

УДК 551.466.81:534.1

© 1999 г. Ю.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

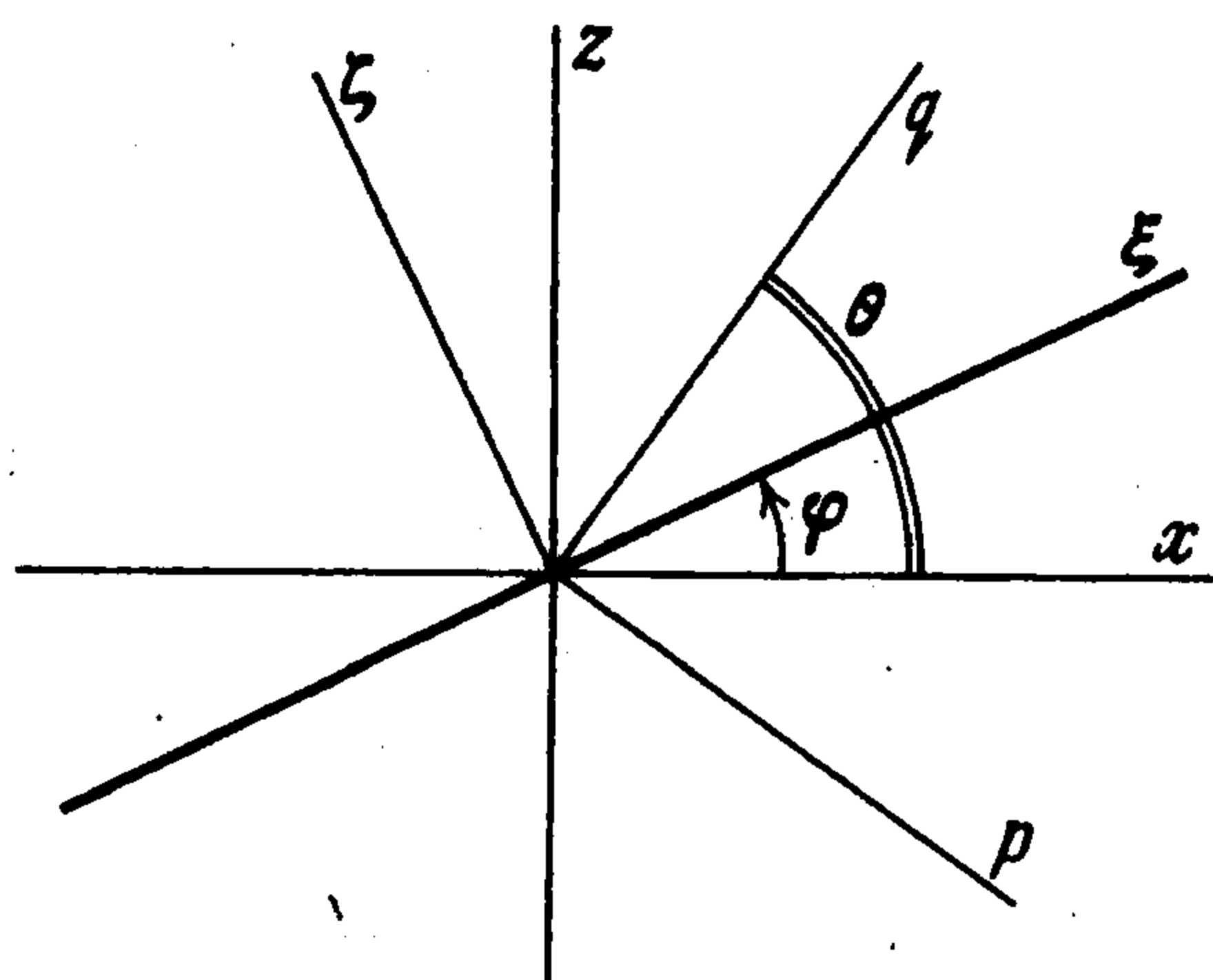
Спектральным методом строится точное решение линеаризованной граничной задачи генерации внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости, когда источником служит часть плоскости, колеблющаяся вдоль своей поверхности. Пространственная структура полученного решения описывает оба известных типа волновых пучков – одно-модальный и бимодальный. В предельных случаях фазовая картина волн согласуется с известными асимптотиками и лабораторными экспериментами. Проводится сравнение точного решения с решением модельной задачи генерации волн силовыми источниками, построенными по теории однородной жидкости. Фазовые картины волн в обоих случаях совпадают везде, за исключением критических углов, когда волна распространяется вдоль излучающей поверхности. Амплитуды излучаемых волн оказываются совпадающими только при некоторых соотношениях углов наклона плоскости и направления распространения пучков.

