УДК 531.36

© 1999 г. А.А. Майлыбаев, А.П. Сейранян

ОБ ОБЛАСТЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Исследуются линейные автономные гамильтоновы системы с произвольным числом степеней свободы, гладко зависящие от вектора вещественных параметров. Выделены и описаны все виды особенностей общего положения границы области устойчивости гамильтоновых систем в случае двух и трех параметров. В первом приближении определена геометрия этих особенностей (ориентация в пространстве параметров, величины углов и т.п.) по первым производным матрицы системы по параметрам, а также собственным и присоединенным векторам, вычисленным в точке особенности. Подробно изучены гироскопические системы как частный случай гамильтоновых. В качестве механических примеров рассмотрены задачи об устойчивости колебаний трубы, по которой течет жидкость, и об устойчивости вращения системы, состоящей из двух тел. В точках особенностей типа "точка возврата" и "двугранный угол", возникающих на границах областей устойчивости этих систем, найдены касательные конусы к областям устойчивости.

Были перечислены [1] все типы жордановых структур, которые возникают в случае общего положения для двух- и трехпараметрических семейств гамильтоновых матриц. Ниже выделяются и описываются все виды особенностей общего положения границы области устойчивости гамильтоновых и гироскопических систем в случае двух и трех параметров. В первом приближении определена геометрия этих особенностей по первым производным матриц системы по параметрам, а также собственным и присоединенным векторам, вычисленным в точке особенности. Доказательства основаны на теории возмущений собственных значений матриц, зависящих от параметров [2, 3], и теории миниверсальных деформаций гамильтоновых матриц [1]. Разработанные ниже методы применимы для исследования особенностей в случае, когда число параметров больше трех. Эти методы и полученные с их применением результаты представляют собой дальнейшее развитие и углубление подхода к исследованию особенностей, который применялся авторами [4] для изучения особенностей границ областей устойчивости семейств несимметрических матриц.

1. Бифуркации мнимых собственных значений гамильтоновых матриц. Рассмотрим механическую систему с m степенями свободы, описываемую каноническими переменными Гамильтона $q_1, q_2,\ldots, q_m, p_1, p_2,\ldots, p_m$. Представим эти переменные как компоненты вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}$, $q_i = x_i$, $p_i = x_{m+i}$ $(i = 1,\ldots, m)$ и предположим, что данная механическая система имеет гамильтониан $H = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/2$, где $\mathbf{A}$ – вещественная симметрическая квадратная матрица порядка $2m$, гладко зависящая от вектора вещественных параметров $\mathbf{h} = (h_1, h_2,\ldots, h_n)^T$ и не зависящая от времени.

Если ввести квадратную блочную матрицу

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{I}_m & \mathbf{O} \end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{I}_m$ и $\mathbf{O}$ – соответственно единичная и нулевая квадратные матрицы порядка m, то систему канонических уравнений Гамильтона $\dot{\mathbf{q}} = H_p$, $\dot{\mathbf{p}} = -H_q$ можно записать в виде [5]

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{JAx} \tag{1.1}$$

Системы, описываемые уравнениями (1.1), называются линейными гамильтоновыми системами, а матрица $\mathbf{JA}$ – гамильтоновой матрицей.

Рассмотрим задачу на собственные значения для системы (1.1)

$$[\mathbf{JA} - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{u} = 0$$

где λ – собственное значение (СЗ), $\mathbf{u}$ – собственный вектор размерности $2m$, а $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка $2m$. СЗ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m}$ определяются из характеристического уравнения $\det[\mathbf{JA} - \lambda\mathbf{I}] = 0$. Комплексные СЗ гамильтоновой матрицы $\mathbf{JA}$ образуют четвёрки λ, $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$, расположенные симметрично относительно мнимой и действительной осей на комплексной плоскости, и двойки λ, $-\lambda$, когда они чисто действительные или мнимые, а СЗ $\lambda = 0$ может иметь только четную алгебраическую кратность [6].

