

УДК 532.546

© 1999 г. Ю.И. Капранов

О ФИЛЬТРАЦИИ ВЗВЕСИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

Исследуются изменения проводящих свойств пористой среды при движении сквозь нее жидкости со взвешенными твердыми частицами. Представлена модельная система уравнений, найден класс точных решений, для начальных и граничных данных общего вида построены решения начальной и начально-краевой задач. На примере проникания взвеси в чистый однородный образец проводится сравнение с экспериментом. Показывается, что рассматриваемая модель качественно верно описывает поведение в процессе коагуляции основных параметров пористой среды и потока взвеси.

Явление захвата пористой средой взвешенных в потоке жидкости частиц (коагуляция) необходимо учитывать при решении многих практически важных задач. К ним относятся вопросы очистки жидкостей от примесей путем фильтрования, исследование процесса отложения глинистых частиц из фильтрата бурового раствора на поверхности скважины и в прискважинной зоне пласта при бурении газовых и нефтяных скважин и ряд других проблем [1–3]. Изучение подобных явлений базируется, как правило, на различного рода приближенных соотношениях.

Представленная ниже модель основана на точных балансовых соотношениях, обобщает имеющиеся подходы к исследованию рассматриваемой проблемы, учитывает влияние скорости фильтрации на кинетику коагуляции и наличие в пористой среде тупиковых пор. Выводу системы дифференциальных уравнений для изменений пористости среды и концентрации твердой фазы взвеси посвящен разд. 1. В разд. 2 описаны решения простого вида, которые при определенном выборе входящих в них параметров оказываются асимптотическими решениями начально-краевой задачи. Точные решения начальной и начально-краевой задач при начальных и граничных данных общего вида строятся в разд. 3 и 4 соответственно. Подобные решения были известны для приближенных или линеаризованных уравнений. Сравнению принятой модели с экспериментом посвящен разд. 5.

1. Описание модели. Пусть c – объемная концентрация частиц в потоке взвеси, v – скорость фильтрации, m – пористость среды, являющиеся искомыми функциями точки x и времени t . Скорости взвешенных частиц и несущей их жидкости считаем совпадающими, а сами частицы, жидкость и скелет пористой среды в его начальном состоянии – несжимаемыми.

С течением времени взвешенные частицы могут оставаться в потоке или задерживаться пористой средой, перекрывая входы пор. При этом, если пора имеет несколько входов-выходов, она остается доступной для потока. В противном случае она присоединяется к скелету пористой среды, отделяя от потока саму частицу и соответствующий объем жидкости. Вновь образовавшийся таким образом скелет пористой среды остается несжимаемым. Вклад подобных пор (тупиковых) характеризует параметр κ : захват каждой единицы объема частиц приводит к образованию $1 + \kappa$ объемов скелета пористой среды. Величина этого параметра пропорциональна объемной доле (в единице объема порового пространства) тупиковых пор.

При сформулированных условиях баланс объема твердой фазы (во взвеси и за-

держанной пористой средой) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[mc + \frac{1}{1+\kappa} (m_0 - m) \right] dx = - \int_{\partial\Omega} cv \cdot nds$$

где Ω – произвольно фиксированная область пространства, $\partial\Omega$ – ее граница с внешней нормалью n , m_0 – заданное начальное распределение пористости.

Баланс объема жидкости (в потоке и отсеченной от него в процессе кольтматации) требует выполнения равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[m(1-c) + \frac{\kappa}{1+\kappa} (m_0 - m) \right] dx = - \int_{\partial\Omega} (1-c)v \cdot nds$$

В области гладкого изменения искомых функций указанные интегральные соотношения эквивалентны системе дифференциальных уравнений

$$\partial(mc) / \partial t + \operatorname{div} vc = (1+\kappa)^{-1} \partial m / \partial t \quad (1.1)$$

$$\partial(m(1-c)) / \partial t + \operatorname{div} v(1-c) = \kappa(1+\kappa)^{-1} \partial m / \partial t \quad (1.2)$$

Следствием этих уравнений является уравнение баланса объема взвеси

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (1.3)$$

Аналоги системы (1.1), (1.2), в той или иной степени приближения, имеются лишь для случая $\kappa = 0$. Применялись [1] уравнения, отличающиеся от (1.1), (1.2) отсутствием в левых частях слагаемых с частной производной по времени, причем уравнение (1.3) считалось выполненным. Соответствующее (1.1) уравнение записывалось [4, 5] в недивергентном виде, но если использовать уравнение (1.3), возникнет уравнение вида (1.1) с отрицательным значением $\kappa = (m/m_0 + 1)^{-1} - 1$. В условиях несжимаемости принятое в [6, 7] уравнение баланса твердой фазы совпадает с (1.1), но уравнение (1.3) содержит дополнительное слагаемое $\partial m / \partial t$. Уравнение (1.1), записанное в иных терминах, было представлено [8] для случая $\kappa = 0$.

