УДК 532.546

© 1999 г. Э.Н. Береславский

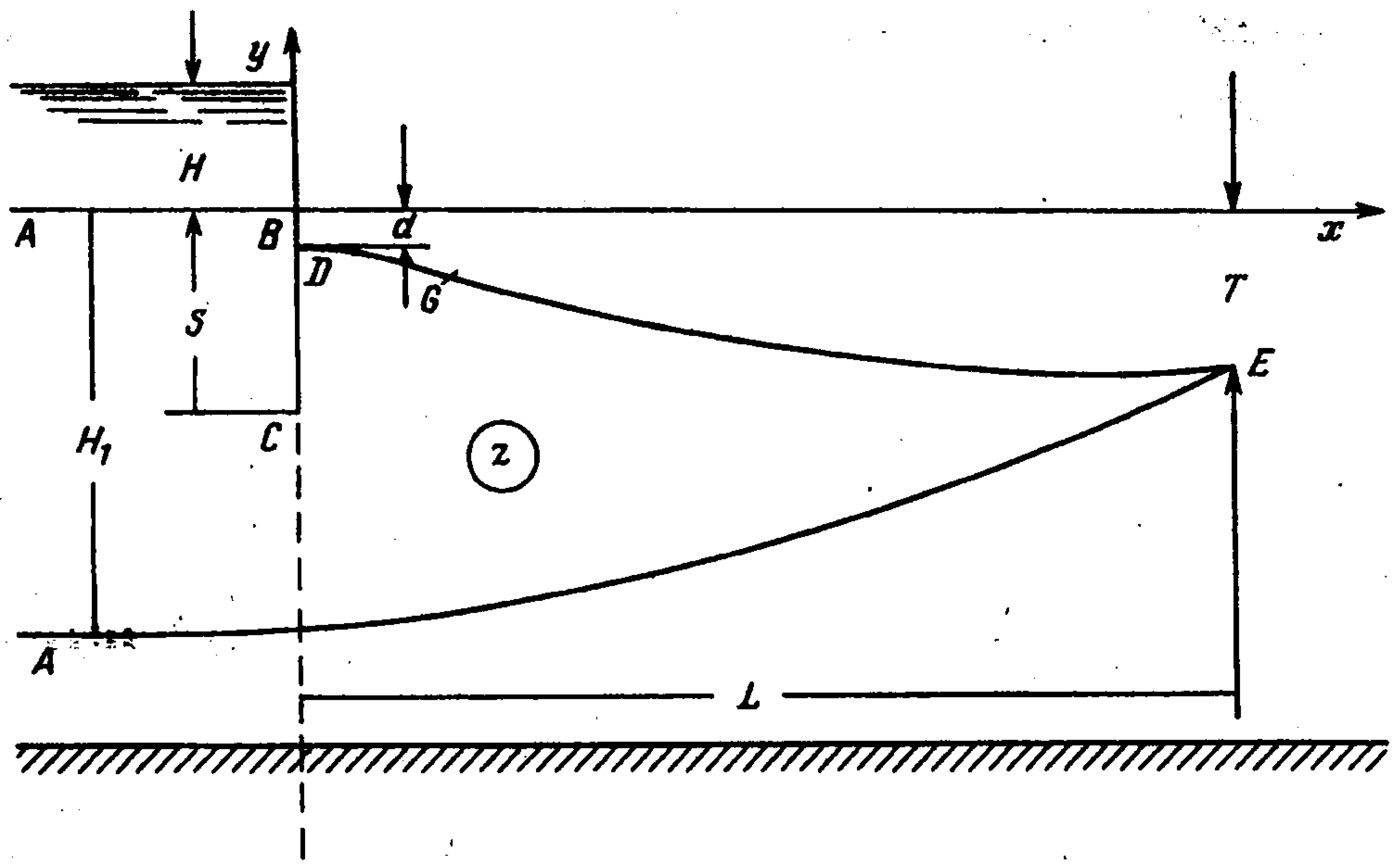
К ЗАДАЧЕ ЖУКОВСКОГО ОБ ОБТЕКАНИИ ШПУНТА

В рамках двумерной установившейся фильтрации дается решение задачи Жуковского об обтекании шпунта в случае, когда при движении фильтрующейся воды на некоторой глубине под шпунтом залегает слой соленых грунтовых вод, находящийся над непроницаемой толщей каменной соли. Решение возникающей смешанной краевой задачи теории аналитических функций осуществляется с помощью метода П.Я. Полубариновой-Кочиной, основанного на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, а также разработанного автором способа конформных отображений круговых многоугольников в полярных сетках, которые весьма характерны для областей годографа скорости подобных потоков. Отражая специфику и индивидуальные свойства таких течений, построенное ниже решение оказывается выраженным в замкнутой форме через элементарные функции и, следовательно, наиболее простым и удобным. Вместе с тем, оно является наиболее общим для рассматриваемого класса задач – из него, как частные и предельные случаи, получаются известные результаты Н.