УДК 531.36;62–50

© 1999 г. Х.Г. Гусейнов, А.А. Незнахин, В.Н. Ушаков

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается приближенное конструирование множеств достижимости управляемых систем с квадратичными интегральными ограничениями на управления. Предполагается, что управляемая система нелинейна относительно фазовой переменной, линейна по переменной, описывающей управляющее воздействие. Аппроксимация множеств достижимости управляемой системы осуществляется в несколько этапов. Последний класс управлений порождает конечное число траекторий системы. Далее траектории системы заменяются ломаными Эйлера. Получена оценка точности хаусдорфова расстояния между множеством достижимости и приближенно построенным множеством.

Ранее рассматривались управляемые системы с интегральными [1–5] и геометрическими [6–12] ограничениями на ресурсы управления.

1. Пусть дана управляемая система, поведение которой на отрезке $I = [t_0, \theta]$ ($t_0 < \theta < \infty$) описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t)) \cdot u(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$ – n-мерный фазовый вектор системы, u – r-мерный вектор управления, $f(t, x)$ – n-мерная вектор-функция, $B(t, x)$ – $(n \times r)$-мерная матрица-функция.

Предполагается, что реализации $u(t)$, $t \in I$ управления u стеснены ограничениями

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^2 dt \leq \mu_0^2 \tag{1.2}$$

где $\|\cdot\|$ означает евклидову норму, $\mu_0 \geq 0$ – ограничение на ресурсы управления. Предполагается, что выполнены следующие условия.

А. Функции $f(t, x)$ и $B(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных t, x, а также для любой ограниченной замкнутой области $D \subset I \times R^n$ существуют такие постоянные Липшица $L_i = L_i(D) \in (0, \infty)$ ($i = 1, 2$), что

$$\|f(t, x^*) - f(t, x_*)\| \leq L_1 \|x^* - x_*\|$$

$$\|B(t, x^*) - B(t, x_*)\| \leq L_2 \|x^* - x_*\|$$

при любых (t, x^*), (t, x_*) из D.

Б. Существуют такие постоянные $\gamma_i \in (0, \infty)$, ($i = 1, 2$), что

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma_1 (1 + \|x\|), \quad \|B(t, x)\| \leq \gamma_2$$

при любых $(t, x) \in I \times R^n$.

Здесь $\|B\|$ – евклидова норма матрицы B. Под допустимым управлением $u(\cdot) = \{u(t), t \in I\}$ будем понимать любую интегрируемую с квадратом функцию $u(\cdot)$ ($u(\cdot) \in L_2[t_0, \theta]$), удовлетворяющую неравенству (1.2). Класс всех допустимых управлений $u(\cdot)$ обозначим через U.

Под решением уравнения (1.1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in U$, будем понимать абсолютно непрерывную вектор-функцию от $x(t)$, $t \in I$, удовлетворяющую почти всюду на отрезке I этому уравнению.

Решение уравнения (1.1), отвечающее управлению $u(\cdot) \in U$, будем называть движением системы (1.1), порожденным управлением $u(\cdot)$. Через $X(t_0, x_0)$ обозначим совокупность всех движений системы (1.1), отвечающих всевозможным $u(\cdot) \in U$. Полагаем

$$X(t;\, t_0, x_0) = \{x(t) \in R^n\colon x(\cdot) \in X(t_0, x_0)\}$$

$$Z(t_0, x_0) = \{(t, x(t)) \in I \times R^n : x(\cdot) \in X(t_0, x_0)\}$$

$X(t;\, t_0, x_0)$ называется множеством достижимости управляемой системы (1.1) при ограничениях (1.2), отвечающим моменту времени t, а множество $Z(t_0, x_0)$ – интегральной воронкой системы (1.1). Очевидно, выполняется равенство

$$Z(t_0, x_0) = \{(t, X(t;\, t_0, x_0)) : t \in I\}$$

где обозначено $(t, X) = \{(t, x) : x \in X\}$.

Для дальнейших рассуждений укажем область $D \subset I \times R^n$, в которой содержится интегральная воронка $Z(t_0, x_0)$. Для простоты выберем эту область цилиндрической. Обозначим

$$D = \{(t, x) \in I \times R^n,\ \|x\| \leqslant r\},\ r = h(\theta)(1 + c\gamma_1(\theta - t_0)) \tag{1.3}$$

$$h(t) = \|x_0\| + \gamma_1(t - t_0) + \gamma_2\mu_0\sqrt{t - t_0},\ c = \exp[\gamma_1(\theta - t_0)]$$

Утверждение 1. Справедливо включение $Z(t_0, x_0) \subset D$, множество D определено соотношением (1.3).

