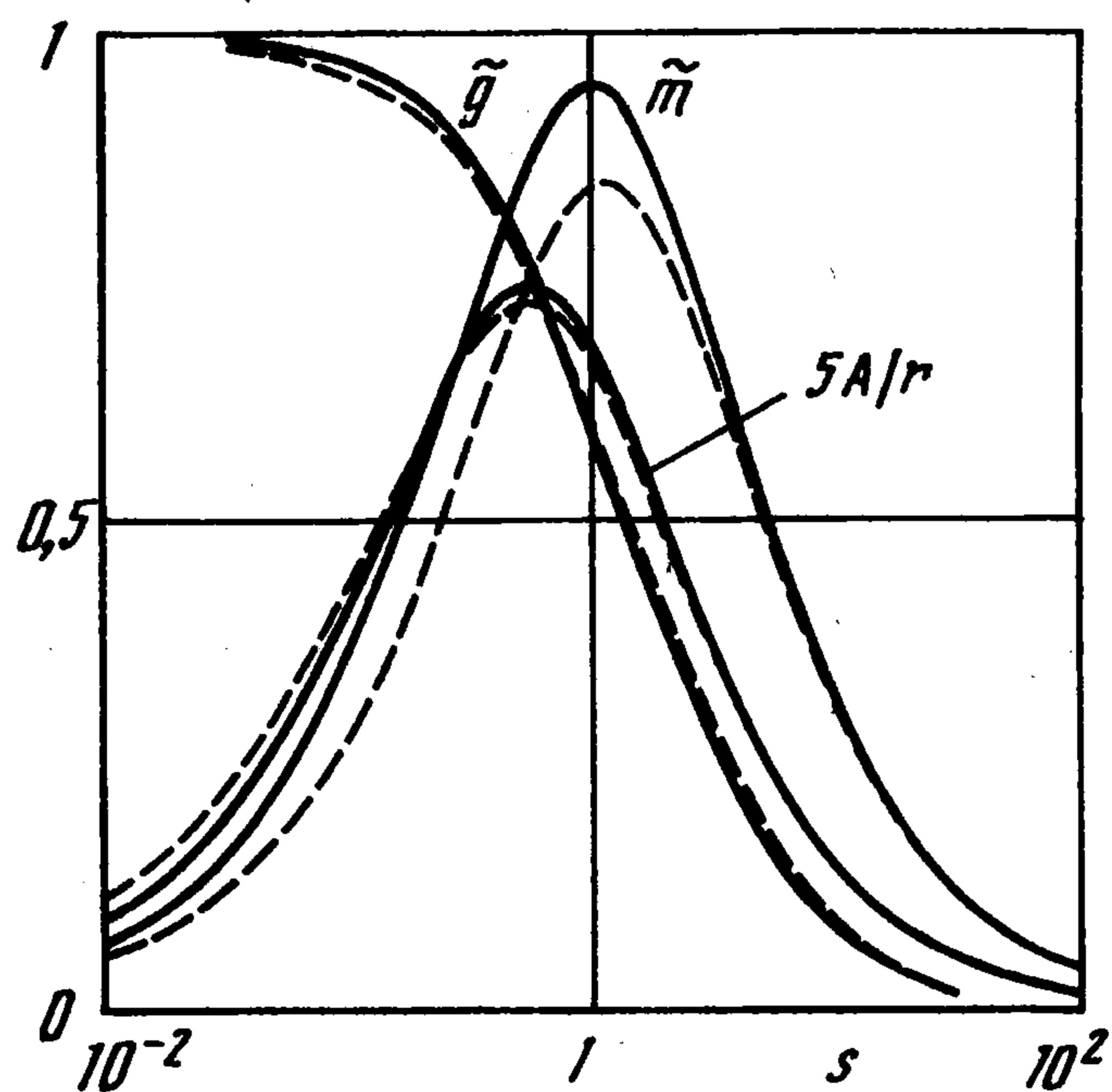
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}: \quad f_i = \pm \frac{2r\rho^2}{1-\rho^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}, \quad \theta = r f_i, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.11)$$

Обратим внимание на то, что здесь не фигурирует величина A . Она входит лишь в определение $\text{Re } f$ и может быть найдена после решения (7.7)–(7.11), например, по формуле (2.5).