Рассмотрим точку $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ в пространстве параметров. Для дальнейшего исследования потребуются соотношения, определяющие распад кратных СЗ матрицы $\mathbf{JA}_0 = \mathbf{JA}(\mathbf{h}_0)$ при возмущении параметров. С этой целью придадим вектору параметров приращение в виде $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \varepsilon\mathbf{e}$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор вариации. Вследствие возмущения вектора параметров СЗ также получат приращения, которые в зависимости от жордановой структуры матрицы $\mathbf{JA}_0$ имеют различные представления.

1°. Пусть матрица $\mathbf{JA}_0$ имеет мнимое СЗ $\lambda_0 = i\omega$ (в случае нулевого СЗ $\omega = 0$), которому соответствует одна жорданова клетка порядка k. Обозначим через $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ цепочки Жордана прямой и сопряженной задачи, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{array}{ll}
[\mathbf{JA}_0 - i\omega\mathbf{I}]\mathbf{u}_0 = 0, & [\mathbf{JA}_0 - i\omega\mathbf{I}]^*\mathbf{v}_0 = 0 \\
[\mathbf{JA}_0 - i\omega\mathbf{I}]\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0, & [\mathbf{JA}_0 - i\omega\mathbf{I}]^*\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \\
\vdots & \vdots \\
[\mathbf{JA}_0 - i\omega\mathbf{I}]\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_{k-2}, & [\mathbf{JA}_0 - i\omega\mathbf{I}]^*\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{v}_{k-2}
\end{array}$$

Введем условия нормировки $\mathbf{v}_0^*\mathbf{u}_{k-1} = 1$, $\mathbf{v}_j^*\mathbf{u}_{k-1} = 0$ ($j = 1, \ldots, k-1$), которые по фиксированным векторам $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$ однозначно определяют векторы $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$. Определим векторы $\mathbf{f}_j = (f_j^1, f_j^2, \ldots, f_j^n)^T \in \mathbb{R}^n$ ($j = 0, \ldots, k-1$) с компонентами

$$f_j^l = -i^{k-j} \sum_{r=0}^{j} \mathbf{v}_r^* \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_l} \mathbf{u}_{j-r}, \quad l = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

где производные по параметрам берутся в точке $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$. Векторы $\mathbf{f}_0, \ldots, \mathbf{f}_{k-1}$ вещественны и не зависят от выбора цепочки векторов $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$. Они будут использованы ниже для описания геометрии особенностей.

Рассмотрим отдельно случай $k = 2$. В этом случае выражения для компонент вектора $\mathbf{f}_0$ можно пребразовать к виду

$$f^s = -\left(\mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s} \mathbf{u}_0\right)(\mathbf{u}_1^*[\mathbf{A}_0 + i\omega\mathbf{J}]\mathbf{u}_1)^{-1} \tag{1.3}$$

Для удобства в формуле (1.3) и ниже нулевой индекс у вектора $\mathbf{f}_0$ (при $k = 2$) опускается. При помощи вектора $\mathbf{f}$ распад двукратного СЗ $\lambda_0 = i\omega$ на два простых СЗ описывается следующим образом [2, 3]:

$$\lambda = i\omega \pm \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{e})\varepsilon} + O(\varepsilon) \tag{1.4}$$

(скобками обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Из симметрии СЗ относительно мнимой оси и соотношения (1.4) следует, что двукратное $\lambda_0 = i\omega$ при $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) < 0$ расщепляется на два чисто мнимых СЗ.

2°. Рассмотрим случай, когда матрица $\mathbf{JA}_0$ имеет двукратное мнимое СЗ $\lambda_0 = i\omega \neq 0$, которому соответствуют два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$. Эти векторы выберем удовлетворяющими условию ортогональности $\mathbf{u}'^*\mathbf{Ju}'' = 0$. Введем вещественные постоянные b_1, b_2 и векторы $\mathbf{g}_j = (g_j^1, \dots, g_j^n)^T \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, 2, 3)$ по формулам

$$\begin{gathered} b_1 = -i\mathbf{u}'^*\mathbf{Ju}', \quad b_2 = -i\mathbf{u}''^*\mathbf{Ju}'' \\ g_1^s = \left(\mathbf{u}'^* \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s}\mathbf{u}'\right)b_2 - \left(\mathbf{u}''^* \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s}\mathbf{u}''\right)b_1, \quad g_2^s + ig_3^s = 2\sqrt{|b_1 b_2|}\left(\mathbf{u}'^* \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s}\mathbf{u}''\right) \end{gathered} \tag{1.5}$$

где производные по параметрам берутся в точке $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$.

