УДК 532.5

© 1999 г. О.Ю. Динариев

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

На основе ранее полученных результатов микроскопической теории предлагается система аксиом нелокальной макроскопической феноменологической гидродинамики. Пространственно-временная нелокальность имеет место в материальных соотношениях теории. Приводится реализация аксиоматической схемы для случая многокомпонентной смеси с вязкостью и теплопроводностью. При этом классические законы переноса получаются в пределе длинных волн и медленных процессов. Доказывается, что в рамках нелокальной гидродинамики можно непротиворечиво совместить диссипативность и конечную скорость распространения сигнала. Предлагается модельная функциональная форма ядер, удовлетворяющая всем требованиям теории.

1. Введение. Метод Чепмена–Энскога [1–3] позволяет при наличии определенного малого параметра в кинетическом уравнении (т.е. в уравнении относительно одночастичной функции распределения молекул среды) получить систему гидродинамических уравнений и вывести во втором порядке теории возмущений классические законы переноса Ньютона, Фурье и Фика. В первом порядке теории возмущений получаются уравнения идеальной среды. Разработаны обобщения и модификации метода Чепмена–Энскога, основанные на различных предположениях о вхождении в кинетическое уравнение малых и больших параметров, а также на различных асимптотических схемах разложения [4–6]. Однако эти методы не работают, если отсутствует соответствующий малый или большой параметр. Кроме того, остается открытым вопрос, отвечает ли произвольному решению гидродинамической задачи какое-либо решение кинетической задачи.

Недавно было показано, что при определенном виде источников или внешних сил не только кинетическая теория [7–10], но также квантовая и классическая статистическая механика точно эквивалентны нелокальной гидродинамике (НГ) [11–17]. Пространственно-временная нелокальность возникает в материальных соотношениях, т.е. в выражениях для потоков гидродинамических величин. Эквивалентность означает, что для произвольного решения гидродинамической задачи можно восстановить соответствующий процесс в кинетике, квантовой или классической статистике. Соотношение этих последних результатов с результатами Чепмена–Энскога такое же, как у любой точной теории с асимптотическим методом: можно применить асимптотику Чепмена–Энскога в НГ и получить классические локальные законы переноса.

Реализованы другие подходы к выводу уравнений НГ из кинетического уравнения, классического или квантового уравнения Лиувилля [18–20]. При этом исходные динамические уравнения брались в форме без внешних сил или источников. Как было показано [17], это обстоятельство не позволяет однозначно вычислить нелокальные материальные соотношения. Поэтому авторы были вынуждены неявно устранять возможный произвол волевым образом. Вопрос о реализуемости обратного перехода от гидродинамического описания к кинетическому или статистическому также не затрагивался.

В настоящей работе систематизированы основные положения НГ, необходимые при построении моделей сплошных сред и при решении конкретных задач механики, без обращения к микроскопическим динамическим теориям.

Поскольку рассматриваемая нелокальность охватывает случай временной нелокальности, т.е. наследственности, предлагаемая теория имеет некоторые общие черты с рациональной механикой [21–23], которая описывает материалы со сложной реологией и теплопроводностью, определяемой предысторией деформаций частицы среды. Рациональная механика имеет структуру аксиоматической теории без связи с законами физики; поэтому справедливость теории для каждого конкретного материала должна проверяться экспериментально. В связи с этим существуют следующие принципиальные отличия предлагаемой теории от подхода [21–23]: а) в рассмотрение включается пространственная нелокальность; б) теория охватывает все явления и процессы в сплошных средах, а не только реологию и теплопроводность; в) основные положения НГ строго обоснованы в фундаментальной физике, т.е. за пределами собственно классической механики.

Помимо рациональной механики, развивается другая феноменологическая теория, позволяющая учесть релаксационные процессы в частице среды, – расширенная термодинамика (РТ) [24]. Основная идея этой теории состоит в расширении множества характеристик частицы среды, для которых выписывается иерархия релаксационных дифференциальных уравнений. Формально математически РТ вкладывается в НГ: она соответствует частному случаю, когда фурье-образы релаксационных ядер в материальных соотношениях имеют дискретное множество полюсов в плоскости комплексной частоты. Обратное неверно – модели НГ с непрерывным спектром времен релаксации не могут быть описаны в рамках РТ.

Отметим, что НГ в принципе может быть построена на основе только внутренних законов механики [25–27], как и РТ, однако в этом случае получаются значительно более слабые результаты.

Ниже используется нерелятивистское приближение и для простоты не затрагиваются вопросы, связанные с граничными условиями; предполагается, что среда заполняет все пространство, причем на бесконечности реализуется состояние покоя или равномерного поступательного движения. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, соответствуя некоторой инерциальной системе отсчета x^α, где x^0 – время. Латинские индексы a, b, c, d пробегают значения 1, 2, 3, соответствуя пространственным декартовым координатам. По повторяющимся индексам производится суммирование.