Решение (7.7)–(7.11) проводится итерационно. На каждом итерационном шаге вычисления выполняются в следующем порядке. Вначале, исходя из известного с предыдущей итерации значения ζ на границе, решается задача определения f_i из уравнения (7.7) с первой парой граничных условий в (7.10), (7.11). После этого θ находится из уравнения (7.8) со вторыми граничными условиями в (7.10), (7.11). Наконец, значение ζ уточняется из решения уравнения (7.9) с последней парой граничных условий (7.10), (7.11).

Для аппроксимации первого граничного условия в (7.11) и конвективных членов в (7.9) используются центральные разности, конвективные члены в (7.8) аппроксимируются разностями против потока, а оператор Лапласа – всюду стандартным образом [14]. При этом сетка выбирается равномерной – по φ во всех случаях, а по ρ – при умеренных и больших s . При малых s в начале координат имеет место пограничный слой, в силу чего возникает необходимость соответствующего сгущения сетки по ρ , и координаты ее узлов изменяются по квадратичному закону.

Выбор равномерной по φ сетки позволяет использовать для определения f_i и ζ быстрые методы разложения в однократный ряд, основанные на дискретном преобразовании Фурье [14]. Значения θ находятся поточечным методом верхней релаксации с одновременным



Фиг. 6

ди катка в координатах ρ , φ отвечает отрезок $\varphi = \pi$. Указанное условие в рассматриваемом диапазоне значений параметров выполнялось с погрешностью, не превышающей 10^{-3} .

Результаты расчетов подтверждают тот вполне ожидаемый факт, что учет двухфазности не приводит к существенному изменению силовых характеристик рассматриваемого процесса. Для иллюстрации этого на фиг. 4 штриховыми линиями приведены распределения эффективных нормальных напряжений и давления жидкости на площадке контакта, рассчитанные по уточненной модели при $r = 0,3$ и $s = 1$. Они весьма близки к соответствующим сплошным кривым классической модели. Это сохраняется и при других рассмотренных значениях параметров. Соответственно невелики отличия двух моделей и в интегральных характеристиках. Это иллюстрирует фиг. 6, на которой при $r = 0,3$ сплошные линии построены по классической, штриховые – по уточненной модели.

Рассмотрим подробнее положение двухфазной области (штриховые линии на фиг. 5). Она всегда лежит внутри области отрицательных давлений соответствующей классической задачи, и так же с ростом s стягивается к свободной поверхности позади площадки контакта, вырождаясь в пределе в отрезок $(1, \infty)$ действительной оси. В другой предельной ситуации, $s \rightarrow 0$, положение границы двухфазной области можно установить из следующих соображений.

Для случая $s = 0$ так же, как в классической постановке, $f_i = -2\rho \sin \varphi$. Учитывая связи f_i , θ с ρ и уравнения (7.7), (7.8), заключаем, что задача для давления с точностью до малых более высокого порядка принимает вид

$$-\Delta p - s \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} = 0, \quad \rho \geq 0$$

$$\rho = 1: \frac{\partial p}{\partial \rho} = 0; \quad \varphi = 0, \quad \pi: p = 0$$

Решение p этой задачи не зависит от ρ

$$p = \frac{s}{4} \begin{cases} \sin 2\varphi - (\varphi / \varphi_*) \sin 2\varphi_*, & 0 < \varphi < \varphi_* \\ 0, & \varphi_* < \varphi < \pi \end{cases} \quad (7.12)$$

Здесь $\varphi_* = 2,2467$ определяется как корень уравнения $2\varphi_* = \operatorname{tg} 2\varphi_*$. Таким образом,

проектированием их на допустимое множество. При этом нет необходимости определять θ точно на каждом итерационном шаге. Более разумной стратегией оказывается проведение на шаге фиксированного числа итераций метода верхней релаксации.

Типичные расчеты выполнялись на сетке 64×64 . На каждом шаге делалось 100 итераций метода верхней релаксации. Общее число шагов во всех случаях не превышало 20.