Расщепление двукратного СЗ $\lambda_0 = i\omega$ при возмущении параметров определяется выражением $\lambda = i\omega + \varepsilon\mu + o(\varepsilon)$, где два значения величины первой поправки μ находятся из решения квадратного уравнения [2, 3]

$$\det[\mathbf{u}_i^*\mathbf{A}_1\mathbf{u}_j + \mu\mathbf{u}_i^*\mathbf{Ju}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2; \quad \mathbf{A}_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} e_k$$

Можно показать, что двукратное СЗ $\lambda_0 = i\omega$ расщепляется на два чисто мнимых простых СЗ, если

$$D = -(\mathbf{g}_1, \mathbf{e})^2 - \operatorname{sign}(b_1 b_2)[(\mathbf{g}_2, \mathbf{e})^2 + (\mathbf{g}_3, \mathbf{e})^2] < 0 \tag{1.6}$$

и на два комплексных СЗ с ненулевыми и противоположными по знаку действительными частями, если $D > 0$.

3°. Рассмотрим случай, когда матрица $\mathbf{JA}_0$ имеет двукратное СЗ $\lambda_0 = 0$ с линейно независимыми собственными векторами $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$, которые выберем действительными и удовлетворяющими условиям нормировки $\mathbf{u}'^T\mathbf{Ju}'' = 1$. Введем векторы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_{12} \in \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$k_1^s = \mathbf{u}'^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s}\mathbf{u}', \quad k_2^s = \mathbf{u}''^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s}\mathbf{u}'', \quad k_{12}^s = \mathbf{u}'^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial h_s}\mathbf{u}'', \quad s = 1, \dots, n \tag{1.7}$$

При помощи этих векторов расщепление двукратного СЗ $\lambda_0 = 0$ на два простых СЗ описывается соотношением

$$\lambda = \pm\sqrt{D_1}\,\varepsilon + o(\varepsilon), \quad D_1 = (\mathbf{k}_{12}, \mathbf{e})^2 - (\mathbf{k}_1, \mathbf{e})(\mathbf{k}_2, \mathbf{e}) \tag{1.8}$$

При $D_1 < 0$ двукратный нуль расщепляется на два чисто мнимых простых СЗ.

2. Особенности границ областей устойчивости семейств гамильтоновых матриц. Исследуем устойчивость тривиального решения $\mathbf{x} = 0$ гамильтоновой системы (1.1). Это решение устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все СЗ чисто мнимые и полупростые. Точка $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$, которой отвечают только простые чисто мнимые $\lambda = \pm\, i\omega \neq 0$, всегда является внутренней точкой области устойчивости, а точки границы области устойчивости (ГОУ) характеризуются наличием кратных чисто мнимых или нулевых λ (когда остальные СЗ – простые и чисто мнимые) [6].

Точки ГОУ будем различать по типу жордановой структуры гамильтоновой матрицы, который обозначим через произведение определителей жордановых клеток, относящихся к кратным СЗ [7]. Например, $(\pm i\omega_1)^3(\pm i\omega_2)^2$ означает наличие пары трехкратных СЗ $\lambda = \pm i\omega_1 \neq 0$ с жордановыми клетками порядка 3 и пары двукратных СЗ $\lambda = \pm i\omega_2 \neq 0$, $\omega_2 \neq \omega_1$ с жордановыми клетками порядка 2; 00 означает наличие двукратного СЗ $\lambda = 0$ с двумя жордановыми клетками первого порядка и т.д. Не перечисленные СЗ подразумеваются простыми и чисто мнимыми.