Задачи генерации движений периодическим источником в однородной и стратифицированной идеальной [1] или вязкой жидкости [2, 3] традиционно изучаются экспериментально и теоретически [4, 5]. Для уравнения внутренних волн в стратифицированной жидкости до настоящего времени не удалось найти такую форму движущегося тела, при которой задача генерации движений имеет точное решение даже в линейной постановке. Один из распространенных подходов состоит в замене реального тела силовыми [6] или массовыми [7] источниками, характеристики которых заимствуются из теории однородной жидкости. Структура волнового пучка, рассчитанная по таким моделям, качественно согласуется с наблюдениями на больших удалениях от источника. Абсолютные значения смещений в рамках этого подхода оказываются заниженными и корректируются с помощью эмпирических коэффициентов [8].

Детальные лабораторные наблюдения показывают, что между сформировавшимся волновым пучком и колеблющимся телом находится промежуточная область, движения в которой не являются чисто волновыми [7] и включают как течения типа пограничного слоя [9], так и более сложные вихревые движения, которые не описываются универсальными моделями.

Цель данной работы – рассмотрение одной специальной задачи гидродинамики осциллирующего тела, допускающей точное решение как в случае одномерной, так и экспоненциально стратифицированной вязкой жидкости, когда в среду излучаются внутренние волны. Принципиальным является учет вязких пограничных течений на излучающей поверхности. Форма излучателя и величина амплитуды смещений выбираются из условия пренебрежения нелинейными эффектами. На основе анализа полученных решений делается вывод о неадекватности замены колеблющегося тела совокупностью силовых источников и предлагается новый алгоритм решения задач излучения внутренних волн.

**1. Уравнения движения, граничные условия и модель источника движений.** Пусть  $x$  и  $z$  – горизонтальная и вертикальная координаты,  $\rho_0(z)$  – невозмущенное распределение плотности,  $(u_x, u_z)$  – составляющие скорости жидкости,  $\nu$  – кинематическая вяз-



Фиг. 1

кость,  $g$  – ускорение силы тяжести, направленной против оси  $z$ ,  $(f_x, f_z)$  – распределение силовых источников, возбуждающих внутренние волны. Эффекты диффузии стратифицирующей компоненты не учитываются. Введем функцию тока  $\Psi$  так, что  $u_x = -\partial\Psi/\partial z$ ,  $u_z = \partial\Psi/\partial x$ . Исключая из системы линеаризованных гидродинамических уравнений, описывающей излучение и распространение двумерных внутренних волн [10], возбуждаемых силовыми источниками, все переменные, кроме  $\Psi$ , получим в приближении Буссинеска

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + v \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 - N^2(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad N^2(z) = -g \frac{d \ln \rho_0(z)}{dz}$$

В дальнейшем будут использоваться несколько систем координат (они показаны на фиг. 1): естественная  $(x, z)$ , в которой ось  $z$  направлена против силы тяжести; локальная  $(\xi, \zeta)$ , связанная с излучающей поверхностью, составляющей угол  $\varphi$  с горизонтом (ось  $\xi$  находится в плоскости, ось  $\zeta$  нормальна к ней); сопутствующая  $(p, q)$ , связанная с излучаемым пучком, распространяющимся под углом  $\theta$  к горизонту (ось  $q$  направлена вдоль пучка,  $p$  – поперек), связь между которыми дается соотношениями

$$x = \xi \cos \varphi - \zeta \sin \varphi = p \sin \theta + q \cos \theta, \quad (1.2)$$

$$z = \xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi = -p \cos \theta + q \sin \theta$$

Ниже везде предполагается, что движение источника монохроматическое, так что  $v(\xi, t) = v_0(\xi)e^{-i\omega t}$ , общий множитель  $e^{-i\omega t}$  далее опускается. Кроме того, считается, что жидкость стратифицирована экспоненциально и частота плавучести  $N > \omega$  не зависит от  $z$ . Учитывая сказанное и используя преобразование (1.2), получим уравнение внутренних волн в координатах  $(\xi, \zeta)$

$$\left[ \omega^2 \Delta - N^2 \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 - i\omega v \Delta^2 \right] \Psi(\xi, \zeta) = -\frac{i\omega}{\rho_0} \left( \frac{\partial f_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_\zeta}{\partial \xi} \right), \quad (1.3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

Компоненты скорости выражаются через функцию тока соотношениями

$$u_\xi = -\partial\Psi/\partial\zeta, \quad u_\zeta = \partial\Psi/\partial\xi \quad (1.4)$$

Источник возмущений – бесконечная плоскость, составляющая произвольный угол  $\varphi$  с горизонтом (фиг. 1), обладающая анизотропными механическими свойствами: она бесконечно жесткая в поперечном направлении и растяжимая и сжимаемая в продольном. Вся плоскость покоится, за исключением некоторой ее части, осциллирующей в продольном направлении по заданному закону  $v(\xi, t)$ , где  $t$  – время. Граничные условия для поля скоростей  $u_\xi, u_\zeta$ , возбуждаемых плоскостью, осциллирующей с посто-

янной частотой  $\omega$ , включают условия прилипания и непротекания для точек плоскости и затухания всех движений на бесконечности и, при учете соотношений (1.4), имеют вид

$$\partial\Psi/\partial\zeta|_{\zeta=\pm 0} = -v_0(\xi), \quad \Psi|_{\zeta=\pm 0} = 0, \quad \Psi|_{\zeta=\pm\infty} = 0 \quad (1.5)$$