Е. Жуковского, В.В. Ведерникова и др. авторов. На этой основе и посредством числовых расчетов приводится детальный гидродинамический анализ структуры и характерных особенностей рассматриваемого фильтрационного процесса, а также влияния всех физических параметров модели на картину явления.

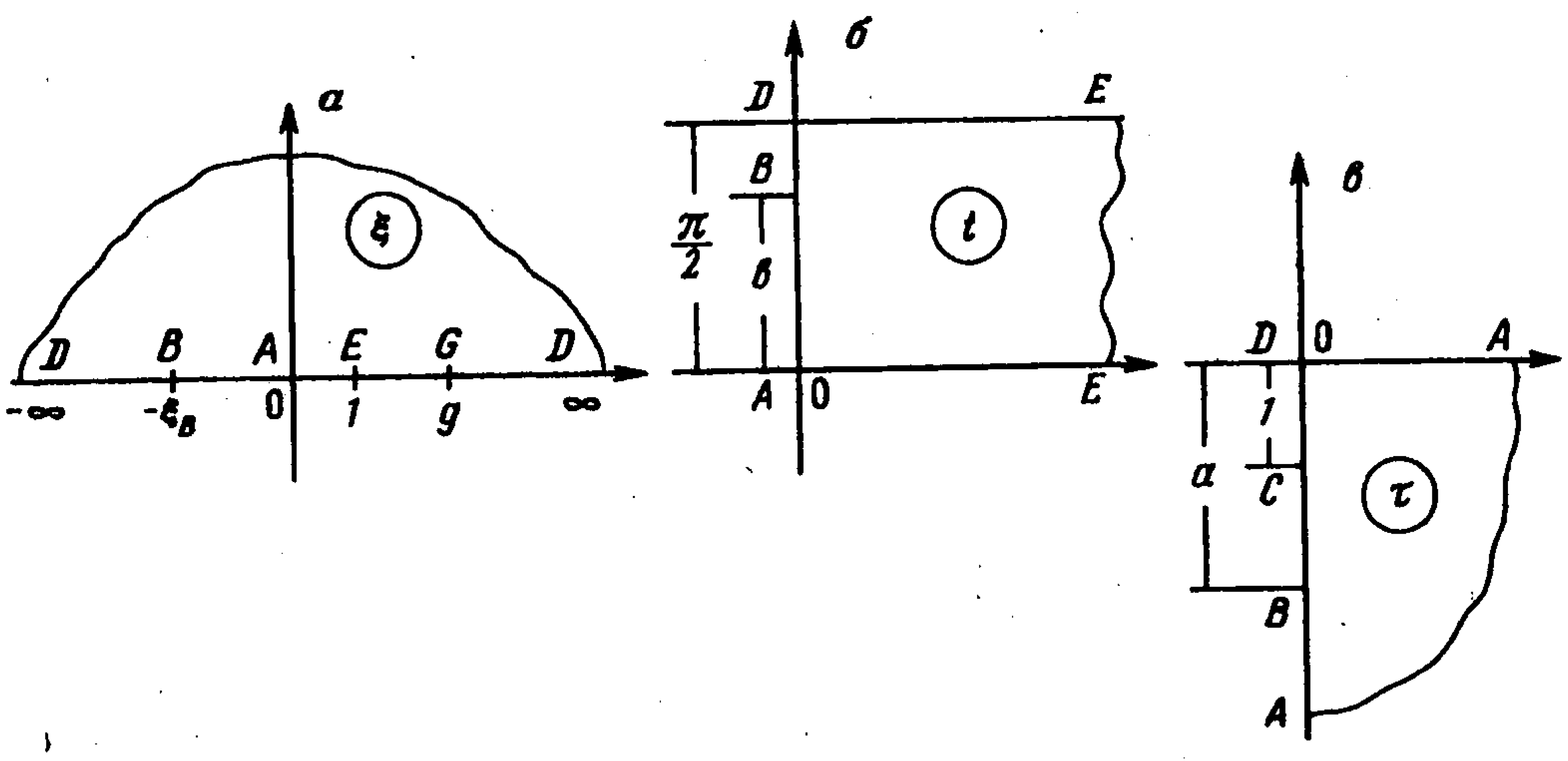
В работе [1], опубликованной посмертно в 1923 г. (см. также [2] в обработке и с примечаниями П.Я. Кочиной), Н.Е. Жуковский распространил видоизмененный им метод Кирхгофа в теории струй–метод образующих и направляющих сетей – для решения задач фильтрации со свободными поверхностями. Здесь впервые была введена специальная аналитическая функция (функция Жуковского), которая впоследствии [3–5] получила широкое применение в теории безнапорной фильтрации. С ее помощью, в частности, Жуковским дано исследование задачи об обтекании шпунта (шпунта Жуковского), где решение строится по характеру особенностей этой функции.