2. Основные положения. В гидродинамических моделях полная система определяющих уравнений имеет вид локальных законов сохранения для некоторых механических величин: энергии, импульса и т.д. Пусть $\overset{0}{Q}_A$ – полный набор плотностей таких величин, которые предполагаются функционально независимыми. Здесь и далее латинские индексы A, B, C, пробегают значения 0,..., (N–1), где N – число независимых законов сохранения. В фиксированный момент времени имеется набор распределений $\overset{0}{Q}_A = \overset{0}{Q}_A(x^a)$, которые на бесконечности стремятся к постоянным величинам $\overset{0}{Q}_{A0}$, соответствующим равновесному состоянию среды. Будем предполагать, что отклонения от равновесия $\Delta\overset{0}{Q}_A = \overset{0}{Q}_A - \overset{0}{Q}_{A0}$ суммируемы по Лебегу.

Определение 1. Набор распределений $\overset{0}{Q}_A = \overset{0}{Q}_A(x^a)$, будем называть мгновенным состоянием среды. Норма в пространстве L^1 интегрируемых по Лебегу функций $\Delta\overset{0}{Q}_A$ позволяет интерпретировать пространство мгновенных состояний как аффинное нормированное пространство.

Аксиомы нелокальной гидродинамики далее занумерованы как $A0, A1, A2$, ...

A 0. На пространстве мгновенных состояний среды определена гладкая замкнутая форма

$$\Omega = \int F^A \delta \overset{0}{Q}_A \tag{2.1}$$

Распределения $F^A = F^A(x^a)$, фигурирующие в формуле (2.1), вообще говоря, являются функционалами, зависящими от мгновенного состояния среды. Предполагается, что на пространственной бесконечности величины F^A сходятся к некоторым равновесным значениям F_0^A.

Лемма 1. На пространстве мгновенных состояний среды определен гладкий функционал H, дифференциал которого совпадает с Ω.

Доказательство. Для заданного мгновенного состояния $\overset{0}{Q}_{A1}(x^a)$ выберем такой гладкий процесс P: $\overset{0}{Q}_A = \overset{0}{Q}_A(t, x^a)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что

$$\overset{0}{Q}_{A0} = \overset{0}{Q}_A(0, x^a),\ \overset{0}{Q}_{A1}(x^a) = \overset{0}{Q}_A(1, x^a)$$

Положим

$$\delta\overset{0}{Q}_A = \frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{Q}_A(t, x^a)dt,\ H = H[\overset{0}{Q}_{A1}(x^a)] = \int_P \Omega$$

Независимость H от выбора процесса следует из замкнутости формы Ω.

Замечание 1. Величину H с обратным знаком с точностью до постоянного слагаемого следует интерпретировать как энтропию системы.

Определение 2. Форма второго порядка $\Omega_1 = D^2H$ – второй дифференциал функционала H [28].

А 1. Для равновесного мгновенного состояния Ω_1 – положительно определенная форма.

Из $A1$ и теоремы о неявной функции следует

Лемма 2. В некоторой окрестности равновесного состояния распределения $\overset{0}{Q}_A(x^a)$ можно выразить как функционалы от распределений $F^A(x^a)$.

Обозначая $\overset{0}{g}_A = \overset{0}{Q}_A - \overset{0}{Q}_{A0}$, $f^A = F^A - F_0^A$, выпишем соответствующую зависимость в виде ряда Тейлора

$$\overset{0}{g}_A(x^b) = \int \lambda^a_{AB}(x^b - x_1^b) f^B(x_1^b)dx_1^b +$$
$$+ \int \lambda^a_{ABC}(x^b - x_1^b, x^b - x_2^b) f^B(x_1^b) f^C(x_2^b)dx_1^b dx_2^b + \ldots \tag{2.2}$$

Определим матрицу

$$\Lambda_{AB}(k_a) = \int \exp(-ik_a x^a)\lambda_{AB}(x^a)dx^a$$

Согласно $A1$ эта матрица является эрмитовой и положительно определенной

$$\Lambda = \Lambda^+ > 0 \tag{2.3}$$

А 2. Динамика среды определяется системой уравнений

$$\partial_\alpha Q^\alpha_A = s_A (\partial_\alpha = \partial / \partial x^\alpha) \tag{2.4}$$

где гидродинамические токи $Q^a_A = Q^a_A(x^\alpha)$, зависят от предыстории среды

$$Q^b_A(x^a) = Q^b_A[x^a, \overset{0}{Q}_B(x_*^0 \leqslant x^0, x_*^a)] \tag{2.5}$$

а источники $s_A = s_A(x^\alpha)$ описывают воздействие на среду внешних систем.