Далее уравнение (1.3) решается для стратифицированной среды с граничными условиями (1.5) в отсутствие силовых источников ( $f_\xi = f_\zeta = 0$ ). В предельном случае  $N \rightarrow 0$  полученное решение описывает движения, возбуждаемые плоскостью, колеблющейся в однородной жидкости. Затем решается неоднородное уравнение (1.3) при наличии силовых источников в стратифицированной жидкости, откуда предельным переходом  $N \rightarrow 0$  получается решение с силовыми источниками в однородной жидкости. Сравнение решений первой и второй задач для однородной жидкости позволяет найти распределение силовых источников, которое подставляется в решение второй задачи для стратифицированной жидкости. Наконец, производится сравнение точного решения для стратифицированной жидкости с полученными результатами расчета при наличии силовых источников.

**2. Периодическое движение плоскости в стратифицированной жидкости.** При описании движений, возбуждаемых в стратифицированной жидкости осциллирующей плоскостью, решение соответствующего (1.3) однородного уравнения с граничными условиями (1.5) ищется в виде разложения по плоским волнам

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} [B_j(k)e^{ix_j\zeta} + B_{j+1}(k)e^{ix_{j+1}\zeta}] e^{ik\xi} dk, \quad j = \begin{cases} 1, & \zeta > 0 \\ 3, & \zeta < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Волновые числа  $\kappa_j(k)$  – решения дисперсионного уравнения внутренних волн, которое в локальной системе координат  $(\xi, \zeta)$  (фиг. 1) имеет вид

$$\omega^2(\kappa^2 + k^2) - N^2(\kappa \sin \varphi - k \cos \varphi)^2 + i\omega\nu(\kappa^2 + k^2)^2 = 0 \quad (2.2)$$

причем индексация корней выбирается так, что  $\text{Im } \kappa_1(k) > 0$ ,  $\text{Im } \kappa_2(k) > 0$ , а  $\text{Im } \kappa_3(k) < 0$ ,  $\text{Im } \kappa_4(k) < 0$ . Было показано [11], что корни уравнения (2.2) разбиваются на две пары с противоположными знаками мнимых частей при всех  $k$ . Наличие ненулевых мнимых частей в  $\kappa_j(k)$  обеспечивает сходимость интегралов в (2.1) и аналитичность получаемых решений во всем пространстве.

В случае малой вязкости были получены приближенные выражения для  $\kappa_j$  ([11], формула (2.1)). Корням  $\kappa_1$  и  $\kappa_3$  соответствуют бегущие внутренние волны [3], а корням  $\kappa_2$  и  $\kappa_4$  – пограничные течения. Эти движения характеризуются собственными масштабами пространственной изменчивости [11]

$$l_v = (\nu \sin \theta / N)^{1/2}, \quad \lambda_b = [2\nu \sin \theta / (N |\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi|)]^{1/2} \quad (2.3)$$

где  $\theta = \arcsin(\omega/N)$  – угол, который составляют с горизонтом линии центров пучков внутренних волн. Данные асимптотические решения расходятся на критических углах  $\varphi = \pm\theta$ , когда излучаемая волна распространяется вдоль плоскости. Было показано [11], что точные решения дисперсионного уравнения остаются конечными и в окрестности критических углов.

Подстановка выражений (2.1) в граничные условия (1.5) дает систему уравнений относительно  $B_j$ . Решения этой системы

$$B_1(k) = -B_2(k) = \frac{iV(k)}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad B_3(k) = -B_4(k) = \frac{iV(k)}{\kappa_3 - \kappa_4} \quad (2.4)$$

$$V(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

позволяют выписать точное решение задачи о генерации движений в стратифицированной вязкой жидкости колеблющейся в ней плоскостью. Спектральные функции и внутренних волн, и пограничных течений одинаковы, что свидетельствует о сопоставимости этих форм движения по крайней мере в ближней области около тела и необходимости учета вклада пограничных течений в потери энергии при колебании тела в неоднородной среде.

Решения для однородной жидкости получаются предельным переходом  $N \rightarrow 0$ . Они описываются формулами (2.1) и (2.4), в которых нужно сделать замену

$$\kappa_1 \rightarrow k_1, \quad \kappa_2 \rightarrow k_2, \quad \kappa_3 \rightarrow -k_1, \quad \kappa_4 \rightarrow -k_2 \quad (2.5)$$

где

$$k_1(k) = i|k|, \quad k_2(k) = K^-(k) + iK^+(k) \\ K^\pm(k) = \left\{ [(\omega^2 + v^2 k^4)^{1/2} \pm vk^2] / 2v \right\}^{1/2} \quad (2.6)$$

Если плоскость колеблется как целое, когда  $v_0$  от  $\xi$  не зависит, из (2.1) имеем  $V(k) = v_0 \delta(k)$ , где  $\delta$  – дельта-функция. Подстановка этого соотношения в (2.1) дает выражения для компонент скорости быстро затухающего пространственно периодического течения в однородной жидкости, которые с точностью до обозначений совпадают с классическими решениями Стокса и Релея [2].