Работа [1] открыла возможность математического моделирования задач фильтрации со свободными границами и положила начало многочисленным исследованиям указанного класса фильтрационных течений. Так, В.В. Ведерников [6] на основе разработанного им способа конформных отображений (известного как способ Ведерникова–Павловского [3, 4]) сначала дал иное, уточненное решение задачи Жуковского об обтекании шпунта, а затем [7–10] изучил влияние капиллярности грунта на картину фильтрационного потока. Впоследствии [11] им получено решение задачи для случая, когда на некоторой глубине область фильтрации подстилается сильнопроницаемым слоем, на верхней горизонтальной поверхности которого напор имеет постоянное значение. Для случая криволинейной поверхности дренирующего основания последняя задача рассмотрена в [12, 13] методом мажорантных областей. Другие обобщения задачи Жуковского (при наличии в нижней части потока вертикального отрезка, уходящего вниз на бесконечность, и т.п.) сделаны в [4,14–18].

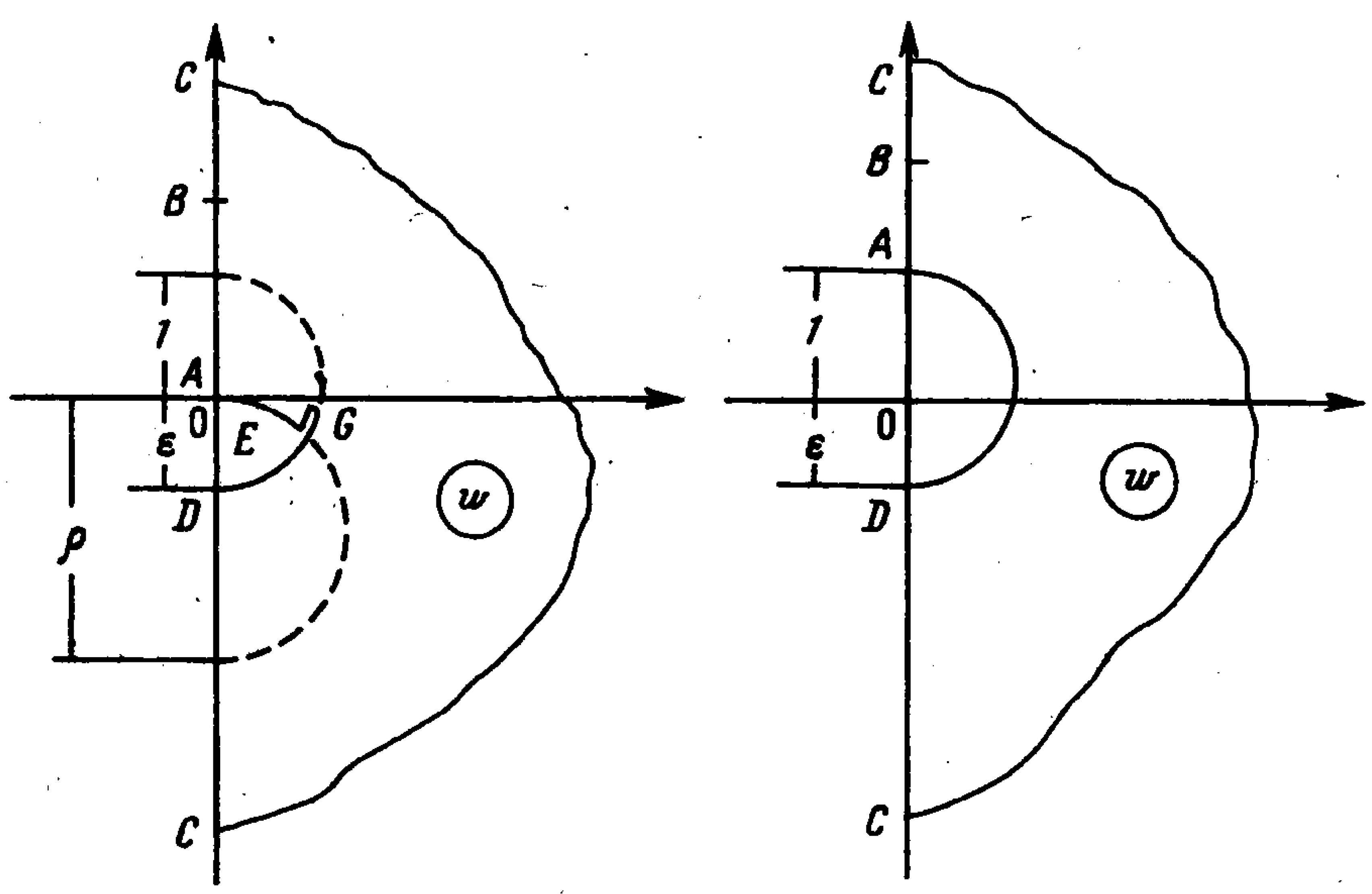
Ниже рассматривается случай, когда при движении воды под шпунтом Жуковского имеется слой покоящейся соленой воды. Для решения этой задачи используется метод П.Я. Полубариновой-Кочиной [3], а также способ конформных отображений круговых многоугольников в полярных сетках [19, 20], что возникают в областях годографа скорости подобных течений. На отдель ных схемах выясняется влияние капиллярности грунта на