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$ – произвольное движение системы (1.1), порожденное некоторым управлением $u(\cdot) \in U$. Справедливо представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau)) \cdot u(\tau))d\tau,\quad t \in I$$

В силу условия Б имеем

$$\|x(t)\| \leqslant h(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau) \cdot \|x(\tau)\| d\tau,\quad \psi(t) = \gamma_1,\quad t \in I$$

Функции $x(t)$, $h(t)$, $\psi(t)$, $t \in I$, входящие в неравенство, удовлетворяют условиям леммы Гронуолла ([13], с. 219). Используя эту лемму и учитывая, что функция $h(t)$ монотонно возрастает на I, имеем

$$\|x(t)\| \leqslant h(\theta)(1 + c\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1 d\tau) \leqslant h(\theta)(1 + c\gamma_1(\theta - t_0)),\quad t \in I \tag{1.4}$$

Поскольку $x(\cdot)$ – произвольное движение системы (1.1), из (1.4) получаем справедливость утверждения.

Везде в дальнейших рассуждениях будем иметь в виду в качестве множества D цилиндр (1.3).

2. Пусть $H \in (0, \infty)$. Введем в рассмотрение множество U_H всех управлений $u(\cdot) \in U$, для которых

$$\|u(t)\| \leqslant H, \quad t \in I \tag{2.1}$$

Символом $X_H(\theta; t_0, x_0)$ обозначим множество всех $x \in R^n$, в которые приходят в момент θ движения системы (1.1), порожденные всевозможными управлениями $u(\cdot) \in U_H$. Оценим сверху хаусдорфово расстояние между множествами $X(\theta; t_0, x_0)$ и $X_H(\theta; t_0, x_0)$. Обозначим

$$c_* = L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{1/2}\mu_0, \quad c_0 = 1 + c_* \exp[c_*] \tag{2.2}$$

Утверждение 2. Хаусдорфово расстояние $\alpha(X(\theta; t_0, x_0), X_H(\theta; t_0, x_0)) \to 0$ при $H \to \infty$; более того, справедливо неравенство

$$\alpha(X(t;t_0,x_0), X_H(t;t_0,x_0)) \leqslant 2\gamma_2 \frac{\mu_0^2}{H} c_0, \quad t \in I \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть выбраны произвольные управления $u(\cdot) \in U$ и $\tilde{u}(\cdot) \in U_H$. Они порождают соответственно движения $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ системы (1.1) на I, которые удовлетворяют неравенству

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \tilde{x}(\tau))\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|(B(\tau, x(\tau)) - B(\tau, \tilde{x}(\tau)))u(\tau)\| d\tau + \tag{2.4}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, \tilde{x}(\tau))(u(\tau) - \tilde{u}(\tau))\| d\tau, \quad t \in I$$

Учитывая условие А, из (2.4) получаем

$$\varepsilon(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in I \tag{2.5}$$

$$\varepsilon(t) = \|x(t) - \tilde{x}(t)\|, \quad \psi(t) = L_1 + L_2\|u(t)\|$$

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, \tilde{x}(\tau))\| \cdot \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\| d\tau$$

Теперь сделаем некоторое уточнение относительно пары управлений $u(\cdot)$, $\tilde{u}(\cdot)$. А именно, сначала выбираем управление $u(\cdot) \in U$, и по нему формируем управление $\tilde{u}(\cdot) \in U_H$:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } \|u(t)\| \leqslant H \\ u(t)\|u(t)\|^{-1} H, & \text{если } \|u(t)\| > H \end{cases} \tag{2.6}$$

Полагаем $\Omega_t = \{\tau \in [t_0, t] : \|u(\tau)\| > H\}$. Тогда $[t_0, t]\backslash\Omega_t = \{\tau \in [t_0, t] : \|u(\tau)\| \leqslant H\}$ и, согласно (2.6), $\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\| = 0$ при $\tau \in [t_0, t]\backslash\Omega_t$.

Справедливо неравенство

$$h(t) = \int_{\Omega_t} \|B(\tau, \tilde{x}(\tau))\| \cdot \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\| d\tau \leqslant \left(\int_{\Omega_t} \|B(\tau, \tilde{x}(\tau))\|^2 d\tau \right)^{1/2} \times \tag{2.7}$$

$$\times \left(\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}$$

Имеем также неравенство

$$H^2\mu(\Omega_t) \leq \int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^2 d\tau + \int_{[t_0,t]\setminus\Omega_t} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \mu_0^2$$

из которого следует, что $\mu(\Omega_t) \leq \mu_0^2/H^2$. Здесь $\mu(\Omega_t)$ – лебегова мера множества Ω_t. Тогда отсюда и из (2.7) вытекает неравенство

$$h(t) \leq (\gamma_2^2\mu(\Omega_t))^{1/2}[(\int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^2 d\tau)^{1/2} + (\int_{\Omega_t} \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau)^{1/2})] \leq$$

$$\leq \gamma_2\mu(\Omega_t)^{1/2} 2(\mu_0^2)^{1/2} \leq 2\gamma_2\mu_0^2/H, \quad t \in I$$

Учитывая неравенство

$$\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau \leq L_1(t-t_0) + L_2(t-t_0)^{1/2}(\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^2 d\tau)^{1/2} \leq \tag{2.8}$$

$$\leq L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{1/2}\mu_0, \quad t \in I$$

по лемме Гронуолла из неравенства (2.5) получаем

$$\varepsilon(t) \leq (1 + c_* \exp[c_*]) \cdot 2\gamma_2 \frac{\mu_0^2}{H} \leq 2\gamma_2 \frac{\mu_0^2}{H} c_0, \quad t \in I \tag{2.9}$$

Постоянные $c_* > 0$, $c_0 > 0$ определены соотношением (2.2).