ГОУ состоит из гладких гиперповерхностей, которые могут иметь различные особенности. В неособых точках она характеризуется матрицами типов 0^2 и $(\pm i\omega)^2$ [1]. Расщепление двукратного СЗ $\lambda_0 = i\omega$ (или $\lambda_0 = 0$) в окрестности неособой точки ГОУ описывается соотношением (1.4). Заметим, что остальные СЗ остаются простыми и чисто мнимыми в окрестности этой точки [6]. Из (1.4) следует, что при $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) < 0$ двукратное СЗ λ_0 расщепляется вдоль мнимой оси (устойчивость). Если же $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) > 0$, то в результате возмущения параметров появится СЗ с положительной действительной частью (неустойчивость). Векторы $\mathbf{e}$, касательные к ГОУ, находятся из условия $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = 0$. Следовательно, вектор $\mathbf{f}$, вычисленный в рассматриваемой точке для $\lambda_0 = i\omega$ (или $\lambda_0 = 0$), является нормалью к ГОУ, лежащей в области неустойчивости. Статическая и колебательная формы потери устойчивости в точках 0^2 и $(\pm i\omega)^2$ в технической литературе называются дивергенцией и флаттером соответственно.

Типы особых точек ГОУ двухпараметрических семейств гамильтоновых матриц в случае общего положения выделяются из общего списка особенностей этих матриц, приведенного ранее [1]: 0^4, $(\pm i\omega)^3$, $0^2(\pm i\omega)^2$, $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$.

В дальнейшем потребуется понятие касательного конуса [8]. Касательным конусом (КК) к области устойчивости в точке ее границы называется множество направлений векторов $\mathbf{e}$, по которым из данной точки можно выпустить кривую, лежащую в области устойчивости. КК называется невырожденным, если он высекает на сфере множество ненулевой меры. КК описывает область устойчивости в окрестности рассматриваемой точки в линейном приближении и содержит основную информацию о геометрии особенности. В настоящем разделе рассматриваются особенности с невырожденными КК, а исследованию особых точек с вырожденными КК посвящен следующий раздел.

Рассмотрим точку типа $0^2(\pm i\omega)^2$. По аналогии с рассмотренными выше точками типа 0^2 и $(\pm i\omega)^2$, если $(\mathbf{f}^0, \mathbf{e}) < 0$, $(\mathbf{f}^{i\omega}, \mathbf{e}) < 0$ (верхний индекс у вектора означает СЗ, для которого он вычислен), то расщепление двукратных СЗ $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm i\omega$ происходит вдоль мнимой оси (устойчивость). Если одно из неравенств имеет обратный знак, то в результате возмущения появится СЗ, удовлетворяющее условию $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (неустойчивость). Рассматриваемая особая точка представляет собой точку излома ГОУ. Векторы $\mathbf{f}^0$ и $\mathbf{f}^{i\omega}$ являются нормалями к соответствующим сторонам угла, направленными в область неустойчивости (фиг. 1, область устойчивости обозначена буквой S). Особенность $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ также представляет собой точку излома ГОУ, а векторы $\mathbf{f}^{i\omega_1}$ и $\mathbf{f}^{i\omega_2}$ являются, аналогично, нормалями к сторонам угла, направленными в область неустойчивости, фиг. 1. КК к области устойчивости в точках типа $0^2(\pm i\omega)^2$ и $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ имеют вид

$$K_{0^2(\pm i\omega)^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}^0, \mathbf{e}) \leq 0, \quad (\mathbf{f}^{i\omega}, \mathbf{e}) \leq 0\} \tag{2.1}$$

$$K_{(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}^{i\omega_1}, \mathbf{e}) \leq 0, \quad (\mathbf{f}^{i\omega_2}, \mathbf{e}) \leq 0\} \tag{2.2}$$

(неравенства нестрогие, так как КК – замкнутое множество). Остальные особенности двухпараметрических семейств 0^4 и $(\pm i\omega)^3$ являются точками возврата (КК вырождены) и будут рассмотрены в следующем разделе.

При наличии трех параметров особенности ГОУ в случае общего положения составляют гладкие кривые типа 0^4, $(\pm i\omega)^3$, $0^2(\pm i\omega)^2$, $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$, а также изолированные точки типов $(\pm i\omega)(\pm i\omega)$, 00, $(\pm i\omega)^4$, 0^6, $0^4(\pm i\omega)^2$, $(\pm i\omega)^3 0^2$, $(\pm i\omega_1)^3(\pm i\omega_2)^2$, $0^2(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$, $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2(\pm i\omega_3)^2$ [1].