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

картину движения. Отмечаются частные и предельные случаи: схема с водоупором, обтекание шпунта в водопроницаемой толще неограниченной мощности с учетом капиллярности грунта, случай В.В. Ведерникова (отсутствие испарения) [3,4,7–10] и задача Жуковского (отсутствие как испарения, так и капиллярности грунта) [1–3,6].

1. Постановка задачи. На фиг. 1 схематично представлена картина течения. Рассматривается плоское движение пресных вод плотности ρ_1 под водонепроницаемым шпунтом BCD, когда на некоторой глубине имеется слой соленой воды плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), залегающий на горизонтальном непроницаемом пласте соли. Пресные фильтрационные воды, обтекая шпунт, поднимаются за ним на некоторую высоту CD и образуют свободную поверхность DE, с которой происходит испарение постоянной интенсивности ε (отнесенной к коэффициенту фильтрации грунта k), компенсирующее фильтрацию через дно бьефа (канала или водохранилища). При этом под действием напора H бьефа движущиеся пресные воды вытесняют более тяжелые соленые (рассол) так, что линия раздела AE между ними начинает деформироваться: понижаться под бьефом и подниматься справа.

Через некоторое, достаточно большое время возможно установившееся движение, когда рассол успокаивается, а линия раздела оказывается линией тока для пресной воды [21, 22]. Тогда возникает своеобразное образование фильтрующихся грунтовых вод над покоящимися засоленными – так называемая пресноводная линза. Определение границ линзы позволяет установить размеры зоны опреснения, а следовательно, оценить возможные запасы пресной воды.

Действующий напор H, длина шпунта S, а также глубина T залегания (от поверхности земли) грунтовых вод вне линзы считаются заданными. Как это принято в задачах такого рода [3, 4], влиянием капиллярных и диффузионных явлений на границе жидкостей пренебрегаем.

Введем комплексный потенциал течения $\omega = \varphi + i\psi$ и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kT и T. Задача состоит в определении кривой депрессии DE и линии раздела AE при следующих краевых условиях:

$$AB\colon y = 0,\ \varphi = -H;\quad BCD\colon\ x = 0,\ \psi = Q$$

$$DE\colon\ \psi = Q - \varepsilon x,\quad \varphi = -(y + T);\quad AE\colon \psi = 0,\quad \varphi = \rho(y + H_1) - H \tag{1.1}$$

Здесь H_1 – глубина отжима слева, для которой имеем ([3], с. 332) выражение $H_1 = T + H/\rho$, $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$, Q – искомый фильтрационный расход. Полагая в первом условии для участка DE $x = L$, получим

$$Q = \varepsilon L \tag{1.2}$$

Последнее соотношение выражает равенство расхода величине испарения со свободной поверхности в условиях установившейся фильтрации. Таким образом, величина расхода вычисляется по формуле (1.2) после определения размеров линзы.