Предполагается, что на пространственной бесконечности токи стремятся к равновесным значениям Q^a_{A0}. Поскольку для равновесных состояний набор равновесных плотностей Q^0_{A0} является определяющим, то значения Q^a_{A0} являются функциями Q^0_{A0}.

Пусть в результате воздействия источников (2.4) реализуется некоторый гладкий процесс P: $Q^0_A = Q^0_A(x^\alpha)$, $-\infty \le x^0 \le +\infty$, который начинается и заканчивается равновесным состоянием. Тогда в соответствии с (2.4) справедливо равенство

$$0 = \int_P \Omega = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\Delta_1 = \int F^A s_A dx^\alpha, \quad \Delta_2 = \int \partial_a F^A Q^a_A dx^\alpha$$

На вид функционала (2.4) накладывается следующее априорное ограничение.

А 3. Справедливо неравенство $\Delta_2 \le 0$.

Традиционно принято разбивать функционал (2.5) на равновесную Z^a_A и неравновесную D^a_A составляющие

$$Q^a_A(x^\alpha) = Z^a_A(x^a) + D^a_A(x^a) \tag{2.6}$$

$$Z^b_A(x^a) = Z^b_A[x^a, Q^0_B(x^0, x^a_*)] \tag{2.7}$$

$$D^b_A(x^\alpha) = D^b_A[x^a, Q^0_B(x^0_x \le x^0, x^a_*)] \tag{2.8}$$

хотя, конечно, введение этих составляющих при заданном функционале (2.5) не меняет динамических уравнений.

Представление (2.6) по определению должно удовлетворять трем условиям:

а) для процесса, который начинается и оканчивается тем же равновесным состоянием, справедливо соотношение

$$\int \partial_a F^A Z^a_A dx^\alpha = 0 \tag{2.9}$$

б) если для некоторых постоянных c^A, c^A_a выполняется равенство

$$c^A Q^0_A + c^A_a Q^a_A = 0 \tag{2.10}$$

то справедливо равенство

$$c^A_a D^a_A = 0 \tag{2.11}$$

в) для пространственно постоянных Q^0_A составляющая (2.8) тождественно обращается в нуль.

Перечисленные предположения, касающиеся представления (2.6), все же не позволяют при заданном функционале (2.5) однозначно определить равновесные токи Z^a_A без обращения к микроскопической теории. Токи Z^a_A просто определить в частном случае, когда выполнено дополнительное условие.

Б. Величины F^A, Z^a_A определяются значениями величин Q^0_A в той же точке.

В последнем случае зависимость величин F^A, Z^a_A от значений Q^0_A совпадает с зависимостью в классе равновесных состояний (т.е. определяется обычной равновесной термодинамикой).

Замечание 2. Условие Б не является аксиомой. В квантовой и классической статистической механике оно может нарушаться. В кинетической теории оно всегда выполняется.

Используя лемму 2, выразим токи (2.7), (2.8) в виде функциональных рядов по степеням f^A:

$$Z_A^a(x^\alpha) = Q_{A0}^a + \int z_{AB}^a(x^b - x_1^b) f^B(x^0, x_1^b) dx_1^b +$$
$$+ \int z_{ABC}^a(x^b - x_1^b, x^b - x_2^b) \times$$
$$\times f^B(x^0, x_1^b) f^B(x^0, x_2^b) dx_1^b dx_2^b + \ldots \qquad (2.12)$$
$$D_A^a(x^\alpha) = \int d_{AB}^{ac}(x^a - x_1^a) \partial_c f^B(x_1^\alpha) dx_1^\alpha +$$
$$+ \int d_{ABC}^{ac}(x^\alpha - x_1^\alpha, x^\alpha - x_2^\alpha) \times$$
$$\times \partial_c f^B(x_1^\alpha) f^B(x_2^\alpha) dx_1^\alpha dx_2^\alpha + \ldots \qquad (2.13)$$

Определим матрицы

$$Z_{AB}^a(k_b) = \int \exp(-ik_b x^b) z_{AB}^a(x^b) dx^b$$
$$D_{AB}^{ab}(k_\alpha) = \int \exp(-ik_\alpha x^\alpha) d_{AB}^{ab}(x^\alpha) dx^\alpha$$
$$B_{AB}(k_\alpha) = -k_a k_b D_{AB}^{ab}(k_\alpha)$$

Отметим, что ядра $d_{AB}^{ac}(x_1^\alpha)$, $d_{ABC}^{ac}(x_1^\alpha, x_2^\alpha), \ldots$ обращаются в нуль при $\overset{0}{x}_n < 0$ (причинность), поэтому по теореме Пэли–Винера [29] функции $D_{AB}^{ab}(k_\alpha)$, $B_{AB}(k_\alpha)$ голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Im} k_0 \le 0$.