Уравнение кинетики кольтматации, связывающее скорость изменения пористости с параметрами потока, часто берется в виде [1, 6, 7]

$$\partial m / \partial t = -\gamma mc$$

где γ – некоторая постоянная. Недостаток этой схемы в том, что задержка частиц имеет место всегда, когда m и c отличны от нуля. Использовалась также кинетика более общего вида [8]

$$\partial P / \partial t = \alpha(A - P)c$$

где P – объемная (в единице объема пространства) доля захваченных пористой средой частиц, A – ее максимально возможное значение, α – постоянная. Последняя, в действительности, зависит от скорости фильтрации, так как на интенсивность кольтматации влияет не само значение концентрации, а величина всего потока частиц $|vc|$.

Примем линейную зависимость α от модуля скорости фильтрации и учитывая, что на самом деле $P = m_0 - m$, запишем уравнение кинетики кольтматации в виде

$$\partial m / \partial t = -(1+\kappa)\beta v c(m - m_*), \quad v = |v| \quad (1.4)$$

Постоянная β , размерности L^{-1} , пропорциональна отнесенному к пройденному пути числу захватов частицы взвеси пористой средой. Минимально возможное в процессе кольтматации значение пористости m_* обязано наличию связной системы пор, диаметр которых превышает размер взвешенных частиц. И β , и m_* зависят от фракционного состава взвеси и структуры порового пространства, но систематические исследования в этом направлении отсутствуют.

Течение взвеси считаем подчиняющимся закону Дарси [1, 6–8]

$$v = -(k/\mu) \nabla p \quad (1.5)$$

с вязкостью взвеси μ , давлением в ней p и проницаемостью пористой среды k , связанной с пористостью m степенной зависимостью

$$k = k_0(m/m_0)^n \quad (1.6)$$

Здесь k_0 и m_0 – начальные значения k и m соответственно, а показатель n заключен в диапазоне $2 < n < 4$ [9].

В целях сравнения выводов представленной модели с результатами экспериментов далее будет рассматриваться частный случай системы (1.1)–(1.6). А именно, примем, что $\kappa = 0$, $\mu = \text{const}$, течение – одномерное и ось x направлена по потоку. В силу соотношения (1.3) скорость фильтрации в этом случае зависит только от времени. Полагаем также, что $v = \text{const}$, и уравнения (1.5), (1.6) используем для восстановления зависимости давления от x и t . Отметим, что большинство приводимых далее рассуждений остаются в силе при заданной зависимости $v(t)$, или $\kappa > 0$.

Таким образом, ниже речь будет идти о системе уравнений

$$m \partial c / \partial t + v \partial c / \partial x = -\beta v c (1 - c) (m - m_*) \quad (1.7)$$

$$\partial m / \partial t = -\beta v c (m - m_*)$$

2. Частные решения. Ищем решения системы (1.7) вида

$$m = m(\xi), \quad c = c(\xi), \quad \xi = x - \sigma t \quad (2.1)$$

где σ – искомая постоянная. Подобные решения, во-первых, достаточно просты, и если входящие в них параметры m^* и c_* подобрать нужным образом, они становятся, как будет показано в разд. 5, асимптотическими решениями начально-краевой задачи. Во-вторых, соответствующие им режимы в значительной степени характеризуют внутренние свойства самой модели, описывая состояния, в которых устанавливается определенное равновесие между поступлением частиц с потоком взвеси и захватом их пористой средой.

Как следует из (1.7) и (2.1), функции $m(\xi)$ и $c(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений

$$-\sigma m c' + v c' = -\beta v c (1 - c) (m - m_*), \quad \sigma m' = \beta v c (m - m_*) \quad (2.2)$$

Из нее вытекает, что $\sigma m (1 - c) + v c \equiv \sigma m^*$ (правая часть этого тождества соответствует выполнению при $\xi \rightarrow +\infty$ условий $c \rightarrow 0$, $m \rightarrow m^*$, $0 < m^* < 1$). Таким образом, концентрация c выражается через m и σ в виде

$$c = (m^* - m)(v/\sigma - m)^{-1}$$

Для общего случая $c(-\infty) \neq 0$ требование "выполнения" решения системы (2.2) при $\xi \rightarrow -\infty$ означает, что при этом $c \rightarrow c_*$ и $m \rightarrow m_*$, при некотором значении c_* , $0 < c_* < 1$. Поэтому скорость σ распространения такой волны обязана определяться имеющим достаточно простой физический смысл выражением

$$\sigma = (v c_*) / (m^* - m_* + m_* c_*) \quad (2.3)$$

Из системы (2.2) и полученного ранее представления концентрации через пористость и скорость волны следует, что

$$(v/\sigma - m)(m - m_*)^{-1} (m^* - m)^{-1} m' = \beta v / \sigma$$

Решая это уравнение и используя равенство (2.3), находим

$$\frac{m - m_*}{m_1 - m_*} \left(\frac{m_* - m}{m_* - m_1} \right)^{c_* - 1} = \exp[\beta c_* (\xi - \xi_1) v / \sigma]$$

где m_1 – значение пористости при некотором $\xi = \xi_1$.