Достаточно типична ситуация, когда возбуждение движений жидкости производится осциллирующей тонкой пластиной шириной  $a$ , чему соответствует распределение скоростей

$$v_0(\xi) = \begin{cases} v_0, & |\xi| < a/2 \\ 0, & |\xi| > a/2 \end{cases}$$

спектральная плотность которого

$$V(k) = \frac{v_0}{\pi k} \sin \frac{ka}{2} \quad (2.7)$$

Подстановка выражения (2.7) в (2.4) позволяет найти вид функции тока в виде интегралов, которые должны считаться численно. Если ширина пластины  $a \rightarrow \infty$ , то, как видно из (2.7),  $V(k) \rightarrow v_0 \delta(k)$ , и получается рассмотренный выше случай плоскости, осциллирующей как целое.

В стратифицированной жидкости внутренние волны от локализованного источника распространяются в виде четырех пучков, составляющих угол  $\theta$  с горизонтом. Далее для определенности рассматривается один пучок, идущий вправо и вверх, с которым связана сопутствующая система координат  $(p, q)$ , показанная на фиг. 1. Переходя к этой системе координат, используя асимптотические выражения для корней  $\kappa_j$  [11], а также соотношения (2.1) и (2.4), получим выражение для волнового поля в пучке

$$\Psi_w = -\frac{(1+i\mu)l_v}{\sqrt{2}} \left| \frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)} \right|^{1/2} \int_0^\infty V[k \sin(\theta-\varphi)] \exp \left[ ikp - \frac{vk^3 q}{2N \cos \theta} \right] dk \quad (2.8)$$

$$\mu = \text{sign} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi)$$

справедливое при  $\theta - \pi < \varphi < \theta$ . Для пограничного течения получаем аналогичным образом

$$\Psi_b = -\frac{(1+i\mu)}{2} \lambda_b v_0(\xi) \exp \left( -\frac{i\mu \zeta}{\lambda_b} - \frac{\zeta}{\lambda_b} \right) \quad (2.9)$$

Пространственный масштаб этого течения  $\lambda_b$  определен формулой (2.3).

Как видно из выражения (2.9), движения в пространственно осциллирующем пограничном течении экспоненциально спадают при увеличении  $\zeta$ , в то время как их продольная структура повторяет зависимость  $u_0(\xi)$ . Полученные решения справедливы не для всех углов  $\varphi$ , поскольку волновые числа  $\kappa_j$  имеют особенности при  $\sin \varphi = \pm \sin \theta$ .

Случаи  $\varphi = \theta - \pi$  и  $\varphi = \theta$ , когда исследуемый пучок распространяется вдоль плоскости и не является свободным, далее рассматриваться не будут. При  $\varphi = -\theta$  пучок отрывается от плоскости и распространяется свободно. Подставляя соответствующие этому случаю выражения для волновых чисел  $\kappa_j$  ([11], формула (2.7)) в соотношения (2.1) и (2.4), получим

$$\Psi_w = - \left( \frac{v \sin^2 2\theta}{2N \cos \theta} \right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{V(k \sin 2\theta)}{k^{1/3}} \exp \left[ ikp - \frac{vk^3 q}{2N \cos \theta} \right] dk \quad (2.10)$$

Волновое поле уходящего пучка остается конечным.

Полученное решение (2.8), (2.9) описывает как поле внутренних волн, структура которого совпадает с известными решениями [3, 5], так и пограничные течения. Эффекты устранимой сингулярности наблюдаются не только при генерации, но и при отражении внутренних волн от жесткой плоскости, когда пограничные течения вносят заметный вклад в энергетику процесса [12].

**3. Силовые источники в стратифицированной жидкости.** Поскольку в данной задаче взаимодействие осциллирующей плоскости с жидкостью происходит только за счет компоненты сил вязкого трения, параллельных плоскости, структуру силовых источников можно задать в виде

$$f_\xi = F(\xi)\delta(\zeta), \quad f_\zeta = 0 \quad (3.1)$$

где  $F(\xi)$  – распределение силовых источников вдоль плоскости.

Решение уравнения для функции тока (1.3), с правой частью, записанной с учетом соотношений (3.1), представим в виде

$$\Psi = - \frac{i\omega}{\rho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi') \frac{\partial G(\xi - \xi', \zeta)}{\partial \zeta} d\xi' \quad (3.2)$$

Функцию Грина  $G(\xi, \zeta)$  анализируемого уравнения будем искать в виде разложения по плоским волнам

$$G = \vartheta(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} [G_1(k)e^{i\kappa_1 \zeta} + G_2(k)e^{i\kappa_2 \zeta}] e^{ik\xi} dk + \\ + \vartheta(-\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} [G_3(k)e^{i\kappa_3 \zeta} + G_4(k)e^{i\kappa_4 \zeta}] e^{ik\xi} dk \quad (3.3)$$

где  $\vartheta$  – единичная функция Хевисайда. Здесь волновые числа  $\kappa_j(k)$  – решения дисперсионного уравнения внутренних волн (2.2). Подставляя разложение (3.3) в уравнение (1.3) с правой частью  $\delta(\xi)\delta(\zeta)$ , получим систему уравнений относительно  $G_j(k)$ , решая которую найдем

$$G_j(k) = \frac{\text{sign}(j - 5/2)}{2\pi\omega v} \prod_{n=1}^4 \frac{1}{\kappa_j - \kappa_n} \quad (3.4)$$

где штрих означает, что из произведения исключен член с  $n = j$ .