Лемма 3. Имеют место матричные соотношения

$$Z^a = Z^{a+} \qquad (2.14)$$
$$B^+ + B \ge 0 \qquad (2.15)$$

Доказательство. Подставляя выражения (2.12) в (2.9), переходя в фурье-образам, оставляя члены второго порядка по функциям $f^A(x^\alpha)$ и используя произвол в выборе этих функций, получаем равенство (2.14). Далее, используя A 3, (2.6), (2.9), (2.13) и произвол в выборе функций $f^A(x^\alpha)$, выводим неравенство (2.15).

Матричное неравенство (2.15) есть обычное условие диссипативности, возникающее в моделях с наследственностью [25]. Однако микроскопические теории дают более сильное условие.

A 4. Для произвольных комплексных величин C_a^A выполняется неравенство

$$C_a^{A*} C_b^B \left(D_{AB}^{ab} + D_{BA}^{ba*}\right) \le 0 \qquad (2.16)$$

Из обратимости на микроуровне следуют дополнительные ограничения на ядра (аналог соотношений Онзагера). Предположим, что равновесное состояние на бесконечности является состоянием покоя. Пусть при операции обращения времени величины $\overset{0}{Q}_A$ домножаются на числа ε_A, $\varepsilon_A = \pm 1$.

A 5. Справедливы равенства

$$\Lambda_{AB}(k_c) = \varepsilon_A \varepsilon_B \Lambda_{BA}(-k_c)$$
$$Z_{AB}^a(k_c) = -\varepsilon_A \varepsilon_B Z_{BA}^a(-k_c) \qquad (2.17)$$
$$D_{AB}^{ab}(k_0, k_c) = \varepsilon_A \varepsilon_B D_{BA}^{ba}(k_0, -k_c)$$

Замечание 3. Аксиома A 5 налагает ограничения на ядра в линейной теории возмущений. Из общих соображений следует [30], что обратимость на микроуровне влечет ограничения во всех порядках теории возмущений. Однако, поскольку в настоящий момент нелинейная часть функционалов (2.2), (2.12), (2.13) в микроскопической теории изучена недостаточно, ограничимся здесь линейной формулировкой.

3. Гидродинамика многокомпонентной смеси. Приложим математическую схему разд. 2 к случаю многокомпонентной смеси без химических реакций. Пусть M – число компонентов. Примем, что индексы i, j пробегают значения $1,...,M$, соответствуя номерам компонентов, а индексы I, J пробегают значения $4,5,..., (M+3)$. Если индексы i, j и индексы I, J используются в одной формуле, то их значения связаны равенствами $I = i+3$, $J = j+3$. Индексы A, B, C пробегают значения $0,1,..., (M+3)$, соответствуя законам сохранения энергии, компонент импульса, количества молекул компонентов смеси. Предположим, что на пространственной бесконечности реализуется состояние покоя и что вместе с аксиомами A 0 – A 4 выполняется условие $Б$.

Таким образом, Q_0^0 – плотность энергии, Q_a^0 – плотность a-й компоненты импульса, $n_i = Q_I^0$ – мольная плотность компонента смеси с номером i.

Параметры F^A в формуле (2.1) допускают следующую физическую интерпретацию:

$$F^0 = -\beta,\ F^a = \beta u^a,\ F^I = \beta\mu_i \tag{3.1}$$

где β – обратная температура, u^a – компоненты скорости среды, $\mu_i = (\mu_{i0} - {}^1/_2\, m_i u^a u^a)$, μ_{i0} – химический потенциал i-й компоненты для покоящейся среды, m_i – масса моля i-й компоненты.

Чтобы теперь придать гидродинамическим уравнениям (2.4) более традиционный вид, нужно переобозначить гидродинамические 4-токи Q_A^α через другие величины. Введем в рассмотрение массовую плотность $\rho = \sum\limits_i m_i n_i$, среднемассовую скорость с компонентами $u^a = \rho^{-1} Q_a^0$, диффузионные потоки с компонентами $I_i^a = (Q_I^a - n_i u^a)$, плотность кинетической энергии среды $K = {}^1/_2\, \rho u^a u^a$, плотность внутренней энергии среды $U = Q_0^0 - {}^1/_2\, \rho u^a u^a$, тензор напряжений с компонентами $p^{ab} = (\rho u^a u^b - Q_b^a)$ (который предполагается симметричным) и вектор потока тепла с компонентами $q^a = Q_0^a + p^{ab}u^b - (U+K)u^a$. Подчеркнем, что новое определение скорости среды с компонентами u^a согласовано со старым (3.1) для равновесных состояний.