2. Построение решения. Для решения задачи используется метод П.Я. Полубариновой-Кочиной [3], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Вводится вспомогательная переменная ζ и функции: $z(\zeta)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость ζ на область z (соответствие точек указано на фиг. 2,a), комплексная скорость $w = d\omega/dz$, а также

$$Z = dz/d\zeta,\ F = d\omega/d\zeta \tag{2.1}$$

Определяя показатели функций Z и F около особых точек [3], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [3, 23]:

$$P\begin{Bmatrix} -\zeta_B & 0 & 1 & g & \infty & \\ -1/2 & -1 & -(1+\nu)/2 & 0 & 3/2 & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & -(1-\nu)/2 & 2 & 2 & \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\zeta\sqrt{(\zeta+\zeta_B)(1-\zeta)^{(1+\nu)}}} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & g & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & -\nu/2 & \zeta \\ 1/2 & \nu & 2 & -(1+\nu)/2 & \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{Y}{\zeta\sqrt{(\zeta+\zeta_B)(1-\zeta)^{(1+\nu)}}},\quad \nu = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\varepsilon\frac{\rho+1}{\rho-\varepsilon}} \tag{2.2}$$

Из соотношения (2.2) видно, что $\zeta = \zeta_B$ – обыкновенная точка для функции Y. Поэтому соответствующее символу Римана (2.2) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса содержит четыре регулярные особые точки и принимает вид

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-\nu}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-g}\right)Y' + \frac{\nu(1+\nu)\zeta-\lambda}{4\zeta(\zeta-1)(\zeta-g)}Y = 0 \qquad (2.3)$$

Известно [3, 23, 24], что при интегрировании уравнений подобного типа возникают трудности, обусловленные тем, что коэффициенты уравнения (2.3) помимо неопределенного аффикса g содержат еще и дополнительный, так называемый акцессорный параметр λ, также неизвестный заранее. Эти постоянные не определяются полностью положением особых точек уравнения и показателями в них и до сих пор не существует какого-либо эффективного способа их фактического нахождения. В рассматриваемом случае, однако, вид уравнения (2.3) позволяет прибегнуть к его непосредственному интегрированию, причем в замкнутой форме через элементарные функции, и полностью определить все неизвестные константы, входящие в уравнение.

Обратимся к области комплексной скорости w, соответствующей краевым условиям (1.1), которая изображена на фиг. 3, *а*. Эта область, представляющая собою круговой четырехугольник с двумя прямыми углами, произвольным углом $\pi\nu$ при вершине E и разрезом DGE, принадлежит классу многоугольников в круговых или полярных сетках [24–27], т.е. ограниченных дугами концентрических окружностей и отрезками прямых, проходящих через начало координат. Поэтому в качестве вспомогательной области параметрической переменной здесь удобно взять полуполосу $0 < \operatorname{Re} t < \infty$, $0 < \operatorname{Im} t < \pi/2$ плоскости t (фиг. 2,*б*).

Замена переменных

$$t = \operatorname{th}^2\zeta \qquad (2.4)$$

отображает верхнюю полуплоскость ζ на полуполосу плоскости t, а уравнение (2.3) преобразует следующим образом:

$$G(t)\operatorname{ch}^2 tY'' + \nu G(t)\operatorname{sh}2tY' + [(\nu^2+\nu-\lambda)\operatorname{sh}^2 t - \lambda]Y = 0 \qquad (2.5)$$

$$G(t) = (g-1)\operatorname{sh}^2 t + g$$

Согласно методике нахождения частных решений уравнений подобного типа [19, 20], уравнение (2.5) имеет два линейно-независимых интеграла вида

$$Y_k(t) = X_k(t)\operatorname{ch}^{-(1+\nu)} t,\quad k = 1,2 \qquad (2.6)$$

$$X_1(t) = \operatorname{ch}t\operatorname{ch}\nu t + C\operatorname{sh}t\operatorname{sh}\nu t,\quad X_2(t) = \operatorname{ch}t\operatorname{sh}\nu t + C\operatorname{sh}t\operatorname{ch}\nu t$$

Здесь C – некоторая постоянная, подлежащая определению, которая регламентирует конфигурацию разреза и положение его вершины G в плоскости w. Отметим, что, вообще говоря, возможен разрез и по дуге окружности AGE. При $C = 1$ разрез исчезает, и в этом случае четырехугольник вырождается в треугольник.