В результате выражение для функции тока имеет вид

$$\Psi = \frac{2\pi\omega}{\rho_0} \left[ \vartheta(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(k)(\kappa_1 G_1 e^{i\kappa_1 \zeta} + \kappa_2 G_2 e^{i\kappa_2 \zeta}) e^{ik\xi} dk - \right. \\ \left. - \vartheta(-\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(k)(\kappa_3 G_3 e^{i\kappa_3 \zeta} + \kappa_4 G_4 e^{i\kappa_4 \zeta}) e^{ik\xi} dk \right] \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

где  $\mathcal{F}(k)$  – спектральная плотность силовых источников.

Случай однородной жидкости получается отсюда предельным переходом  $N \rightarrow 0$  и заменой (2.5).

Сравнивая решения (2.1), (2.4) и (3.5), (3.4) получим, что распределение силовых источников с плотностью

$$\mathcal{F}(k) = -2i\rho_0 v(k_1 + k_2)V(k) \quad (3.6)$$

где  $V(k)$  – спектральное представление распределения скоростей плоскости (последнее соотношение в (2.4)), дает правильное решение задачи о колебаниях плоскости в однородной жидкости.

Используя распределение силовых источников (3.6) в случае стратифицированной жидкости, получим из (3.5) и (3.4) (переходя к сопутствующей системе координат  $(p, q)$ ) выражения для поля волнового пучка

$$\Psi_w = \frac{(1+i)l_v}{\sqrt{2}} \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\cos \theta} \int_0^{\infty} V[k \sin(\theta - \varphi)] \exp \left[ ikp - \frac{vk^3 q}{2N \cos \theta} \right] dk \quad (3.7)$$

и пограничного течения

$$\Psi_b = -\frac{(1+i)\sqrt{2} \sin \theta}{\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi} l_v \nu_0(\xi) \exp \left( -\frac{i\mu \zeta}{\lambda_b} - \frac{\zeta}{\lambda_b} \right) \quad (3.8)$$

Эти выражения справедливы при  $\varphi \neq -\theta$ . Однако волновой пучок описывается выражением (3.7) и при  $\varphi = -\theta$ .

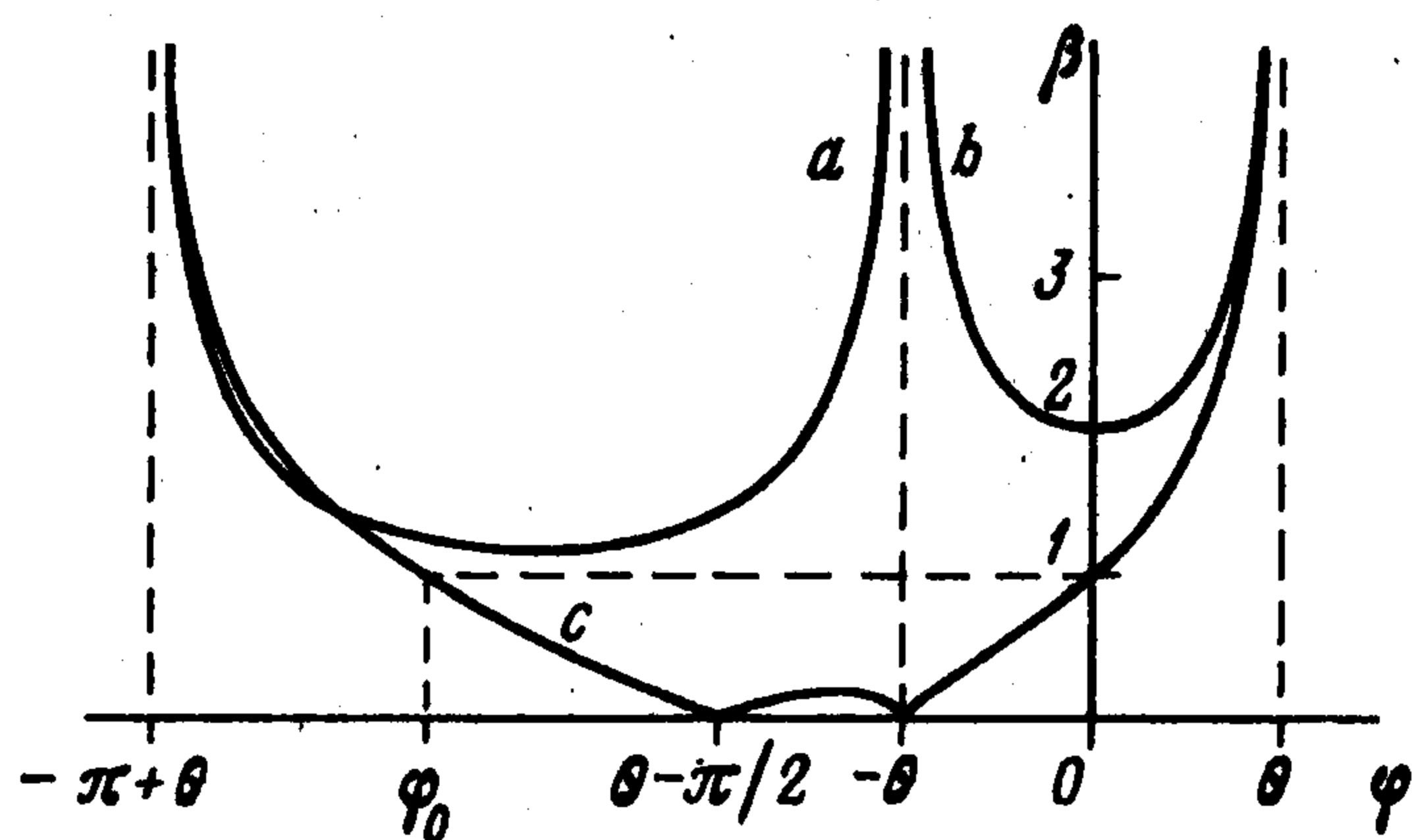
Из сравнения соответствующих формул следует, что в невырожденном случае  $\varphi \neq \pm\theta$  пространственная структура волнового пучка и пограничного течения, описываемая точным решением (2.8), (2.9), совпадает с решением для силовых источников (3.7), (3.8).