Теперь система (2.4) может быть переписана так:

$$\partial_0(U+K) + \partial_a\left(q^a - p^{ab}u^b + (U+K)u^a\right) = s_0$$

$$\partial_0(\rho u^a) + \partial_b(-p^{ab} + \rho u^a u^b) = s_a$$

$$\partial_0 n_i + \partial_a(I_i^a + n_i u^a) = s_I$$

Обсудим определение тензора вязких напряжений. Для равновесных состояний тензор напряжений сводится к шаровому: $p^{ab} = -p\delta^{ab}$. Поэтому в классе равновесных состояний давление p можно выразить как функцию внутренней энергии U и плотностей n_i. С помощью этой функциональной связи распространим определение давления на неравновесные состояния. Тогда компоненты тензора вязких напряжений вычисляются по формуле

$$\tau^{ab} = p^{ab} + p\delta^{ab}$$

После произведенных преобразований для задания материальных соотношений достаточно задать выражения для диссипативных токов q^a, τ^{ab}, I_i^a. Остальные слагаемые в выражениях для гидродинамических токов Q_A^a представляют собой переобозначенные равномерные составляющие Z_A^a и вычисляются в классе равновесных распределений. Из результатов разд. 2 получаем

$$q^a = D_0^a, \quad \tau^{ab} = -D_b^a, \quad I_i^a = D_I^a \tag{3.2}$$

Отметим тождество вида (2.10)

$$\sum_{i=1}^{M} m_i Q_I^a - Q_a^0 = 0$$

из которого следует равенство вида (2.11)

$$\sum_{i=1}^{M} m_i D_I^a = 0 \tag{3.3}$$

Изучим более подробно алгебраическую структуру соотношений (3.2) в линейном приближении.

Для произвольной функции $g = g(x^\alpha)$ будем обозначать символом $g_F(k_\alpha)$ ее фурье-образ

$$g_F = g_F(k_\alpha) = \int \exp(-ik_\alpha x^\alpha) g(x^\alpha) dx^\alpha$$

Оставляя в соотношениях (3.2) главные члены и переходя к фурье-образам, получаем с учетом (2.13)

$$q_F^a = ik_b D_{0B}^{ab} f_F^B \tag{3.4}$$

$$\tau_F^{ab} = -ik_c D_{bB}^{ac} f_F^B \tag{3.5}$$

$$I_{iF}^a = ik_b D_{IB}^{ab} f_F^B \tag{3.6}$$

Из (3.3) в линейном приближении получается равенство

$$\sum_{i-1}^{M} m_i D_{IB}^{ab} = 0 \tag{3.7}$$

Предположим инвариантность теории по отношению к группе вращений $O(3)$, что означает изотропность среды. Тогда имеем

$$(r(g)D)_{AB}^{ab}(k_0,\ gk_b) = D_{AB}^{ab}(k_0,\ k_b) \tag{3.8}$$

для любого $g \in O(3)$. Здесь r – представленные группы $O(3)$ в линейном пространстве Φ величин вида D_{AB}^{ab}. Выделим в Φ максимальный набор линейно независимых инвариантов относительно подгруппы, сохраняющей 3-вектор $k_b : I^n = I_{AB}^{nab}(k_c)$. Выберем эти инварианты так, что

$$(I_{AB}^{nab}(k_c))^* = I_{AB}^{nab}(-k_c) \tag{3.9}$$

Тогда наиболее общее представление, совместимое с (3.8), имеет вид

$$D_{AB}^{ab} = I_{AB}^{nab} X_n \tag{3.10}$$

Здесь $X_n = X_n(k_\alpha)$ – скалярные функции. В соответствии с (3.9) и действительностью фурье-прообразов d_{AB}^{ab} эти функции удовлетворяют условию

$$(X_n(k_\alpha))^* = X_n(-k_\alpha) \tag{3.11}$$

и потому являются фурье-образами некоторых действительных ядер $Y_n = Y_n(x^\alpha)$: $Y_{nF} = X_n$. Так как функции X_n голоморфны по переменной k_0 в нижней комплексной полуплоскости, то по теореме Пэли – Винера [29] следует, что функции $Y_n(x^\alpha)$ обращаются в нуль при $x^0 < 0$ (причинность).