Функция, совершающая конформное отображение полуполосы плоскости t на заданный круговой четырехугольник плоскости w, должна выражаться через отношение линейных комбинаций решений Y_1 и Y_2. Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек A, E и D на плоскостях t и w, то получим

$$w = \frac{\gamma\rho X_2(t)}{X_1(t) + i\gamma X_2(t)},\quad \gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon}{(\rho+1)(\rho-\varepsilon)}} \qquad (2.7)$$

Принимая во внимание соотношения (2.2), (2.4) и учитывая выражение (2.7), найдем

$$Z = \frac{A}{\gamma\rho}\frac{X_1(t) + i\gamma X_2(t)}{\Delta(t)},\quad F = A\frac{X_2(t)}{\Delta(t)};\quad \Delta(t) = \operatorname{sh}t\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + B^2},\quad B = \sin b \qquad (2.8)$$

где A – масштабная постоянная моделирования.

Можно проверить, что функции (2.1), определенные на основании соотношений (2.8) и (2.4), удовлетворяют граничным условиям (1.1), сформулированным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

3. Частные и предельные случаи. Отметим некоторые частные и предельные случаи исходной фильтрационной схемы, связанные с предельными значениями отдельных физических параметров.

Схема с водоупором ($\rho = \infty$). Остановимся прежде всего на предельном случае $\rho = \infty$ ($\rho_2 = \infty$), который можно интерпретировать как "затвердевание" рассола. При $\rho = \infty$ имеем $\gamma = 0$, и выражения (2.7) и (2.8) упрощаются.

Из выражения для Z при $\gamma = 0$ видно, что на AE $\partial y/\partial\varphi = 0$ и, следовательно, $y = \mathrm{const}$, т.е. имеем непроницаемое горизонтальное основание.

Шпунт Жуковского в грунте бесконечной глубины ($T = \infty$). *Учет капиллярности грунта*. В рамках предыдущей модели рассмотрим случай, когда водонепроницаемый слой расположен весьма далеко. Очевидно, что указанное течение получается из предыдущей схемы, когда расстояние T будет неограниченно возрастать. Для перехода к пределу перенесем начало координат на плоскости t в точку D и произведем преобразование $t = (\tau + hi)\pi/2h$, переводящее полуполосу плоскости t в полуполосу ширины h на плоскости τ. Тогда при $h \to \infty$ точки A и E сближаются, сливаясь в пределе на бесконечности: полуполоса плоскости τ вырождается в правый нижний квадрат (фиг. 2, *в*).

Переходя теперь в выражениях (2.7) и (2.8) при $\gamma = 0$ к пределу при $T \to \infty$ и $h \to \infty$, будем иметь

$$w = i\frac{\tau - i\varepsilon}{\tau + i},\quad Z = A\frac{-i\tau + 1}{\sqrt{\tau^2 + a^2}},\quad F = A\frac{\tau - i\varepsilon}{\sqrt{\tau^2 + a^2}} \tag{3.1}$$

В плоскости z точка перегиба G, сливаясь с точкой D, выходит на ось y и становится точкой максимального превышения кривой депрессии. Соответствующие трансформации происходят и с областью комплексной скорости: в результате слияния точек A и E в точке $w = i$ из области w выпадает полукруг $|w - (1 - \varepsilon)i/2| < (1 + \varepsilon)/2$ и она принимает вид двуугольника, изображенного на фиг. 3, *б*.

Интегрируя последние два уравнения (3.1) и учитывая капиллярность грунта, находим

$$\begin{gathered} z = -\chi\left(\sqrt{a^2 - \tau^2} - a + \arcsin\frac{\tau}{a}\right) - d \\ \omega = \chi\left(\sqrt{a^2 - \tau^2} - a - \varepsilon\arcsin\frac{\tau}{a}\right) + d + h_c \\ \chi = \frac{2(H + h_c)}{\pi(1 + \varepsilon)},\quad a = \frac{\pi}{2} + \frac{d}{\chi}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где h_c – высота капиллярного поднятия воды в грунте. Напомним ([3], с. 136; [7], с. 21), что влияние капиллярности в подобных схемах сказывается таким образом, как если бы вместо глубины воды в бьефе H имелся напор, увеличенный на величину h_c, т.е. равный $H + h_c$.