Итак, показано, что для любого управления $u(\cdot) \in U$, порождающего движение $x(\cdot)$ системы (1.1) найдется управление $\tilde{u}(\cdot) \in U_H$, порождающее такое движение $\tilde{x}(\cdot)$, что выполняется неравенство (2.9). Так как $U_H \subset U$, то отсюда и из (2.9) следует справедливость утверждения.

3. Теперь, принимая во внимание оценку (2.3), можем свести решение задачи приближенного вычисления множества достижимости $X(t;\, t_0, x_0)$ к задаче приближенного вычисления множества достижимости $X_H(t;\, t_0, x_0)$, $t \in I$. Класс U_H представляет собой совокупность управлений, стесненных смешанными ограничениями (1.2) и (2.1).

Имея в виду приближенное вычисление множества достижимости $X_H(t;\, t_0, x_0)$, постараемся сузить класс управлений U_H. Осуществим это сужение в три приема: сначала сузим класс U_H до некоторого класса $\hat{U}_H$ кусочно-постоянных управлений; класс $\hat{U}_H$ сузим до класса $\check{U}_H$ кусочно-постоянных управлений $u(\cdot)$, нормы $\|u(t)\|$ значений $u(t)$ которых лежат на определенной равномерной сетке и, наконец, класс $\check{U}_H$ сузим до конечного класса $\tilde{U}_H$ управлений, у которых не только нормы значений управлений, но и сами эти значения в локальном смысле располагаются равномерно на некоторой сетке. Отметим, что каждый последующий класс управлений в определенном смысле более удобен для вычисления порождаемых им множеств достижимости. Так, самый удобный для вычисления множеств достижимости, это последний класс $\tilde{U}_H$. Он порождает конечное число движений системы (1.1).

Каждый раз при переходе от одного класса управлений к следующему, более узкому классу управлений, будем, пользуясь леммой Гронуолла, показывать, что этот следующий класс управлений достаточно хорошо аппроксимирует предыдущий, т.е. множества достижимости, отвечающие этим классам, достаточно близки друг к другу.

Введем в рассмотрение такое разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, ..., t_N = \theta\}$ отрезка $I = [t_0, \theta]$, что здесь и всюду далее

$$t_{i+1} - t_i = (\theta - t_0)/N = \Delta; \quad i = 0, 1, ..., N-1$$

Рассмотрим класс $\hat{U}_H$ всевозможных кусочно-постоянных управлений $\hat{u}(\cdot) \in U_H$, промежутками постоянства которых являются полуинтервалы $\hat{I}_i = [t_i, t_{i+1})$ разбиения Г. Множество достижимости системы (1.1), порождаемое этим классом $\hat{U}_H$ и отвечающее моменту времени $t \in I$, обозначим $\hat{X}_H(t; t_0, x_0)$. Полагаем

$$K = \max_{(t,x)\in D} \left\| f(t,x) \right\| \tag{3.1}$$

$$\varphi(\Delta) = (1+K)\Delta + \gamma_2 \mu_0 \Delta^{1/2} \tag{3.2}$$

$$\omega^*(\Delta) = \max_{|t^* - t_*| \leqslant \Delta, \|x^* - x_*\| \leqslant \Delta} \left\| B(t^*, x^*) - B(t_*, x_*) \right\| \tag{3.3}$$

$$\varkappa(\Delta) = 2\omega^*(\varphi(\Delta))(\theta - t_0)^{1/2}\mu_0 + 2\gamma_2 \mu_0 \Delta^{1/2} \tag{3.4}$$

$$(t^*, x^*) \in D, \quad (t_*, x_*) \in D, \quad \Delta \geqslant 0$$

Утверждение 3. Справедливо неравенство

$$\alpha(X_H(t; t_0, x_0), \quad \hat{X}_H(t; t_0, x_0)) \leqslant c_0 \varkappa(\Delta), \quad t \in I \tag{3.5}$$

Постоянная $c_0 > 0$ определена соотношением (2.2).

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ – произвольное управление из U_H. Поставим ему в соответствие управление $\hat{u}(\cdot)$, заданное равенством

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau, \quad t \in \hat{I}_i \tag{3.6}$$

По построению очевидно, что

$$\| \hat{u}(t) \| \leqslant \frac{1}{\Delta} V_{i1} \leqslant H, \quad t \in \hat{I}_i, \quad V_{in} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| u(\tau) \|^n \, d\tau, \quad n = 1, \ 2$$

Учитывая неравенство $V_{i1} \leqslant \Delta^{1/2} V_{i2}^{1/2}$, получаем, что $\Delta \| \hat{u}(t) \|^2 \leqslant V_{i2}$. В силу постоянства функции $\hat{u}(\cdot)$ на промежутке $\hat{I}_i$, выполняется равенство

$$\Delta \| \hat{u}(t) \|^2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| \hat{u}(\tau) \|^2 \, d\tau, \quad t \in \hat{I}_i$$

Отсюда получаем неравенство

$$\int_{t_0}^{\theta} \| \hat{u}(t) \|^2 \, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{\theta} \| u(\tau) \|^2 \, d\tau \leqslant \mu_0^2$$

Это означает, что $\hat{u}(\cdot) \in U_H$.