Алгебраическая структура коэффициентов D^{ab}_{AB} позволяет выписать разложение вида (3.10), инвариантное относительно группы вращений. При этом следует иметь в виду условия симметрии $D^{ab}_{cA} = D^{cb}_{aA}$, $D^{ab}_{Ac} = D^{ac}_{Ab}$ (следствия симметрии тензора напряжений) и условия взаимности (2.17). Поэтому достаточно выписать представление (3.10) для следующих компонент:

$$D^{ab}_{00} = \delta_{ab} X_0 + k_a k_b X_1$$

$$D^{ab}_{0c} = ik_a \delta_{bc} X_2 + (ik_b \delta_{ac} + ik_c \delta_{ab}) X_3 + ik_a k_b k_c X_4$$

$$D^{ab}_{0I} = \delta_{ab} X_{5I} + k_a k_b X_{6I}$$

$$D^{ab}_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd} X_7 + (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{cb}\delta_{ad}) X_8 + \delta_{ac} k_b k_d X_7 +$$
$$+(k_a k_b \delta_{cd} + k_c k_b \delta_{ad} + k_a k_d \delta_{cb} + k_c k_d \delta_{ab}) X_8 + k_a k_b k_c k_d X_9$$

$$D^{ab}_{cI} = (ik_a \delta_{bc} + ik_c \delta_{ab}) X_{10I} + ik_b \delta_{ac} X_{11I} + ik_a k_b k_c X_{12I}$$

$$D^{ab}_{IJ} = \delta_{ab} X_{13IJ} + k_a k_b X_{14IJ}$$

Рассмотрим материальные соотношения (3.4)–(3.6) в пределе малых градиентов, т.е. в линейном приближении по волновому числу k_a:

$$q^a_F = ik_a(\xi_0 f^0_F + \xi_{5I} f^I_F) \tag{3.12}$$

$$\tau^{ab}_F = -\delta_{ab}\xi_7 ik_d f^d_F - \xi_8(ik_a f^b_F + ik_b f^a_F) \tag{3.13}$$

$$d^a_{iF} = ik_a(\xi_{5I} f^0_F + \xi_{13IJ} f^J_F) \tag{3.14}$$

Здесь ξ_7, ξ_8, ξ_0, ξ_{5I}, ξ_{13IJ} – функции параметра k_0, совпадающие с X_7, X_8, X_0, X_{5I}, X_{13IJ} при $k_a = 0$. Соотношения (3.12)–(3.14) представляют собой пространственно-локальные материальные соотношения линейной гидродинамики с наследственностью. В пределе медленных процессов ($k_0 \to 0$) функции ξ_7, ξ_8, ξ_0, ξ_{5I}, ξ_{13IJ} с тремятся к обычным коэффициентам переноса для многокомпонентного вязкого теплопроводного газа.

Применяя эту процедуру к равенству (3.13), получаем выражения для объемной вязкости η_V и сдвиговой вязкости η_S:

$$\eta_V = -\beta\left(X_7 + \frac{2}{3}X_8\right)\bigg|_{k_\alpha=0}, \quad \eta_S = -\beta X_8\big|_{k_\alpha=0}$$

Рассматривая соотношение (3.12) при $f^I = 0$, выделяем составляющую, пропорциональную градиенту температуры, и коэффициент теплопроводности $\varkappa$:

$$\varkappa = -\beta^2 X_0\big|_{k_\alpha=0}$$

Наконец, из (3.14) можно выделить матрицу коэффициентов, связывающую диффузионные потоки и градиенты химических потенциалов

$$D_{ij} = -\beta X_{13IJ}\big|_{k_\alpha=0}$$

Из условия (3.11) следует действительность коэффициентов переноса. Неравенство

(2.15) обеспечивает неотрицательность коэффициентов η_V, η_S, $\varkappa$ и матрицы D_{ij}. Из условий взаимности (2.16) вытекает симметричность матрицы D_{ij}. В соответствии с (3.7)

$$\sum_{i=1}^{M} m_i D_{ij} = 0$$

Таким образом, в пределе медленных процессов и длинных волн нелокальная гидродинамика переходит в гидродинамику с классическими законами переноса.

4. Распространение сигнала. Известным недостатком моделей с классическими законами переноса является бесконечная скорость распространения сигнала.

Начиная с работы [31], осуществлялись попытки строить модели процессов переноса с конечной скоростью сигнала. Обобщая эти попытки, можно утверждать, что диссипативность и конечную скорость сигнала удается непротиворечиво совместить, вводя в теорию в той или иной форме временную нелокальность [32–34]. Случай, когда кроме временной нелокальности имеет место и пространственная нелокальность, рассматривался ранее [35].

Покажем, как совместить диссипативность и конечность скорости сигнала в рамках аксиоматики, предложенной в разд. 2. Пусть v – положительная постоянная с размерностью скорости. Опишем класс моделей, в которых скорость сигнала не превышает v. При этом будем опираться на теорию [36], основанную на методе аналитического продолжения на комплексные значения волнового 4-вектора k_α.

Предположим выполненным условие Б, а также то, что на пространственной бесконечности среда покоится.