Введем теперь вместо $m(\xi)$ функцию $s(\xi)$ по правилу

$$s = (m - m_*) / (m^* - m_*) \quad (2.4)$$

Полагая затем $\xi_1 = 0$ и подбирая соответствующим образом значение $s_1 = s(m_1)$, получим для $s(\xi)$ уравнение

$$s(1-s)^{c_*-1} = d(\xi) \equiv \exp(\beta c_* \xi v / \sigma), \quad 0 < s < 1 \quad (2.5)$$

При этом

$$c = c_*(1-s)(1-c_*s)^{-1} \quad (2.6)$$

Решение (2.4)–(2.6) обладает одним характерным свойством. А именно, из (2.4), (2.2) и (2.6) следует, что

$$s' = \beta v \sigma^{-1} c_* s (1-s)(1-c_*s)^{-1}$$

$$c'' = \beta v \sigma^{-1} c_*^2 (1-c_*) (c_* s^2 + 2(1-c_*)s - 1)(1-c_*s)^{-4} s'$$

Поэтому функция $c(\xi)$ монотонно убывает, ее график при $\xi < \xi_c$ будет выпуклым вверх, а при $\xi_c < \xi$ – вниз, если величина ξ_c такова, что

$$s(\xi_c) = \left(1 - c_* + \sqrt{(1-c_*)^2 + c_*} \right)^{-1}.$$

Указанная особенность характерна и для большинства экспериментальных кривых распределения концентрации в образце.

3. Задача Коши. Исследование начально-краевой задачи, соответствующей условиям эксперимента, требует предварительного рассмотрения задачи Коши – восстановления по начальным данным

$$m(x, 0) = m_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x) \quad (3.1)$$

решения системы (1.7) в полуплоскости $\{0 < t, -\infty < x < +\infty\}$. Для построения решения последней используем метод характеристик.

Пусть $s = \xi(t, x_0)$ – характеристика первого уравнения системы (1.7), выпущенная из точки $(x_0, 0)$ и проходящая в точку (x, t) . Она определяется как решение дифференциального уравнения $dx/dt = v/m$ с условием $\xi(0, x_0) = x_0$ и искомыми значениями пористости $m(x, x_0)$ на этой кривой. Последние могут быть найдены из следующих соображений.

Если на указанной кривой $dm/dt \equiv g(t, x_0)$, то, во-первых, $g = \partial m / \partial t + v m^{-1} \partial m / \partial x$. Далее, интегрирование второго уравнения системы (1.7) по t при фиксированном значении $x = \xi(t, x_0)$ показывает, что

$$m(x, t) = m_* + (m_0(x_0) - m_*) \exp\left(-\beta v \int_0^t c d\tau\right)$$

Поэтому в силу уравнения (1.1)

$$g = [m'_0 / (m_0 - m_*) + \beta m_0 (1 - c_0) - \beta m] v (m - m_*) / m$$

Заменим теперь параметр t вдоль характеристики на x и подставим в правую часть дифференциального уравнения $dm/dx = mg/v$ найденное представление для функции g . Решая это уравнение и используя начальные условия (3.1), находим, что на кривой $x = \xi(t, x_0)$

$$m(x, x_0) = m_* + \Phi(x, x_0) / \left[1 + \beta \int_{x_0}^x \Phi(y, x_0) dy \right] \quad (3.2)$$

причем

$$\Phi(x, x_0) = (m_0(x) - m_*) \exp \left(\beta \int_{x_0}^x [m_0(1 - c_0) - m_*] dy \right) \quad (3.3)$$

При определении значений концентрации на характеристике воспользуемся тем, что на ней имеет место дифференциальное соотношение $(c^{-1} + (1 - c)^{-1})dc = -\beta(m - m_*)dx$. Подставляя в него найденные значения для пористости, интегрируя и учитывая начальные условия (3.1) заключаем, что при $x = \xi(t, x_0)$

$$c(x, x_0) = \left[1 + (c_0^{-1}(x_0) - 1) \exp \left(\beta \int_{x_0}^x (m(y, x_0) - m_*) dy \right) \right]^{-1} \quad (3.4)$$

Уравнение самой характеристики, выпущенной из точки $(x_0, 0)$, может быть при этом записано в виде

$$vt = \int_{x_0}^x m(y, x_0) dy \quad (3.5)$$

Опуская детали, отметим, что построенное решение задачи Коши (3.2)–(3.5) при естественных ограничениях $0 < m_* \leq m_0(x)$, $0 < c_0(x) < 1$ на начальные данные (3.1) будет определено во всей полуплоскости $0 < t$. Уравнение характеристик (3.5) может быть разрешено относительно x_0 , а решение задачи может быть представлено в виде $m = m(x, t)$, $c = c(x, t)$. При непрерывных $m_0(x)$ и $c_0(x)$ решение непрерывно вместе с производной $\partial m / \partial t$. Если $c_0(x)$ – гладкая функция, гладкой будет и $c(x, t)$.

Можно показать, что движущиеся разрывы решения возникают лишь за счет разрыва начальных значений концентрации. При переходе через них, как следует из интегральных балансов объемов жидкости и твердой фазы, представленных в разд. 1, и условий устойчивости, скорость фильтрации и пористость сохраняют непрерывность. Разрыв такого типа является характеристикой первого уравнения системы (1.7). Неподвижные разрывы возможны только при скачкообразном изменении функции $m_0(x)$. При переходе через них скорость фильтрации и концентрация остаются непрерывными, но построение соответствующего решения требует исследования начально-краевой задачи.