Пусть теперь $x(\cdot)$, $\hat{x}(\cdot)$ – движения системы (1.1), порожденные на I управлениями $u(\cdot)$ и $\hat{u}(\cdot)$ соответственно. Для них выполняется равенство

$$\| x(t) - \hat{x}(t) \| = \int_{t_0}^{t} \| f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \hat{x}(\tau)) \| d\tau + \int_{t_0}^{t} \| (B(\tau, x(\tau)) -$$

$$- B(\tau, \hat{x}(\tau))) u(\tau) \| d\tau + \| \int_{t_0}^{t} B(\tau, \hat{x}(\tau))(u(\tau) - \hat{u}(\tau)) d\tau \|, \quad t \in I$$

В силу условия А отсюда получаем

$$\varepsilon(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad t \in I \tag{3.7}$$

$$\varepsilon(t) = \|x(t) - \hat{x}(t)\|, \quad \psi(\tau) = L_1 + L_2\|u(\tau)\|$$

$$h(t) = \left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, \hat{x}(\tau)) \cdot (u(\tau) - \hat{u}(\tau)) d\tau \right\|$$

Для дальнейшего доказательства получим некоторые оценки. Из условия Б и обозначения (3.1) следуют неравенства

$$\|\hat{x}(\tau) - \hat{x}(t_i)\| \leqslant \left\| \int_{t_i}^{\tau} (f(s, \hat{x}(s)) + B(s, \hat{x}(s))\hat{u}(s)) ds \right\| \leqslant \int_{t_i}^{\tau} \|f(s, \hat{x}(s))\| ds + \int_{t_i}^{\tau} \|B(s, \hat{x}(s))\| \cdot \|\hat{u}(s)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant K(\tau - t_i) + \gamma_2 (\tau - t_i)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{\tau} \|\hat{u}(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \leqslant K\Delta + \gamma_2 \Delta^{1/2} \mu_0, \quad \tau \in \hat{I}_i$$

В силу обозначения (3.2) отсюда получаем

$$|\tau - t_i| \leqslant \varphi(\Delta), \quad \|\hat{x}(\tau) - \hat{x}(t_i)\| \leqslant \varphi(\Delta), \quad \tau \in \hat{I}_i \tag{3.8}$$

При обозначении (3.3) отсюда следует, что

$$\|B(\tau, \hat{x}(\tau)) - B(t_i, \hat{x}(t_i))\| \leqslant \omega^*(\varphi(\Delta)), \quad \tau \in \hat{I}_i \tag{3.9}$$

Получив необходимые соотношения, оценим теперь величину $h(t)$ из неравенства (3.7). При $t \in \hat{I}_k$ выполняется неравенство

$$h(t) \leqslant \left\| \int_{t_0}^{t_k} Y(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_{t_k}^{t} Y(\tau) d\tau \right\|, \quad t \in I, \quad Y(t) = B(t, \hat{x}(t)) \cdot (u(t)) - \hat{u}(t)) \tag{3.10}$$

В силу неравенства (3.9) для первого интеграла верна оценка

$$\left\| \int_{t_0}^{t_k} Y(\tau) d\tau \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y(\tau) d\tau \right\| = \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (B(\tau, \hat{x}(\tau)) - B(t_i, \hat{x}(t_i)))(u(\tau) - \hat{u}(\tau)) dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega^*(\varphi(\Delta))(\|u(\tau)\| + \|\hat{u}(\tau)\|) d\tau \leqslant \omega^*(\varphi(\Delta)) \cdot 2(\theta - t_0)^{1/2} \mu_0 \tag{3.11}$$

Для второго интеграла получаем

$$\left\| \int_{t_k}^{t} Y(\tau) d\tau \right\| \leqslant \int_{t_k}^{t} \gamma_2 (\|u(\tau)\| - \|\hat{u}(\tau)\|) d\tau \leqslant 2\gamma_2 \Delta^{1/2} \mu_0, \quad t \in \hat{I}_k \tag{3.12}$$

Тогда, используя соотношения (3.11) и (3.12), из неравенства (3.10) получаем оценку

$$h(t) \leqslant 2\omega^*(\varphi(\Delta))(\theta - t_0)^{1/2} \mu_0 + 2\gamma_2 \mu_0 \Delta^{1/2}, \quad t \in I$$

Применив лемму Гроноулла к неравенству (3.7), получаем

$$\varepsilon(t) \leqslant (1 + c_* \exp[c_*]) \varkappa(\Delta) \leqslant c_0 \varkappa(\Delta), \quad t \in I \tag{3.13}$$

Постоянные $c_* > 0$, $c_0 > 0$ определены соотношением (2.2), $\varkappa(\Delta) > 0$ – соотношением (3.4). Так как $\hat{U}_H \subset U_H$, то из соотношения (3.13) следует справедливость утверждения.