Амплитуды соответствующих движений для этих моделей заметно различаются. Для их сравнения вводятся функции  $\beta_w(\varphi)$  и  $\beta_b(\varphi)$ , равные отношению амплитуд волновых пучков и пограничных течений решений (3.7), (3.8) и (2.8), (2.9)

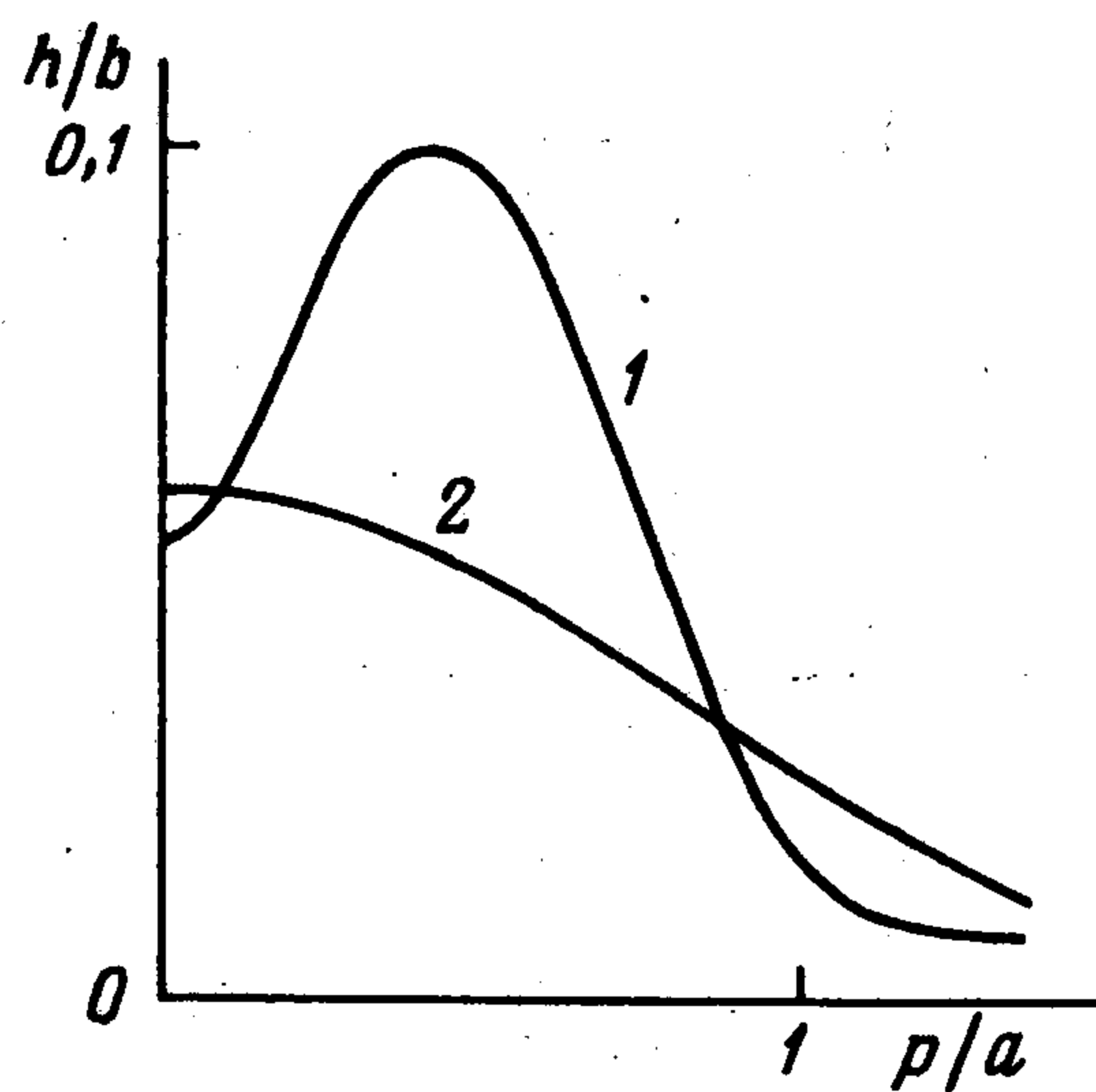
$$\beta_w(\varphi) = \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\cos \theta} \left| \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} \right|^{1/2}, \quad \beta_b(\varphi) = \frac{2 \sin \theta}{|\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi|^{1/2}} \quad (3.9)$$