4. Начально-краевая задача. Рассмотрим для системы (1.7) задачу с начальными условиями (3.1), выполненными при $0 < x$, и краевым условием

$$c(0, t) = c^0(t) \text{ при } 0 < t \quad (4.1)$$

Квадрант $\{0 < x, 0 < t\}$, в котором предстоит определить решение, разбивается на две подобласти: $\omega_+ = \{\xi(t, 0) < x, 0 < t\}$, где $x = \xi(t, 0)$ – предельная характеристика, получаемая согласно (3.2) – (3.5) при стремлении там x_0 к нулю справа; ω_- – остальная часть квадранта. В области ω_+ решение однозначно определяется начальными условиями и описывается представлениями (3.2) – (3.5). При построении решения в области ω_- используем соображения, аналогичные изложенным в разд. 3.

Пусть $\tilde{m}(x)$ – значение пористости на кривой $x = \xi(t, 0)$, получающееся из (3.2), (3.3), если там взять $x_0 = 0$. На выходящей из точки $(0, t_0)$ характеристике $x = \xi(t, t_0)$ первого из уравнений системы (1.7) пористость m принимает значения $m(x, t_0)$, которые, как и в задаче Коши, удовлетворяют уравнению (напомним, что d/dx означает дифференцирование вдоль характеристики по x)

$$dm/dx = (m - m_*)[g - \beta(m - m_*)], \quad g = m' / (\tilde{m} - m_*) + \beta(\tilde{m} - m_*)$$

Его интегрирование показывает, что на этой кривой

$$\frac{1}{m - m_*} = \left[\frac{1}{m(0, t_0) - m_*} + \beta \int_0^x \exp\left(\int_0^y g(z) dz\right) dy \right] \exp\left(-\int_0^x g(y) dy\right)$$

Выразим входящие в это представление значения \tilde{m} и $m(0, t_0)$ через начальные и граничные данные. Для этого сначала заметим, что согласно сказанному в разд. 3 $\tilde{m}(x)$ – решение дифференциального уравнения

$$dm/dx = (m - m_*) \{ m'_0 / (m_0 - m_*) + \beta [m_0(1 - c_0) - m_*] - \beta(m - m_*) \}$$

удовлетворяющее начальному условию $\tilde{m}(0) = m_0(0)$. Отсюда следует, что

$$g = m'_0 / (m_0 - m_*) + \beta [m_0(1 - c_0) - m_*]$$

и потому значения пористости на кривой $x = \xi(t, t_0)$ могут быть представлены в виде

$$m = m_* + h(x) \left[\frac{1}{m(0, t_0) - m_*} + \beta \int_0^x h(y) dy \right]^{-1}$$

$$h(x) = \Phi(x, 0) / (m_0(0) - m_*)$$

с $\Phi(x, x_0)$ из (3.3). Теперь проинтегрируем второе уравнение системы (1.7) по t от $t = 0$ до $t = t_0$ с фиксированным $x = 0$. С использованием граничного условия (4.1) заключаем, что

$$m(0, t_0) = m_* + (\tilde{m}(0) - m_*) \exp(-\beta v \int_0^{t_0} c^0(\tau) d\tau)$$

Подставляя эти значения в полученное выше представление для пористости, находим, что на характеристике $x = \xi(t, t_0)$

$$m(x, t_0) = m_* + \Phi(x, 0) \left[\exp(\beta v \int_0^{t_0} c^0(\tau) d\tau) + \beta \int_0^x \Phi(y, 0) dy \right]^{-1} \quad (4.2)$$

Из указанного в разд. 3 дифференциального соотношения между пористостью и концентрацией, справедливого на любой характеристике, и из условия (4.1) получаем, что на кривой $x = \xi(t, t_0)$