Пусть s – малые величины, т.е. имеет место случай слабых источников. Согласно (2.4), (2.2), (2.12), (2.13) распространение возмущений в фурье-образах описывается уравнением

$$Af_F = s_F, \quad A = ik_0\Lambda + ik_a Z^a + B \tag{4.1}$$

В частности, дисперсионное уравнение для свободных волн имеет вид

$$\det A = 0 \tag{4.2}$$

Обозначим

а) T_1 – конус будущего в пространстве–времени;

$$T_1 = \{x^0 \geqslant 0,\ (x^0)^2 \geqslant v^{-2} x^a x^a\}$$

б) T_2 – труба в комплексном пространстве волновых 4-векторов $k_\alpha = \alpha_\alpha + i\beta_\alpha$ (α_α, β_α – действительные).

$$T_2 = \{\beta_0 < 0,\ (\beta_0)^2 > v^2 \beta_a \beta_a\}$$

Предположим, что скорость передачи сигнала в материальных соотношениях не превышает v (условие 1). На формальном языке это означает, что ядро $d_{AB}^{ab}(x^\alpha)$ обращается в нуль вне конуса T_1. Тогда согласно известным результатам [36] матрица B голоморфна в T_2, откуда следует, что и матрица A голоморфна в T_2.

Далее, примем, что неравенство (2.15) сохраняет силу в трубе T_2 (условие 2).

И наконец, положим, что для любого набора комплексных чисел y^A выполняется неравенство (условие 3)

$$y^{A*} y^B \Lambda_{AB} \geqslant v^{-1} \,|\, y^{A*} y^B Z_{AB}^1 \,|\tag{4.3}$$

Это предположение обеспечивает, что в отсутствие диссипации (для идеальной среды) скорость распространения возмущений не превосходит v.

Пусть y^A – произвольный ненулевой набор комплексных чисел. В соответствии с условием 2 и соотношениями (2.3), (2.14) в трубе T_2 выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}(y^{A*}y^B A_{AB}) \geqslant -\beta_0 y^{A*}y^B \Lambda_{AB} - \beta_a y^{A*}y^B Z^a_{AB}$$

Отсюда и из неравенства (4.3) следует, что в трубе T_2

$$\mathrm{Re}(y^{A*}y^B A_{AB}) > 0$$

и потому уравнение (4.2) не может выполняться ни в одной точке T_2.

Пусть s_A – импульсный мгновенный источник

$$s_A = a_A\delta(x^\alpha)$$

a_A – постоянный вектор, $s_{AF} = a_A$. Находим решение уравнения (4.1)

$$f_F = A^{-1}a$$

Из предыдущих результатов следует, что эта формула определяет вектор-функцию, голоморфную в трубе T_2. На границе трубы возможны степенные особенности. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим функцию $f_A(x^\alpha)$, равную нулю вне конуса T_1, что и требовалось.

Таким образом, дополнительные условия 1–3, накладываемые на гидродинамическую модель приводят к тому, что скорость распространения малых возмущений не превосходит v.

5. Функциональная форма ядер. При построении нелокальных гидродинамических моделей в рамках феноменологического подхода нужно задавать модельные выражения для ядер. При достаточно общем подходе представляется разумным использовать для скалярных функций X_n выражения вида

$$X = -\int \varphi_0(\tau)d\tau(ik_0 + \varphi_1(\tau))((ik_0 + \varphi_1(\tau))^2 + k_a k_a \varphi_2(\tau))^{-1} \quad (5.1)$$

где τ – непрерывный параметр, $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ – неотрицательные функции. Выражение (5.1) удовлетворяет условию (3.11), инвариантно относительно группы вращений и голоморфно при $\mathrm{Im}\, k_0 < 0$ (причинность). Кроме того, выполняется неравенство $\mathrm{Re}\, X < 0$, что позволяет удовлетворить требованию (2.16). Выражение (5.1) в зависимости от выбора функции $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ (включая случай $\varphi_0(\tau)$ в виде суммы δ-функций) охватывает большинство модельных и точных теоретических выражений для гидродинамических ядер.

6. Заключение. Предложенная аксиоматическая схема феноменологической гидродинамики предназначена для описания быстропротекающих процессов или коротких волн в объеме жидкости и газа. Можно обобщить теорию с учетом граничных условий; тогда в материальные соотношения войдут дополнительные нелокальные члены, описывающие влияние границ. Нелокальная гидродинамика переходит в классическую в пределе медленных процессов и длинных волн, поэтому формально нелокальная гидродинамика охватывает все области приложения классической гидродинамики. Однако фактически собственно нелокальные эффекты проявляются, когда классическая гидродинамика теряет применимость, например в задачах распространения ультразвука.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman S., Cowling T.G.* The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. Cambridge: Univ. press, 1952. XXIII. 431 p. = *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
2. *Ferziger J.H., Kaper H.G.* Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam; London:

North-Holland, 1972. XIII, 579 p. = *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
3. *Cercignani C.* Theory and the application of the Boltzmann equation. Edinburgh: Scottisch Acad. Press, 1975. 415 p. = *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
4. *Валландер С.В., Нагнибеда Е.А., Рыдалевская М.А.* Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 280 с.
5. *Алексеев Б.В.* Гидродинамические уравнения в кинетической теории реагирующих газов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. Вып. 5. С. 730–740.
6. *Шапиро А.А.* Кинетическая теория фильтрации разреженного газа в анизотропной пористой среде // Теорет. основы хим. технологии. 1993. Т. 27. Вып. 2. С. 155–164.
7. *Динариев О.Ю.* Распространение малых возмущений в релятивистском газе: связь кинетического и гидродинамического описаний // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. Вып. 1. С. 161–171.
8. *Динариев О.Ю.* Кинетическая теория релятивистского газа с внутренними степенями свободы в присутствии слабых источников // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 6. С. 1877–1894.
9. *Динариев О.Ю.* Переход от кинетического к нелокальному гидродинамическому описанию для нерелятивистского газа // Изв. вузов. Физика. 1995. № 2. С. 95–99.
10. *Динариев О.Ю.* Распространение слабых волн в газе: переход от кинетического к газодинамическому описанию // Акуст. журн. 1995. Т. 41. Вып. 3. С. 415–420.
11. *Динариев О.Ю.* Нелокальная гидродинамика квантовой релятивистской системе многих частиц // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 5. С. 1573–1586.
12. *Динариев О.Ю.* Свойства гидродинамических ядер квантовополевых моделей // Изв. вузов. Физика. 1995. № 7. С. 34–38.
13. *Динариев О.Ю.* Нелокальная гидродинамика в квантовополевой модели φ^4 // Теорет. и мат. физика. 1996. Т. 108. № 1. С. 50–68.
14. *Динариев О.Ю.* О связи классических коэффициентов переноса с гидродинамическими ядрами для квантовополевых моделей // Изв. вузов. Физика. 1996. № 8. С. 61–66.
15. *Динариев О.Ю.* Нелокальная гидродинамика квантовой системы многих частиц при нулевой температуре // Изв. вузов. Физика. 1997. № 8. С. 37–42.
16. *Динариев О.Ю.* О неотрицательности производства энтропии в гидродинамике квантовой системы многих частиц // Изв. вузов. Физика. 1998. № 5. С. 60–66.
17. *Динариев О.Ю.* Эквивалентность классической статистической механики и нелокальной гидродинамики в определенном классе внешних сил // Изв. вузов. Физика. 1998. № 3. С. 23–28.
18. *Рудяк В.Я.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.
19. *Рудяк В.Я.* Нелокальное решение уравнения Больцмана // Журн. техн. физики. 1995. Т. 65. Вып. 11. С. 29–40.
20. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
21. *Coleman B.D.* Thermodynamics of materials with memory // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 17. N 1. P. 1–46.
22. *Day W.A.* The thermodynamics of simple materials with fading memory. Berlin et al.: Springer, 1972. X + 134 p. = *Дэй У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
23. *Truesdell C.* Introduction à la mécanique rationelle des milieux continues. Paris: Masson, 1974. V. 16. 367 p. = *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
24. *Соболев С.Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167. № 10. С. 1095–1106.
25. *Динариев О.Ю.* О некоторых свойствах релаксационных ядер в системах с наследственностью // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 615–618.
26. *Динариев О.Ю.* О материальных соотношениях для жидкости с наследственностью и нелокальностью // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 67–71.
27. *Динариев О.Ю.* Материальные соотношения для релятивистской жидкости с нелокальностью // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 2. С. 356–359.
28. *Dieudonné J.* Foundations of modern analysis. N.Y.; L.: Acad. Press, 1960. XIV + 361 p. = = *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.

29. *Stein E.M., Weiss G.* Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, 1971. X + 297 p. = *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 331 с.
30. *Стратонович Р.Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985. 479 с.
31. *Cattaneo C.* Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // C.r. Acad. sci. 1958. T. 247. N 4. P. 431–433.
32. *Динариев О.Ю.* О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1095–1097.
33. *Динариев О.Ю.* О скорости распространения сигнала в жидкости с релаксацией // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 59–64.
34. *Динариев О.Ю.* Распространения сигнала в релятивистской жидкости с вязкостью и теплопроводностью // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 250–259.
35. *Динариев О.Ю.* Распространение сигнала для процессов переноса с пространственно-временной нелокальностью // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 4–6. С. 481–484.
36. *Владимиров В.С., Сергеев А.Г.* Комплексный анализ в трубе будущего // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 8. С. 191–266.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1997