4. Введем разбиение $\Gamma^* = \{y_0 = 0, \ y_1, ..., y_R = H^2\}$ отрезка $[0, H^2]$, такое, что

$$y_{j+1} - y_j = H^2 / R = \Delta^*; \quad j = 0, 1, ..., R-1$$

Символом $\check{U}_H$ обозначим класс всевозможных управлений $\check{u}(\cdot) \in \hat{U}_H$, для которых значения $y(t) = \left\|\check{u}(t)\right\|^2$, $t \in I$ содержатся во множестве Γ^*. Таким образом, для любого управления $\check{u}(\cdot) \in \check{U}_H$ выполняется условие $\left\|\check{u}(t)\right\| = \text{const}$, $t \in \hat{I}_i$. И более того, $\left\|\check{u}(t)\right\|^2 = y_{j_i}$, где y_{j_i} – некоторое значение из Γ^*. Здесь и далее $i = 0, 1, ..., N-1$.

Множество достижимости системы (1.1), порожденное этим классом и отвечающее моменту времени $t \in I$, обозначим символом $\check{X}_H(t; t_0, x_0)$.

Утверждение 4. Справедливо неравенство

$$\alpha(\hat{X}_H(t;t_0,x_0), \ \check{X}_H(t;t_0,x_0)) \leqslant c_0 \gamma_2 \sqrt{\Delta^*} (\theta - t_0), \quad t \in I \tag{4.1}$$

Постоянная $c_0 > 0$ определена соотношением (2.2).

Доказательство. Пусть $\hat{u}(\cdot)$ – произвольное управление из $\hat{U}_H$. Тогда $\hat{u}(t) = \hat{u}_i = \text{const}$ при $t \in \hat{I}_i$.

Положим

$$\check{u}(t) = \sqrt{y_{j_i}} \left\|\hat{u}_i\right\|^{-1} \hat{u}_i, \quad t \in \hat{I}_i$$

где y_{j_i} – точки разбиения Γ^*, такие, что $\left\|\hat{u}_i\right\|^2 \in [y_{j_i}, y_{j_{i+1}})$. Очевидно, что $\left\|\check{u}(t)\right\|^2 = y_{j_i} \leqslant \left\|\hat{u}_i\right\|^2 = \left\|\hat{u}(t)\right\|^2$ при всех $t \in \hat{I}_i$. Следовательно,

$$\int_{t_0}^{\theta} \left\|\check{u}(t)\right\|^2 dt \leqslant \int_{t_0}^{\theta} \left\|\hat{u}(t)\right\|^2 dt \leqslant \mu_0^2$$

Таким образом, доказано, что $\check{u}(\cdot) \in \check{U}_H$.

Выполняется следующее соотношение:

$$\| \hat{u}(t) - \check{u}(t) \| = \| \hat{u}_i \| - \sqrt{y_{j_i}} \leqslant \sqrt{y_{j_i+1}} - \sqrt{y_{j_i}} \leqslant \sqrt{\Delta^*} \quad t \in \hat{I}_i \tag{4.2}$$

Пусть теперь $\hat{x}(t)$, $\check{x}(t)$, $t \in I$ – два движения системы (1.1), порожденные управлениями $\hat{u}(t)$, $\check{u}(t)$ соответственно. Верно равенство

$$\hat{x}(t) - \check{x}(t) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \hat{x}(\tau)) - f(\tau, \check{x}(\tau))) d\tau + \int_{t_0}^{t} (B(\tau, \hat{x}(\tau)) -$$

$$-B(\tau, \check{x}(\tau))) \hat{u}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau, \check{x}(\tau)) (\hat{u}(\tau) - \check{u}(\tau)) d\tau, \quad t \in I$$

или, согласно условию A,

$$\varepsilon(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in I \tag{4.3}$$

$$\varepsilon(t)=\left\|\hat{x}(t-\check{x}(t)\right\|,\quad \psi(\tau)=L_1+L_2\left\|\hat{u}(\tau)\right\|$$

$$h(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|B(\tau,\check{x}(\tau))\right\|\cdot\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|d\tau$$

Для функции $h(t)$, в силу условия Б и неравенства (4.2), верна оценка

$$h(t)\leqslant\gamma_2\sqrt{\Delta^*}(\theta-t_0),\quad t\in I$$

Тогда, применив лемму Гронуолла к неравенству (4.3), получаем

$$\varepsilon(t)\leqslant c_0\gamma_2\sqrt{\Delta^*}(\theta-t_0),\quad t\in I \tag{4.4}$$

Постоянная $c_0>0$ определена соотношением (2.2).

Так как верно вложение $\check{U}_H\subset\hat{U}_H$, то из соотношения (4.4) вытекает справедливость утверждения.

5. Пусть $S=\{u\in R^r:\|u\|=1\}$ – единичная сфера пространства R^r. Определим δ-сеть сферы S для некоторого заданного $\delta>0$ как $\Xi=\{s_0,s_1,\dots,s_p\}$.