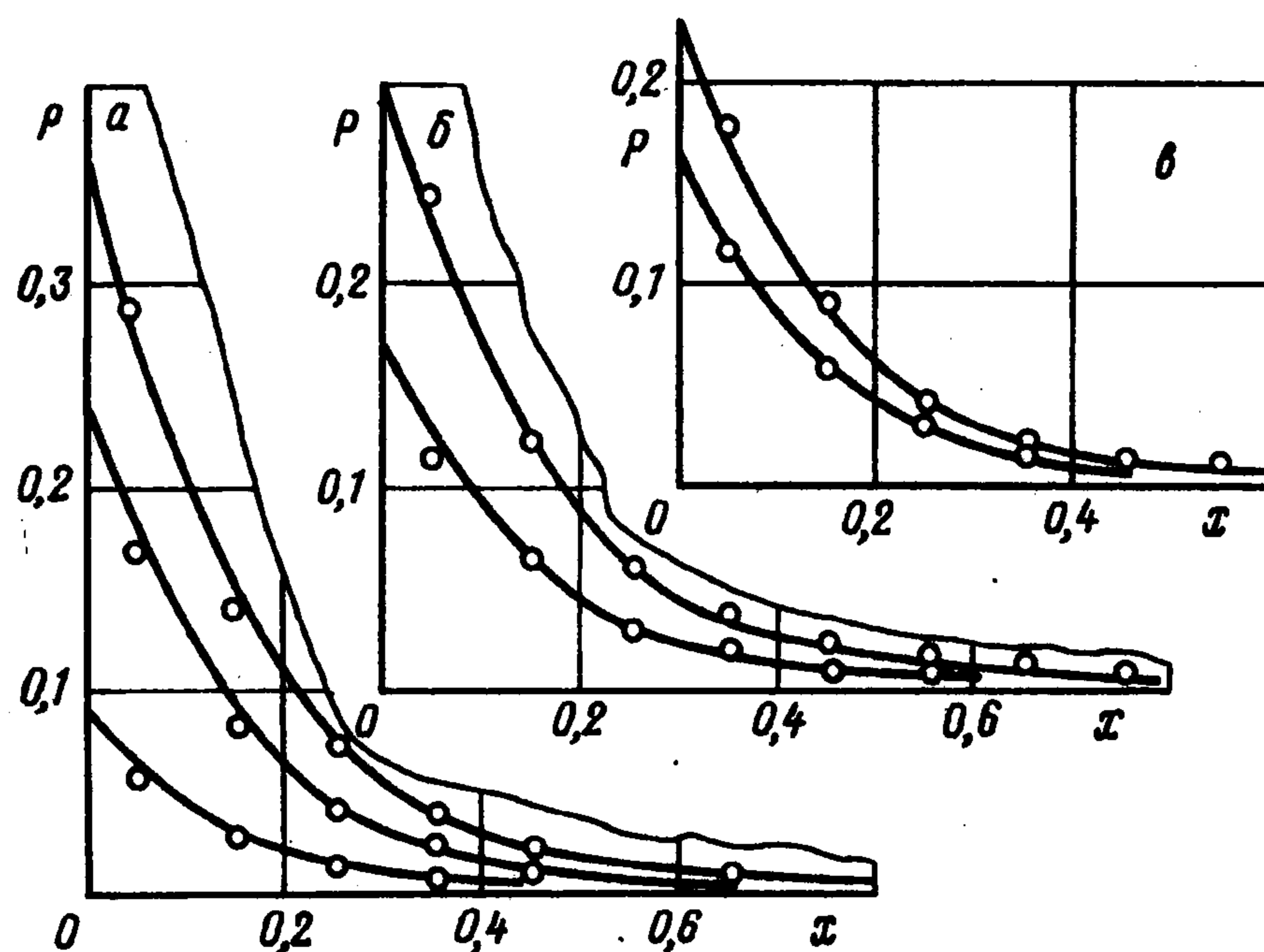
$$c(x, t_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{c^0(t_0)} - 1 \right) \exp\left(\beta \int_0^x (m - m_*) dy\right) \right]^{-1} \quad (4.3)$$

Наконец, сама характеристика $x = \xi(t, t_0)$ определится уравнением

$$v(t - t_0) = \int_0^x m(y, t_0) dy \quad (4.4)$$

что и завершает построение искомого решения.

Опуская выкладки, отметим следующие свойства полученного решения, справедливые при указанных в разд. 3 естественных ограничениях на начальные данные (3.1) и при условии, что в (4.1) $0 < c^0(t) < 1$. Во-первых, уравнение (4.4) разрешимо относительно t_0 . Во-вторых, определяемая этим уравнением кривая при $t_0 = 0$ совпадает с кривой $x = \xi(t, 0)$ из (3.5). Поэтому решение (4.2) – (4.4), (3.3) определено всюду в ω_- . В этой области при непрерывных $m_0(x)$ и $c^0(t)$ оно непрерывно, существует и непрерывна производная dm/dt . Для гладких $c^0(t)$ непрерывно дифференцируема в ω_- и функция $c(x, t)$. Если $c^0(t)$ при некотором $t = t_*$ претерпевает разрыв, он будет распро-



Фиг. 1

страняться вдоль характеристики, выпущенной из точки $(0, t_*)$. При $c^0(0) \neq c_0(0)$ возникает разрыв концентрации при переходе через разделяющую области ω_- и ω_+ характеристику $x = \xi(t, 0)$. Наконец, если на оси x при $x = x_*$ имеется скачок пористости, он будет присутствовать при всех $0 < t$ в точках (x_*, t) . В этом случае сначала строится решение в полосе $\{0 < x < x_*, 0 < t\}$, из него определяются значения $c(x_*, t)$, подставляются в условия (4.1) и затем находится решение в квадранте $\{x_* < x, 0 < t\}$.

5. Сравнение с экспериментом. В качестве примера рассмотрим задачу о проникании взвеси с заданной постоянной интенсивностью в первоначально чистый пористый образец длины L . В этом случае $m(x, 0) = m_0 = \text{const}$, $c(0, t) = c^0 = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Поскольку $c(x, 0) = c_0 \equiv 0$, в силу (3.2)–(3.4) всюду перед фронтом проникания $c(x, t) = 0$ и $m(x, t) = m_0$. Характеристики первого уравнения системы (1.7) – прямые линии и положение фронта определяется уравнением $x = vt/m_0$.