Тестирование результатов проводилось на классической модели – в этом случае, очевидно, необходимо лишь исключить шаг проектирования в задаче определения θ . Дополнительной возможностью контроля за точностью численного решения является проверка выполнения равенств (2.4). Из физических соображений ясно, что они должны выполняться и для уточненной модели. Нужно лишь учесть, что свободной поверхности позади

граница γ в плоскости w является прямой $\varphi = \varphi_*$, что в плоскости z соответствует гиперболе

$$x^2 \sin^2 \varphi_* - y^2 \cos^2 \varphi_* = \sin^2 \varphi_* \cos^2 \varphi_*$$

В частности, при $s \rightarrow 0$ начало двухфазной области на площадке контакта отвечает точке с координатой $x_* = -\cos \varphi_* = 0,626$. Оно значительно смещено к выходу по сравнению с классической моделью, где соответствующая точка $x_* = 0$ отвечала середине площадки контакта.

Следует обратить внимание на то, что решение не является равномерно пригодным по z . Оно несправедливо в окрестности бесконечно удаленной точки, наличие пограничного слоя в которой связано с присутствием в задаче малой конвекции. Характер поведения γ при больших z и любых скоростях s можно найти, заметив, что асимптотическая зависимость (3.9) сохраняется и для уточненной модели, вследствие чего условия сопряжения на γ при $z \rightarrow \infty$ принимают вид

$$x = x_0(y): \theta \approx -\frac{qry}{\pi|z|^2} \approx -\frac{qry}{\pi x^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} \approx -\frac{qr(x^2 - y^2)}{\pi|z|^4} \approx -\frac{qr}{\pi x^2} \quad (7.13)$$

Здесь дополнительно учтено, что $x_0 \gg y$. Уравнение для θ в области фильтрации при больших $|z|$ переходит в параболическое уравнение пограничного слоя.

$$x < x_0(y): 2s \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Начало пограничного слоя допустимо отнести к точке $x = 0$, приняв $x_0(0) = 0$, $\theta(0, y) = 0$.

Получающаяся таким образом задача для θ автомодельна. Ее решение отыскивается в виде

$$\theta = \frac{qr}{\pi\sqrt{s}} x^{-3/2} \theta_0(\xi), \quad \xi = \frac{y\sqrt{s}}{\sqrt{x}}$$

При этом границе γ отвечает точка $\xi = \xi_0$. Для нахождения ξ_0 и $\theta_0(\xi)$ имеем

$$\xi > \xi_0: \theta_0'' + \xi \theta_0' + 3\theta_0 = 0 \quad (7.14)$$

$$\xi = \xi_0: \theta_0 = -\xi_0, \quad \theta_0' = -1, \quad \xi \rightarrow \infty: \theta_0 = 0 \quad (7.15)$$

Общее решение уравнения (7.14) при учете последнего условия в (7.15) запишем в виде

$$\theta_0 = C(\xi^2 - 1) \exp(-\xi^2/2)$$

Фигурирующая здесь произвольная постоянная C и величина ξ_0 определяются первыми двумя граничными условиями (7.15). Для ξ_0 , в частности, получаем $\xi_0 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, так что при $z \rightarrow \infty$ граница γ представляет собой параболу

$$x_0(y) = \frac{s}{1 + \sqrt{2}} y^2$$

Автор благодарит А.В. Костерина, инициировавшего данную работу, за постоянное внимание к ней и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00155, 98-01-00200).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
3. Костерин А.В., Березинский Д.А. Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 343–345.
4. Ишлинский А.Ю. Трение качения // ПММ. 1939. Т. 2. Вып. 2. С. 245–260.
5. Reynolds O. On rolling friction // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1877. V. 166. Pt. 1. P. 155–174.
6. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
7. Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В. Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. 102 с.
8. Signorini A. Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa // Ann. Mat. pura ed Appl. 1916. Ser. 3. T. 25. P. 253–274.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
11. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Отв. ред. П.Я. Кочина. М.: Наука, 1969. 545 с.
12. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
13. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.

Казань

Поступила в редакцию
26.VIII.1998