В результате получаются искомые зависимости: длина шпунта

$$S = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\chi + d\right)^2 - \chi^2} - \chi\arccos\frac{1}{\pi/2 + d/x} \tag{3.3}$$

и уравнение свободной поверхности AE в виде цепной линии

$$y = \frac{\pi}{2}\chi - \left(\frac{\pi}{2}\chi + d\right)\mathrm{ch}\frac{x}{\chi} \tag{3.4}$$

Таблица 1

$\varepsilon \times 10^4$	$d \times 10^4$	L	$\rho \times 10^2$	$d \times 10^4$	L	H_1
1	134	611,4	1	393	278,1	101
2	178	370,4	2	385	204,0	51
5	270	204,9	3	379	170,4	34
50	846	56,0	10	377	104,0	11
90	1134	40,1	∞	510	52,0	1

Таблица 2

S	$d \times 10^4$	L	H	$d \times 10^3$	L	H_1
0	–2	138,6	0,5	520	67,9	11
0,1	162	137,4	0,9	134	122,9	19
0,2	235	137,1	2	–925	274,4	41
1	541	136,0	3	–1890	412,2	61
2	774	134,9	5	–3925	688,0	101

Случай В.В. Ведерникова ($\varepsilon = 0$). Решение задачи об обтекании шпунта Жуковского при отсутствии испарения получается из формул (3.2)–(3.4), если положить $\varepsilon = 0$, и совпадает с формулами (160) и (163) работы [9] (с. 112) и (2.10) и (2.11) работы [3] (с. 135). (В формулы (163) и (2.10), по-видимому, вкрались описки: в (163) вместо ih_v должна фигурировать величина H_v, а в формуле (2.10) во втором слагаемом вместо $H + h_k$ – величина $2(H + h_k)$, причем отсутствует член – $(H + h_k)$.)

Задача Жуковского ($\varepsilon = 0$, $h_c = 0$). Решение задачи об обтекании шпунта Жуковского при отсутствии как испарения, так и капиллярности грунта вытекает из формул (3.2)–(3.4) при $\varepsilon = 0$, $h_c = 0$ и полностью совпадает с известными результатами ([2], с. 326–327).

4. Расчет схемы течения и анализ численных результатов. Запись представлений (2.8) для различных участков границы области t с последующим интегрированием приводит к параметрическим уравнениям соответствующих граничных участков модели, содержащих три неизвестные постоянные: A, C и B. Для определения параметров отображения C и B служат длина шпунта S и величина напора H, при этом постоянная моделирования A предварительно исключается из всех уравнений посредством соотношения, фиксирующего глубину T соленых грунтовых вод вне линзы. Численным путем выявляется монотонность функций, входящих в эти уравнения, и таким образом устанавливается однозначная разрешимость системы относительно неизвестных постоянных.

После нахождения искомых параметров определению подлежат величины: d (длина отрезка BD), L (горизонтальная проекция свободной поверхности DE), расход Q из формулы (1.2), глубина отжима слева H_1, а также рассчитываются координаты точек свободной поверхности DE и линии раздела AE.

В табл. 1 и 2 сведены результаты расчетов по выяснению влияния величин ε, ρ, S и H на фильтрационные характеристики d (отрицательные величины означают, что свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс), L и H_1. В каждом разделе таблиц варьируется один из параметров, а остальные фиксируются при значениях $H = 1{,}0$; $S = 0{,}5$; $T = 1{,}0$; $\varepsilon = 0{,}001$ и $\rho = 0{,}05$. Для этого базового варианта получено $H_1 = 21$; $d = 0{,}03786$; $L = 136{,}66$ и $Q = 0{,}13666$. Анализ зависимостей искомых фильтрационных характеристик H_1, d, L и Q от определяющих физических параметров ε, ρ, S и H (при изменении каждого в 10 и более раз) приводит к следующим выводам.

1°. С уменьшением испарения линза увеличивается в размерах вширь: убыванию параметра ε в 90 раз сопутствует возрастание ширины линзы L в 15,2 раза. При этом величины d и Q убывают соответственно в 8,5 и 5,9 раз. Ордината точки D выхода фильтрационной воды из-под шпунта поднимается.

2°. С уменьшением параметра ρ, а следовательно, с ослаблением подпора со стороны соленых вод наблюдается существенный рост уже глубины отжима слева H_1, т.е. теперь линза, в основном, углубляется. Так, при уменьшении ρ в 10 раз (см. второй раздел табл. 1) глубина H_1 увеличивается также почти в 10 раз. При этом на фоне незначительного изменения величины d (всего на 4,2%) ширина линзы увеличивается в 2,7 раза.