Можно показать, что для рассматриваемого случая представление (4.2) – (4.4), (3.3) решения в области $\{m_0 x < vt, 0 < t\}$ приводится к виду

$$m = m_* + s(m_0 - m_*), \quad c = c^0(1 - as)/(1 - c^0 as) \quad (5.1)$$

Функция $s(x, t)$ находится из уравнения

$$F(s; a, b) = s^{1/(1-c^0)} - (1 - as)b = 0, \quad 0 < s < 1 \quad (5.2)$$

$$a = 1 - \exp[-\beta(m_0 - m_*)x]$$

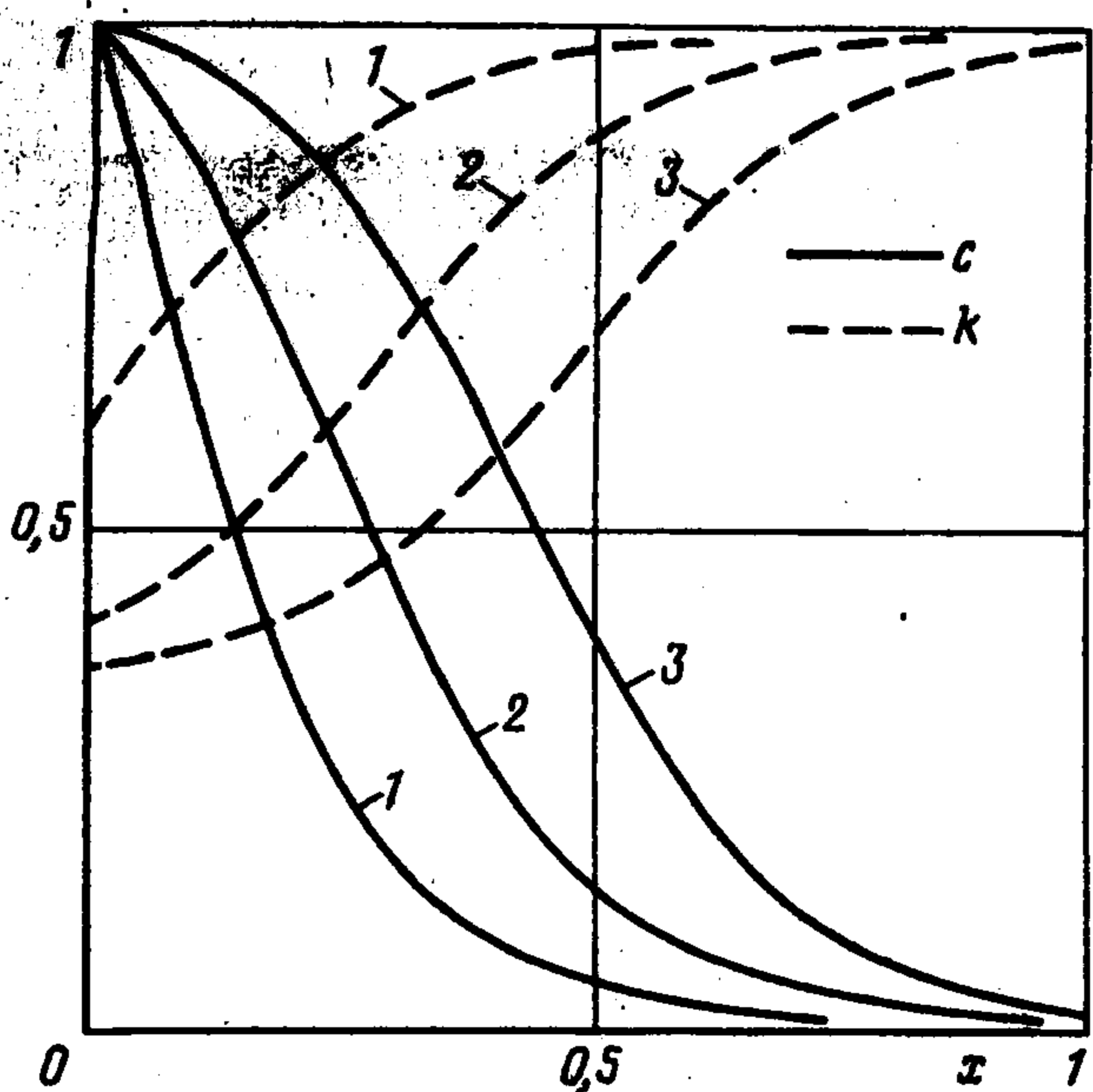
$$b = \exp[\beta(m_0 - m_*)x - \beta c^0(vt - m_0 x)/(1 - c^0)]$$

Однозначная разрешимость последнего вытекает из монотонности F по s и неравенств $F(0; a, b) = -b < 0$, $0 < F(1; a, b) = 1 - (1 - a)b$, поскольку за фронтом $m_0 x < vt$.