На фиг. 2 приведены расчеты отношений амплитуд пограничных течений  $\beta_b(\varphi)$  (кривые *a, b*) и внутренних волн  $\beta_w(\varphi)$  (кривая *c*), рассчитанных по формулам (3.9). Указанные отношения расходятся при критических углах  $\varphi = \theta$  и  $\varphi = -\pi + \theta$ , которым соответствуют сингулярности в корнях дисперсионного уравнения (как и в асимптотической теории отражения пучков внутренних волн [11, 13]). Кроме того,  $\beta_b(\varphi)$  имеет особенность при  $\varphi = -\theta$ . Точные решения аналитичны везде.

Волновое поле для пучка, распространяющегося в первом квадранте, рассчитанное по модели силовых источников, совпадает с точным решением только когда излучаю-



Фиг. 2



Фиг. 3

щая поверхность горизонтальна либо наклонена под углом  $\varphi_0(\theta)$ , удовлетворяющим уравнению  $\beta_w(\varphi_0) = 1$ . Аналитическое выражение  $\varphi_0$  получить затруднительно (нужно решить кубическое уравнение общего вида). В области  $\varphi_0 < \varphi < 0$  модельное решение меньше точного. В двух особых случаях, которым соответствуют нули функции  $\beta_w(\varphi)$  ( $\varphi = -\theta$  и  $\varphi = \theta - \pi/2$ ) данный силовой источник не возбуждает пучок волн в первом квадранте, хотя он существует в точном решении. При  $\varphi = -\theta$  сравнение амплитуд теряет смысл, поскольку пространственная структура пучков, описываемая формулами (2.8) и (2.10), становится различной.

Пограничные течения в модели силовых источников во всех случаях рассчитываются неверно. Отношение  $\beta_b(\varphi)$  расходится при трех значениях  $\varphi$  и превышает единицу при всех остальных значениях  $\varphi$ . Этот результат указывает на ограниченность возможности применения распространенной модели силовых источников для расчета как волнового, так и полного сопротивления движению тел в вязкой неоднородной жидкости.

**4. Пространственная структура излученного пучка.** Рассмотрим подробнее частный случай, когда волны излучаются частью плоскости в виде полосы шириной  $a$ , совершающей колебания с амплитудой  $b$ . В аналогичной постановке в эксперименте пучок внутренних волн возбуждается тонкой жесткой пластиной (ширина которой  $a$  много меньше ее длины), колеблющейся вдоль своей поверхности. В этом случае пространственный спектр скорости  $V(k)$  описывается формулой (2.7) и вертикальные смещения частиц  $h$ , определяемые из решения (2.8), имеют вид

$$h = -(1 + i\mu) \frac{\alpha b l_v \sin \theta}{6\sqrt{2}\pi} \left| \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)} \right|^{1/2} \Phi(p, q)$$

$$\Phi(p, q) = F\left(p + \frac{a'}{2}, q\right) - F\left(p - \frac{a'}{2}, q\right)$$

$$F(p, q) = \int_0^{\infty} y^{-2/3} \exp(i\alpha p y^{1/3}) e^{-y} dy, \quad \alpha = \frac{2N \cos \theta}{(\nu q)^{1/3}}, \quad a' = a \sin(\theta - \varphi)$$

где  $a'$  — проекция ширины пластины на ось  $p$ , перпендикулярную оси пучка.

Функцию  $F(p, q)$  можно представить в виде разложения

$$F(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha p)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \quad (4.1)$$

имеющего бесконечный радиус сходимости по  $\alpha p$ .