Введем класс $\tilde{U}_H$ всевозможных управлений $\tilde{u}(\cdot)\in\check{U}_H$ таких, что на каждом промежутке $\hat{I}_i$ разбиения Γ они удовлетворяют соотношению

$$\tilde{u}(t)=\sqrt{y_{j_i}}\,s_{l_i},\quad t\in\hat{I}_i,\quad y_{j_i}\in\Gamma^*,\quad s_{l_i}\in\Xi \tag{5.1}$$

Тогда верно неравенство

$$\Delta\sum_{i=0}^{N-1}y_{j_i}\leqslant\mu_0^2,\quad y_{j_i}\in[0,H^2] \tag{5.2}$$

Обозначим через $\tilde{X}_H(t;t_0,x_0)$ множество достижимости системы (1.1), определяемое классом управлений $\tilde{U}_H$.

Утверждение 5. Справедливо неравенство

$$\alpha(\check{X}_H(t;t_0,x_0),\quad \tilde{X}_H(t;t_0,x_0))\leqslant c_0\gamma_2(\theta-t_0)H\delta,\quad t\in I \tag{5.3}$$

Постоянная $c_0>0$ определена сотношением (2.2).

Доказательство. В силу определения δ-сети, для любого управления $\check{u}(\cdot)\in\check{U}_H$ найдется такое управление $\tilde{u}(\cdot)\in\tilde{U}_H$, что выполняется неравенство

$$\left\|\check{u}(t)-\tilde{u}(t)\right\|\leqslant\delta\sqrt{y_{j_i}},\quad t\in\hat{I}_i \tag{5.4}$$

Пусть $\check{x}(t)$, $\tilde{x}(t)$ – движения системы (1.1), порожденные управлениями $\check{u}(t)$ и $\tilde{u}(t)$ соответственно. Тогда выполняется неравенство

$$\check{x}(t)-\tilde{x}(t)=\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\check{x}(\tau))-f(\tau,\tilde{x}(\tau)))d\tau+\int_{t_0}^{t}(B(\tau,\check{x}(\tau))-$$

$$-B(\tau,\tilde{x}(\tau)))\check{u}(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}B(\tau,\tilde{x}(\tau))(\check{u}(\tau)-\tilde{u}(\tau))d\tau,\quad t\in I$$

Отсюда в силу условия А получаем

$$\varepsilon(t)\leqslant h(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\psi(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau,\quad t\in I \tag{5.5}$$

$$\varepsilon(t)=\left\|\overset{\vee}{x}(t)-\tilde{x}(t)\right\|,\quad \psi(t)=L_1+L_2\left\|\overset{\vee}{u}(\tau)\right\|,\qquad h(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left\|B(\tau,\tilde{x}(\tau))\right\|\cdot\left\|\overset{\vee}{u}(\tau)-\tilde{u}(\tau)\right\|d\tau$$

В силу условия Б и неравенства (5.4), для функции $h(t)$ справедлива оценка

$$h(t)\leqslant\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|B(\tau,\tilde{x}(\tau))\right\|\cdot\left\|\overset{\vee}{u}(\tau)-\tilde{u}(\tau)\right\|d\tau\leqslant\sum_{i=0}^{k}\gamma_2\Delta\sqrt{y_{j_i}}\,\delta\leqslant\gamma_2(\theta-t_0)H\delta,\quad t\in\hat{I}_i$$

Тогда, применив к неравенству (5.5) лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\varepsilon(t)\leqslant c_0\gamma_2(\theta-t_0)H\delta,\quad t\in I \tag{5.6}$$

Постоянная $c_0 > 0$ определена соотношением (2.2).

Поскольку $\tilde{U}_H\subset\overset{\vee}{U}_H$, то из соотношения (5.6) следует справедливость утверждения.

6. Обсудим вопрос приближенного вычисления множества достижимости $\tilde{X}_H(\theta;t_0,x_0)$. Все рассуждения и оценки, которые будут получены, верны для общего случая $\tilde{X}_H(t;t_0,x_0)$, $t\in I$.

Любому движению $\tilde{x}(\cdot)$ системы (1.1), порожденному управлением $\tilde{u}(\cdot)\in\tilde{U}_H$, будем ставить в соответствие ломаную Эйлера

$$z(t)=z(t_i)+(t-t_i)(f(t_i,z(t_i))+B(t_i,z(t_i))\tilde{u}(t_i)),\qquad z(t_0)=\tilde{x}(t_0)=x_0,\quad t\in\hat{I}_i \tag{6.1}$$

Символом $Z(\theta;\,t_0,x_0)$ обозначим множество значений $z(\theta)$ ломаных Эйлера $z(\cdot)$, порожденных всевозможными управлениями $\tilde{u}(\cdot)\in\tilde{U}_H$.