Кривые типа $0^2(\pm i\omega)^2$ и $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ образуют ребра ГОУ, фиг. 2. Особенность в точке такой кривой называется "двугранный угол", а КК описывается соотношениями (2.1), (2.2). Векторы $\mathbf{f}^0$, $\mathbf{f}^{i\omega}$ для точки ребра типа $0^2(\pm i\omega)^2$ являются нормалями к сторонам двугранного угла, лежащими в области неустойчивости. Касательный вектор к ребру $\mathbf{e}_\tau$ ортогонален обоим векторам $\mathbf{f}^0$ и $\mathbf{f}^{i\omega}$ и может быть найден в виде их векторного произведения $\mathbf{e}_\tau = \mathbf{f}^0 \times \mathbf{f}^{i\omega}$. Аналогично, касательный вектор к ребру типа $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ можно найти в виде $\mathbf{e}_\tau = \mathbf{f}^{i\omega_1} \times \mathbf{f}^{i\omega_2}$.

В точках $0^2(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ и $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2(\pm i\omega_3)^2$ реализуются особенности типа "трехгранный угол", фиг. 2. Эти точки отличаются от $0^2(\pm i\omega)^2$ и $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ наличием еще одной пары двукратных СЗ типа $(\pm i\omega)^2$, что приводит к дополнительному ограничению на вектор $\mathbf{e}$, лежащий в области устойчивости. КК к области устойчивости определяются соотношениями

$$K_{0^2(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}^0, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^{i\omega_1}, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^{i\omega_2}, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{2.3}$$

$$K_{(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2(\pm i\omega_3)^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}^{i\omega_1}, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^{i\omega_2}, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^{i\omega_3}, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{2.4}$$

Из особой точки $0^2(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$ выходят три ребра вдоль направлений $\mathbf{e}_{\tau 1}$, $\mathbf{e}_{\tau 2}$, $\mathbf{e}_{\tau 3}$, каждое из которых ортогонально двум из векторов $\mathbf{f}^0$, $\mathbf{f}^{i\omega_1}$, $\mathbf{f}^{i\omega_2}$ и направлено в сторону, противоположную третьему вектору. Например, $\mathbf{e}_{\tau 1} = \pm \mathbf{f}^{i\omega_1} \times \mathbf{f}^{i\omega_2}$, где знак выбирается так, чтобы $(\mathbf{f}^0, \mathbf{e}_{\tau 1}) < 0$. Аналогично находятся направляющие векторы ребер в случае особенности $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2(\pm i\omega_3)^2$.

Точка 00 отвечает особенности типа "конус" (фиг. 2). Распад двукратного СЗ $\lambda_0 = 0$ в этом случае описывается соотношением (1.8). Расщепление происходит вдоль мнимой оси (устойчивость) при $(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{e}) < (\mathbf{k}_1, \mathbf{e})(\mathbf{k}_2, \mathbf{e})$ и вдоль действительной оси (неустойчивость), если в неравенстве взять противоположный знак. КК к области устойчивости в точке типа 00 имеет вид

$$K_{00} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{k}_{12}, \mathbf{e})^2 \leqslant (\mathbf{k}_1, \mathbf{e})(\mathbf{k}_2, \mathbf{e})\} \tag{2.5}$$

Точка типа $(\pm i\omega)(\pm i\omega)$ в случае, когда величина $b_1 b_2$, где b_1 и b_2 определены в (1.5), положительна, является внутренней точкой области устойчивости и не образует особенности. Это следует из того, что условие расщепления двукратного СЗ $\lambda = i\omega$ вдоль мнимой оси (1.6) принимает вид $-(\mathbf{g}_1, \mathbf{e})^2 - (\mathbf{g}_2, \mathbf{e})^2 - (\mathbf{g}_3, \mathbf{e})^2 < 0$ и выполняется для всех направлений $\mathbf{e}$ (если векторы $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ линейно независимы). В случае $b_1 b_2 < 0$ в точке $(\pm i\omega)(\pm i\omega)$ реализуется особенность типа "конус", фиг. 2. Условие расщепления вдоль мнимой оси в этом случае принимает вид $(\mathbf{g}_1, \mathbf{e})^2 \geqslant (\mathbf{g}_2, \mathbf{e})^2 + (\mathbf{g}_3, \mathbf{e})^2$; отсюда получим выражение для КК к области устойчивости

$$K_{(\pm i\omega)(\pm i\omega)} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{g}_1, \mathbf{e})^2 \geqslant (\mathbf{g}_2, \mathbf{e})^2 + (\mathbf{g}_3, \mathbf{e})^2\} \tag{2.6}$$