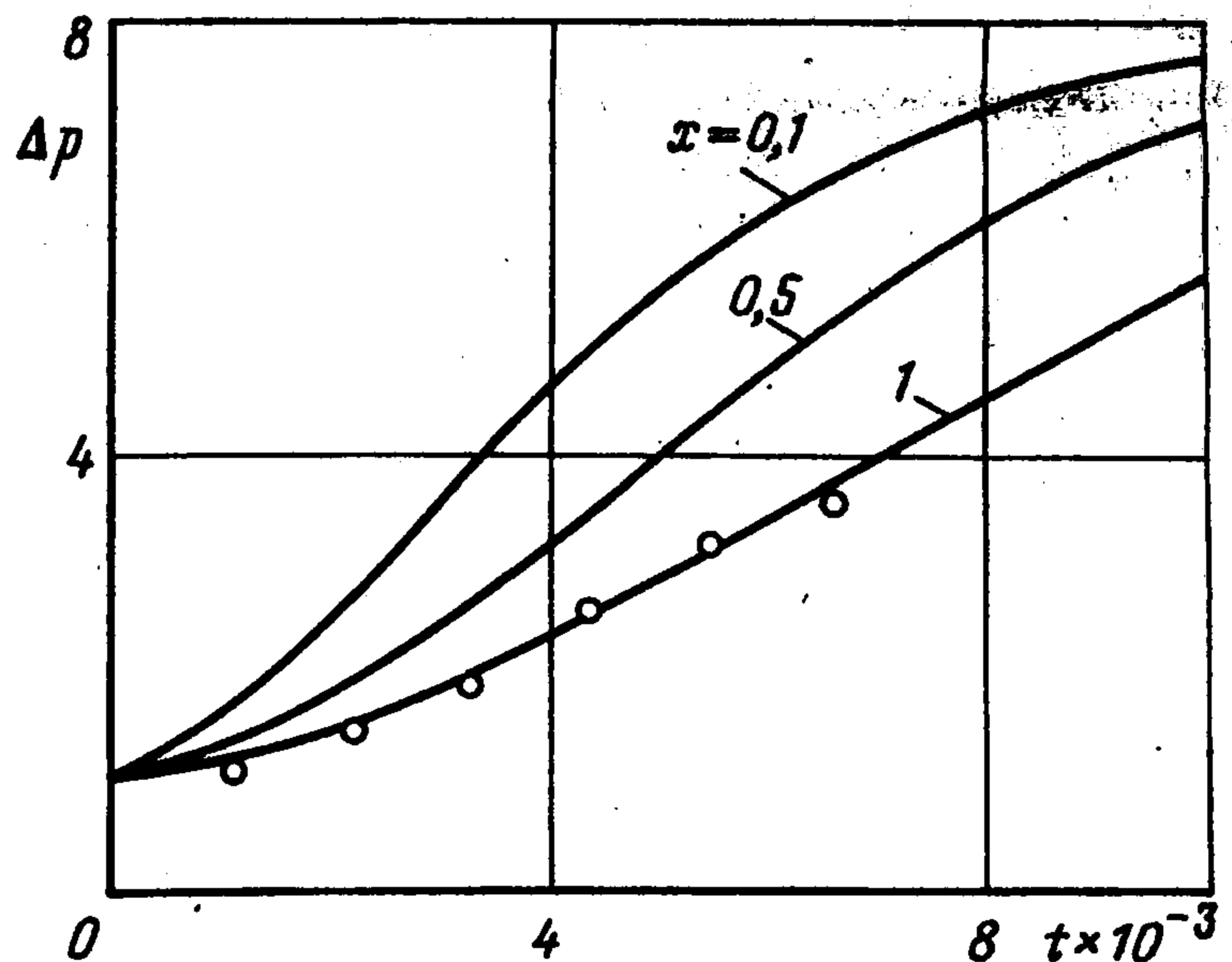
Покажем, что решения, приведенные в разд. 2, являются асимптотическими. Для этого запишем уравнение (5.2) в виде

$$s(1 - as)^{c^0 - 1} = \exp\left\{\beta(m_0 - m_* + c^0 m_*)\left[x - \frac{c^0 vt}{m_0 - m_* + c^0 m_*}\right]\right\}$$

Его правая часть и правая часть уравнения (2.5) будут равны, если положить $m^* = m_0$, $c_* = c^0$ и скорость волны σ определять по (2.3). При таком выборе совпадут определения (2.4) и (5.1) для функции s . Левые части указанных уравнений будут различаться лишь множителем a : в (2.5) $a = 1$, в (5.2) он зависит от x . Но на достаточном удалении от входа



Фиг. 2



Фиг. 3

образца $a \approx 1$, и здесь будут одинаковыми не только значения s , определяемые уравнениями (2.5) и (5.2), но и выражения (2.6) и (5.1) для концентрации. Именно это и является причиной наблюдаемого в ряде экспериментов выхода течения на режим простой волны.

Далее будут использоваться безразмерные параметры m_*/m_0 , $\beta m_0 L$, $\sigma m_0/\nu$ и переменные x/L , $(\nu t)/(Lm_0)$, m/m_0 , c/c^0 , которые снова обозначаются m_* , β , σ и x , t , m , c соответственно. После перехода к ним будем иметь $m_0 = 1$ и $\nu = 1$.