На фиг. 3 в относительных единицах (смещение  $h$  пронормировано на амплитуду колебаний пластины  $b$ ) изображены огибающие пучка для двух расстояний  $q$  от пластины шириной  $a = 3$  см, расположенной под углом  $30^\circ$  к горизонту и осциллирующей с относительной частотой  $\omega/N = \sqrt{2}/2$  (ввиду симметрии пучка показана лишь область  $p \geq 0$ ). Видно, что на небольших расстояниях ( $q/a = 4/3$ , кривая 1) пучок имеет бимодальную структуру, а на больших ( $q/a = 40/3$ , кривая 2) — одномодальную с максимумом в центре.

Переход от бимодальной структуры к одномодальной происходит на таких расстояниях  $L$ , на которых выполняется соотношение  $\partial^2 |\Phi(p, L)| / \partial p^2 |_{p=0} = 0$ . Используя выражение (4.1) для  $F(p, q)$ , найдем

$$L = a^3 N \cos \theta \sin^3(\theta - \varphi) / (4y^3 \nu) \quad (4.2)$$

где  $y$  — корень уравнения

$$S^2(y, 3) - S(y, 2)S(y, 4) = 0; \quad S(y, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^m}{(2m+1)!} \Gamma\left(\frac{2m+n}{3}\right)$$

Численное решение этого уравнения показало, что оно имеет три действительных корня:  $y_1 = 8,148$ ,  $y_2 = 7,824$ ,  $y_3 = 3,026$ , причем при  $y_3 < y < y_1$  производная  $\partial^2 |\Phi(p, q)| / \partial p^2 |_{p=0}$  мала. Таким образом, существуют два критических расстояния

$$L_1 \approx a^3 N \cos \theta \sin^3(\theta - \varphi) / (2000\nu), \quad L_2 \approx 20L_1$$

причем при  $L < L_1$  структура пучка бимодальная, при  $L_1 < L < L_2$  происходит перестройка бимодальной структуры в одномодальную и, наконец, при  $L > L_2$  пучок одномодален.

Как в природных системах, так и в лабораторных установках стратификация является слабой и ее масштаб  $\Lambda = (d \ln \rho_0(z)/dz)^{-1}$  (расстояние, на котором плотность жидкости меняется в  $e$  раз) существенно превышает все остальные характерные размеры задачи. Подставляя в выражение (4.2)  $L = \Lambda$  получаем, что при размерах пластины, превышающих вязкий волновой масштаб

$$L_\nu = (\nu \Lambda / N)^{1/3} = (\nu g)^{1/3} / N$$

пространственная структура пучка будет бимодальной во всем практически достижимом пространстве, что и наблюдается в эксперименте [7].

**5. Заключение.** Построено точное решение линеаризованной задачи о возбуждении движений вязкой однородной и стратифицированной жидкости частью наклонной плоскости, осциллирующей вдоль своей поверхности.

В случае осциллирующей пластины правильная процедура расчета поля внутренних волн состоит в нахождении спектральных плотностей  $B_j(k)$  и функции тока для однородной жидкости, замене волновых чисел  $k_1(k)$  и  $k_2(k)$  на волновые числа  $\kappa_1(k)$  и  $\kappa_2(k)$ , являющиеся решениями дисперсионного уравнения внутренних волн (2.2), и вычислении функции тока по формуле (2.1).

Из проведенного анализа следует, что в общем случае формальная замена реального тела, излучающего внутренние волны в неоднородной жидкости, совокупностью силовых источников, полученной из решения соответствующей задачи для однородной жидкости, приводит к неверным результатам. Для расчета поля внутренних волн, образующихся при движении тела в стратифицированной жидкости, следует решить эквивалентную задачу для однородной жидкости, после чего в импульсном пространстве (пространстве волновых чисел) произвести замену волновых чисел (2.6) на соответствующие решения дисперсионного уравнения (2.2). Построенные решения

являются аналитическими функциями при всех значениях физических параметров задачи. Предложенная методика допускает рассмотрение и трехмерных задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования РФ (ФЦП "Интеграция" 2.1-304) и Российского фонда фундаментальных исследований (96-05-64004, 99-05-64980).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288 с.
2. Schlichting H., von Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Verlag G. Braun. 1965. 742 с. = Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. С. 90–91.
3. Lighthill J. Waves in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. = Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
5. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Генерация, распространение и нелинейное взаимодействие внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 24. С. 77–144.
6. Докучаев В.П., Долина И.С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13. N 6. С. 655–663.
7. Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д. Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. N 7. С. 744–754.
8. Thomas N.H., Stevenson T.N. A similarity solution for viscous internal waves // J. Fluid Mech. 1972. V. 54. Pt. 3. P. 495–506.
9. Foster M.R., Saffman P.G. The drag of a doby moving transversely in a confined stratified fluid // J. Fluid Mech. 1970. V. 43. Pt. 2. P. 407–418.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоскостей жесткой поверхности // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 607–613.
12. Чашечкин Ю.Д., Кистович Ю.В. Геометрия и энергетика пучков внутренних волн // Докл. РАН. 1995. Т. 344. N 5. С. 684–686.
13. Thorpe S.A. On the reflection of a train of finite amplitude internal waves from uniform slope // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 279–302.

Москва  
e-mail: chakin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию  
15.XI.1998