Введем векторы

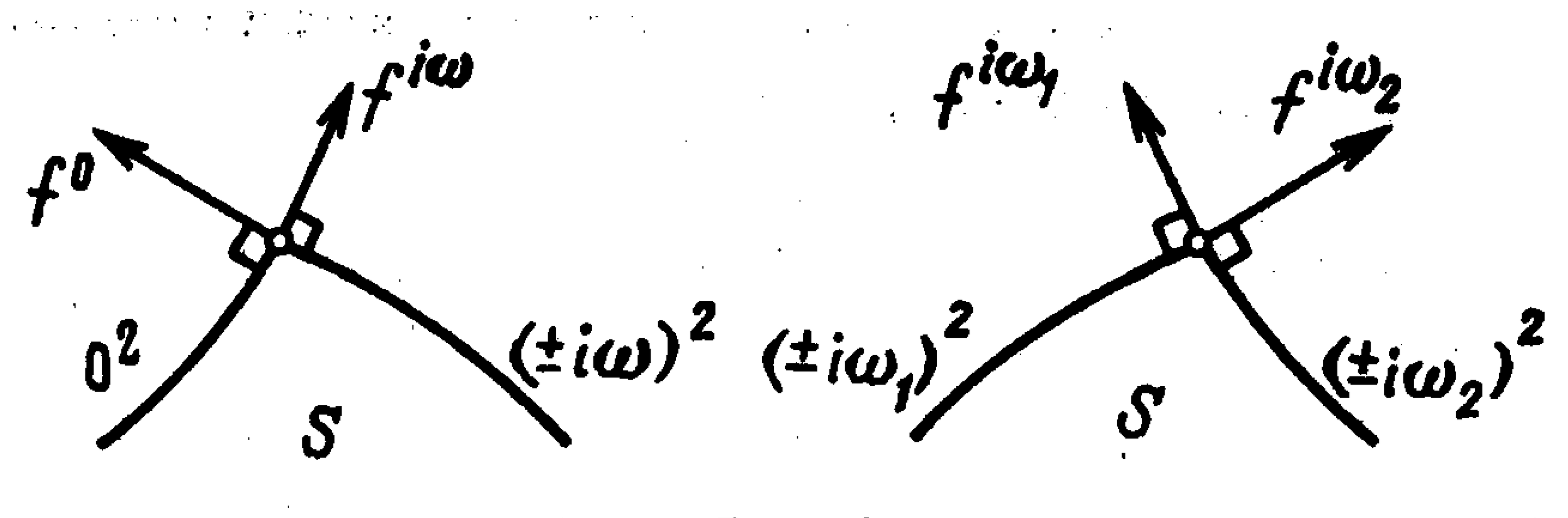
$$\mathbf{a} = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_3$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{k}_{12} \times (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1), \quad \mathbf{b}' = -\mathbf{k}_{12} \times (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{c}' = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1$$

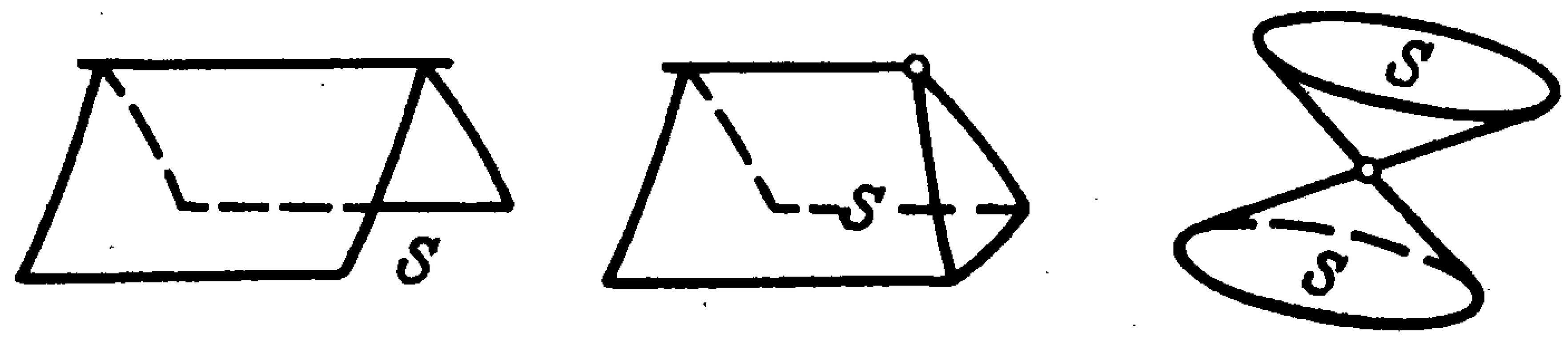
С помощью этих векторов КК (2.6) можно записать в виде