На фиг. 1, а показаны изменения со временем распределения по продольной координате x закольматированной доли порового пространства $P = 1 - s$ при $\nu \approx 0,5$ м/час, $c^0 = 0,0007$; для нижней кривой $t = 5$, для средней $t = 15$ и для верхней $t = 25$. Светлые точки на фиг. 1 – данные эксперимента [10]. Параметры β и m_* оказались равными 26,0 и 0,7 соответственно. Влияние входной концентрации c^0 на $P(x)$ иллюстрирует фиг. 1, б при тех же значениях ν , β , m_* , что и выше, и $t = 10$; для нижней кривой $c^0 = 0,0007$, для верхней $c^0 = 0,0014$. На фиг. 1, в приведены зависимости $P(x)$ при $t = 10$, $c^0 = 0,0007$, прежних значениях β и m_* , но для двух скоростей подачи взвеси: $\nu \approx 0,5$ м/час – для нижней кривой и в 1,4 раза выше – для верхней.

Сравнение с опытом показывает, что принятая модель достаточно хорошо описывает распределение объема захваченных из потока частиц по пространству и времени. Она правильно учитывает и влияние входной концентрации. Видно, что скорость фильтрации – существенный параметр, а использованная здесь линейная зависимость от нее имеет не только теоретический смысл. Линеаризованное приближение [8] не допускает подобного согласования с опытом [10].

Результаты эксперимента [10] относятся к тем временам, когда в образце еще недостаточно развита зона простой волны, описываемая представлениями (2.1) – (2.6). Для таких режимов, как отмечено в разд. 2, характерно наличие точек перегиба. На фиг. 2 показаны две группы рассчитанных по формулам (5.1), (5.2) кривых. Первая из них (сплошные линии) описывает изменения приведенной концентрации по потоку, вторая (штрихованные линии) – проницаемости. Здесь $\nu \approx 0,5$ м/час, $\beta = 26$, $m_* = 0,7$, $c^0 = 0,0007$. В качестве значений безразмерного времени выбраны время появления точки перегиба профиля концентрации на входе в образец $t = 38$ (кривые 1) и кратные ему: $t = 114$ (кривые 2), $t = 190$ (кривые 3). Аналогичным образом ведут себя и опытные кривые, когда достигаются времена развитой зоны простой волны [1, 11].

Перепад давления на входе и в точке x естественно относить к соответствующему значению перепада давления при движении чистой жидкости, т.е. к $p(0,0) - p(x,0) = \mu \nu k_0^{-1} x$. Учитывая соотношения (1.5), (1.6) и (5.1), в безразмерных переменных этот относительный перепад можно записать в виде

$$\Delta p(x,t) = \int_0^1 \frac{dy}{[m_* + (1 - m_*)s(xy,t)]^n}$$

На фиг. 3 при $n = 3$ и $c^0 = 0,00005$ представлена зависимость Δp от безразмерного времени

при разных значениях x . Точки отмечают данные эксперимента [11,1] для случая полного перепада давления. При этом β и m_* , полученные сравнением рассчитанных и опытных профилей концентрации, оказались равными 9 и 0,5 соответственно. Таким образом, принятая модель качественно верно описывает и динамику давления в процессе кольматации.

В заключение отметим следующее. Если входные концентрации c^0 достаточно малы, то до некоторого момента времени за фронтом профиль концентрации просто сдвигается по потоку. Связано это с тем, что изменения со временем параметра b из (5.2) сказываются лишь при достижении взвесью выхода из образца. В последующие моменты хорошим приближением к соотношениям (5.1), (5.2) является полученная ранее [1] для случая $m_* = 0$ зависимость

$$c = c^0 \{1 + [\exp(\beta(1 - m_*)x) - 1] \exp(-\beta c^0 t)\}^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 211 с.
2. Collins R.E. Flow of Fluids through Porous Materials. N.Y.: Reinhold Publishing Corporation, 1961. 228 p.
3. Михайлов Н.Н. Изменение физических свойств горных пород в околоскважинных зонах. М.: Недра, 1987. 152 с.
4. Хужаеров Б. Влияние кольматации и суффозии на фильтрацию суспензий // Инж.-физ. журн. 1990. Т. 58. № 2. С. 244–250.
5. Хужаеров Б. Модель фильтрации суспензии с учетом кольматации и суффозии // Инж.-физ. журн. 1992. Т. 63. № 1. С. 72–79.
6. Abboud N.M., Corapcioglu M.Y. Effect of mud penetration on borehole skin properties // Water Resour. Res. 1993. V. 29. № 8. P. 2941–2950.
7. Corapcioglu M.Y., Abboud N.M. Cake filtration with particle penetration at the cake surface // SPE Reservoir Eng. 1990. V. 5. № 3. P. 317–326.
8. Litwiniszyn J. On suspension flow in a porous medium // Intern. J. Engng Sci. 1967. V. 5. № 5. P. 435–454.
9. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
10. Trzaska A. Experimental research on the phenomenon of colmatage // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn. 1965. V. 13. № 9. P. 451–457.
11. Eliassen R. Clogging of a rapid sand filter // J. Amer. Water Works Assn. 1941. V. 33. № 5. P. 926–942.

Новосибирск

Поступила в редакцию
30.V.1997