Отметим, что значения $z(\theta)$ ломаных Эйлера (6.1) можно вычислять по рекуррентной формуле

$$z(t_{i+1})=z(t_i)+\Delta[f(t_i,z(t_i))+B(t_i,z(t_i))\sqrt{y_{j_i}}\,s_{l_i}] \tag{6.2}$$

$$z(t_0)=x_0,\quad y_{j_i}\in\Gamma^*,\quad s_{l_i}\in\Xi$$

Введем обозначения

$$K^*(\Delta)=\max_{|t^*-t_*|\leqslant\Delta,\ \|x^*-x_*\|\leqslant\Delta}\left\|f(t^*,x^*)-f(t_*,x_*)\right\| \tag{6.3}$$

$$\xi^*(\Delta)=K^*(\varphi(\Delta))+H\omega^*(\varphi(\Delta)),\quad \xi(\Delta)=\Delta\xi^*(\Delta) \tag{6.4}$$

$$L=L_1+HL_2,\quad \hat{c}=(\theta-t_0)\exp[L(\theta-t_0)] \tag{6.5}$$

$$(t^*,x^*)\in D,\quad (t_*,x_*)\in D,\quad \Delta\geqslant 0$$

Функции $\varphi(\Delta)$, $\omega^*(\Delta)$ определены соотношениями (3.2), (3.3) соответственно.

Утверждение 6. Справедливо неравенство

$$\alpha(\tilde{X}_H(\theta;t_0,x_0),\quad Z(\theta;t_0,x_0))\leqslant\hat{c}\xi^*(\Delta) \tag{6.6}$$

Доказательство. Для $\varepsilon_1=\left\|\tilde{x}(t_1)-z(t_1)\right\|$ верно неравенство

$$\varepsilon_1\leqslant\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\|f(\tau,\tilde{x}(\tau))-f(t_0,\tilde{x}(t_0))\right\|d\tau+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\|(B(\tau,\tilde{x}(\tau))-B(t_0,\tilde{x}(t_0)))\tilde{u}(t_0)\right\|d\tau$$

Отсюда, учитывая, что $\tilde{u}(t_0)=\sqrt{y_{j0}}, s_{t_0}, y_{j0}\in\Gamma^*$, $s_{t_0}\in\Xi$, и применяя рассуждения, аналогичные использовавшимся при получении неравенств (3.8), (3.9), можно показать, что

$$\varepsilon_1\leqslant\Delta\xi^*(\Delta)$$

Для $\varepsilon_2=\|\tilde{x}(t_2)-z(t_2)\|$ верна оценка

$$\varepsilon_2\leqslant\|\tilde{x}(t_1)-z(t_1)\|+\int_{t_1}^{t_2}\|f(\tau,\tilde{x}(\tau))-f(t_1,\tilde{x}(t_1))\|d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\|(B(\tau,\tilde{x}(\tau))-B(t_1,\tilde{x}(t_1)))\sqrt{y_{j_1}}s_{t_1}\right\|d\tau+\int_{t_1}^{t_2}\|f(t_1,\tilde{x}(t_1))-f(t_1,z(t_1))\|d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\|(B(t_1,\tilde{x}(t_1))-B(t_1,z(t_1)))\sqrt{y_{j_1}}s_{t_1}\right\|d\tau\leqslant\xi(\Delta)+\xi(\Delta)+\Delta L_1\xi(\Delta)+\Delta L_2H\xi(\Delta)\leqslant$$

$$\leqslant\xi(\Delta)\exp[L\Delta]+\xi(\Delta)$$

Аналогично, для $\varepsilon_3=\|\tilde{x}(t_3)-z(t_3)\|$ имеет место оценка

$$\varepsilon_3\leqslant\xi(\Delta)\exp[L(\Delta+\Delta)]+\xi(\Delta))\exp[L\Delta]+\xi(\Delta)$$

В конечном итоге для $\varepsilon_N=\|\tilde{x}(t_N)-z(t_N)\|=\|\tilde{x}(\theta)-z(\theta)\|$ получаем

$$\varepsilon_N\leqslant\exp[L(\theta-t_0)]\sum_{i=0}^{N-1}\xi(\Delta)=\hat{c}\xi^*(\Delta) \tag{6.7}$$

Поскольку класс управлений $\tilde{U}_H$ состоит из кусочно-постоянных функций вида (5.1), то из соотношения (6.7) следует справедливость утверждения.

7. Из утверждений 2–6 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема. Справедлива оценка

$$\alpha(X(\theta;t_0,x_0),\ \ Z(\theta;t_0,x_0))\leqslant 2c_0\gamma_2\mu_0^2/H+c_0\varkappa(\Delta)+$$

$$+c_0\gamma_2(\theta-t_0)\sqrt{\Delta^*}+c_0\gamma_2(\theta-t_0)H\delta+\hat{c}\xi^*(\Delta) \tag{7.1}$$

Постоянные $c_0>0$, $\varkappa(\Delta)>0$, $\xi^*(\Delta)>0$, $\hat{c}>0$ определены соотношениями (2.2), (3.4), (6.4), (6.5) соответственно.