3°. С увеличением длины шпунта S ширина линзы, а следовательно, и расход уменьшаются довольно мало – всего на 1–1,5%. Ордината же точки D опускается при этом весьма значительно: величина d возрастает в 3,3 раза.

4°. Наиболее существенное влияние на размеры линзы оказывает величина действующего напора. Например, при увеличении H в 10 раз ширина L и глубина H_1 возрастают в 10,1 раза (т.е. почти прямопропорционально изменению H), причем отметка наивысшего подъема грунтовых вод за шпунтом, резко увеличиваясь, поднимается выше оси абсцисс: уже при $H = 2{,}0$ имеем $d = -0{,}925$ (см. второй раздел табл. 2). Отметим, что для приводимых в этом разделе параметров выполняется приближенное равенство $H + d \approx \mathrm{T}$ (отличие от точного значения происходит только лишь за счет погрешностей, возникающих при вычислении несобственных интегралов). Кроме того, можно усмотреть, что изменения величины d здесь носят немонотонный характер: параметр d достигает своего минимального значения, близкого к нулю, при $H \approx 1$ (см. результаты для базового варианта).

5°. Расчеты показали, что по мере увеличения глубины залегания соленых грунтовых вод T глубина отжима слева увеличивается, а ордината точки D опускается: подобное поведение совершенно естественно с физической точки зрения.

Автор благодарит П.Я. Кочину и Н.Н. Кочину за советы и замечания, способствовавшие значительному улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н.Е.* Просачивание воды через плотины // Опытно-мелиоративная часть НКЗ. 1923. Вып. 30. С. 30–52.
2. *Жуковский Н.Е.* Просачивание воды через плотины // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1950. Т. 7. С. 297–332.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. *Аравин В.И., Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
5. *Кочина П.Я.* Функция Жуковского и некоторые задачи теории фильтрации // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 157–159.
6. *Ведерников В.В.* Фильтрация из каналов. М.; Л.: Госстройиздат, 1934. 67 с.
7. *Ведерников В.В.* Влияние капиллярного поднятия на фильтрацию из каналов // Гидротехническое строительство. 1935. № 5. С. 20–27.
8. *Ведерников В.В.* Влияние капиллярности грунта на фильтрацию со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1936. Т. 3(12). № 4(99). С. 157–161.
9. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
10. *Ведерников В.В.* Результаты опытов по свободной фильтрации // Изв. АН СССР. ОТН. 1947. № 8. С. 993–1004.
11. *Ведерников В.В.* Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69. № 5. С. 619–622.

12. *Глущенко А.А., Турчина Т.А.* Об одной задаче обтекания шпунта в слое грунта конечной мощности // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 9. С. 717–721.
13. *Глущенко А.А., Турчина Т.А.* К задаче Жуковского об обтекании шпунта // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1979. Вып. 38. С. 71–75.
14. *Аравин В.И.* Приток грунтовых вод к котловану, огражденному шпунтами // Изв. ВНИИГ. 1937. Т. 20. С. 74–89.
15. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Движение грунтовой воды через земляную плотину с центральной диафрагмой // Изв. АН СССР. ОТН. 1940. № 7. С. 53–64.
16. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Земляная плотина на проницаемом основании конечной глубины при негоризонтальном подстилающем водонепроницаемом пласте // Докл. АН СССР. 1940. Т. 28. № 6. С. 488–493.
17. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Движение грунтовой воды со свободной поверхностью на бесконечность через земляную плотину с центральной диафрагмой при негоризонтальном водоупоре // Изв. АН СССР. ОТН. 1941. № 1. С. 119–125.
18. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Фильтрация в однородной среде. М.: Советская наука, 1947. 279 с., 2-е изд., 1949. 568 с.
19. *Береславский Э.Н.* Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложении // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1048–1050.
20. *Береславский Э.Н.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 296–301.
21. *Полубаринова-Кочина П.Я.* О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101–104.
22. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.: Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
23. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
24. *Koppenfels W., Stallmann F.* Praxis der Konformen Abbildung. Berlin: Springer-Verlag; Göttingen Heidelberg, 1959. = *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во Иностр. лит., 1963. 406 с.
25. *Береславский Э.Н., Кочина П.Я.* О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 3–7.
26. *Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н.* Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1: Препринт № 567. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 124 с.
27. *Береславский Э.Н., Кочина П.Я.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 9–17.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
13.I.1999