Следствие. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ можно подобрать такие числа $H>0$, $\Delta>0$, $\Delta^*>0$, $\delta>0$, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha(X(\theta;t_0,x_0),\ \ Z(\theta;t_0;x_0))\leqslant\varepsilon$$

Отметим, что если система (1.1) автономна, т.е. имеет вид

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+B(x(t))u$$

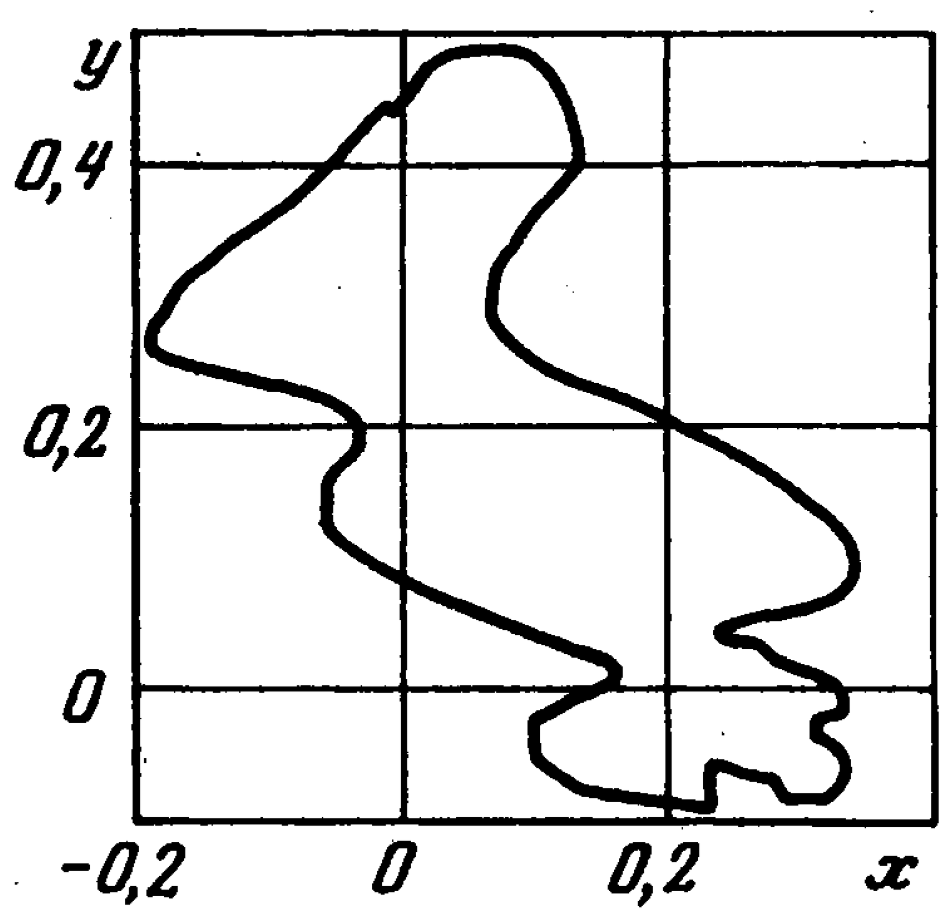
то $\omega^*(\Delta)=L_2\Delta$, $K^*(\Delta)=L_1\Delta$, $\xi^*(\Delta)=L\Delta$, и оценка (7.1) принимает вид

$$\alpha(X(\theta;t_0,x_0),\ \ Z(\theta;t_0,x_0))\leqslant 2c_0\gamma_2\mu_0^2/H+c_0[2L_2\varphi(\Delta)(\theta-t_0)^{1/2}\mu_0+2\gamma_2\mu_0\Delta^{1/2}]+$$

$$+c_0\gamma_2(\theta-t_0)\sqrt{\Delta^*}+c_0\gamma_2(\theta-t_0)H\delta-\hat{c}L\varphi(\Delta)$$

Постоянные $\varphi(\Delta)$, $L>0$ определены соотношениями (3.2), (6.5) соответственно.

Пример. Пусть поведение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением



$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}\cos 100\sqrt{|y|} + 0,1u_1, \quad x(0) = 0 \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}\cos 100x + 0,1u_2, \quad y(0) = 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

где $t \in [0;\ 0,07]$, а управляющее воздействие $u = (u_1, u_2) \in R^2$ стеснено интегральным ограничением

$$\int_0^{0,07} \|u(t)\|^2 dt = \int_0^{0,07} [u_1(t)^2 + u_2(t)^2] dt \leq \mu_0^2 = \frac{1}{4}$$

На фигуре показано множество достижимости управляемой системы (7.2) в момент времени $\theta = 0,07$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментаьных исследований (99-01-00146 и 96-15-96245).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Ченцов А.Г.* Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений // Кибернетика и сист. анализ. 1995. № 1. С. 87–99.
3. *Ухоботов В.И.* Однотипная линейная игра со смешанными ограничениями на управления // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 179–185.
4. *Соколов Б.Н.* Об одной дифференциальной игре с запаздыванием информации при наличии интегральных ограничений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 10. С. 1797–1804.
5. *Соломатин А.М.* Игровая задача сближения – уклонения для линейной системы с интегральными ограничениями на управление игроков // Прикл. матем. и механика. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 568–573.
6. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical / control problems. New York: Springer, 1987. 540 p.
7. *Chernousko F.L.* State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: SRC Press, 1994. 304 p.
8. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and control. Boston: Bikhauser, 1996. 321 p.
9. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 179–187.
10. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
11. *Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.* Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 737–744.
12. *Никольский М.С.* Об одном методе аппроксимации множеств достижимости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 8. С. 1252–1254.
13. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
3.IX.1998