$$K_{(\pm i\omega)(\pm i\omega)} = \{\mathbf{e} : \mathbf{e} = t(\mathbf{a} + d(\mathbf{b} \sin\alpha + \mathbf{c}\cos\alpha)), \quad t, \alpha \in \mathbb{R}, \quad d \in [0, 1]\} \tag{2.7}$$

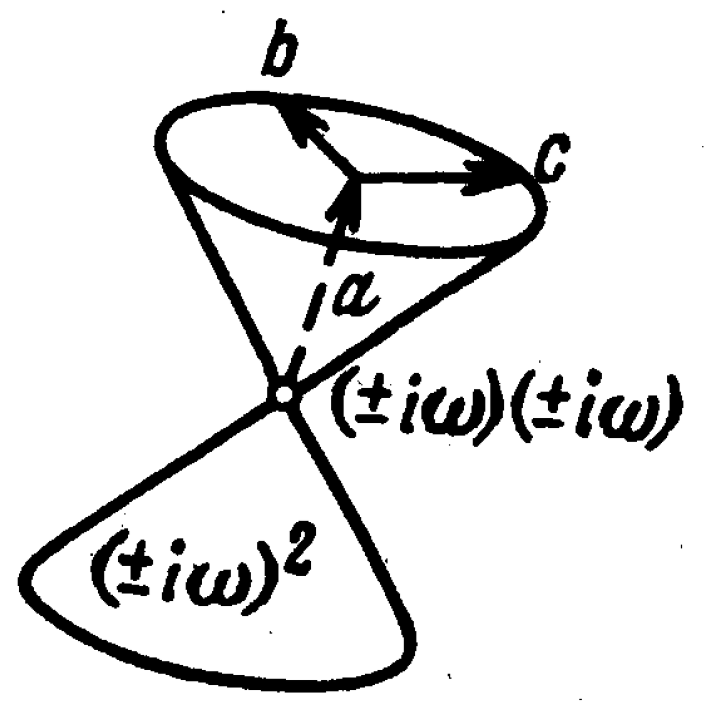
КК (2.5) записывается аналогично при замене $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$.



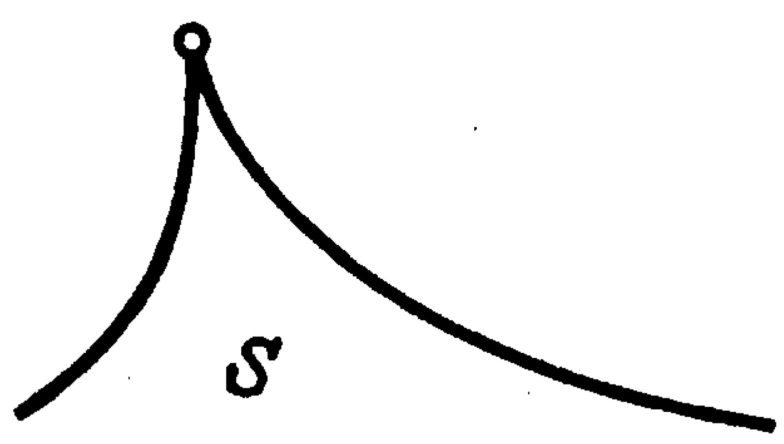
Фиг. 1



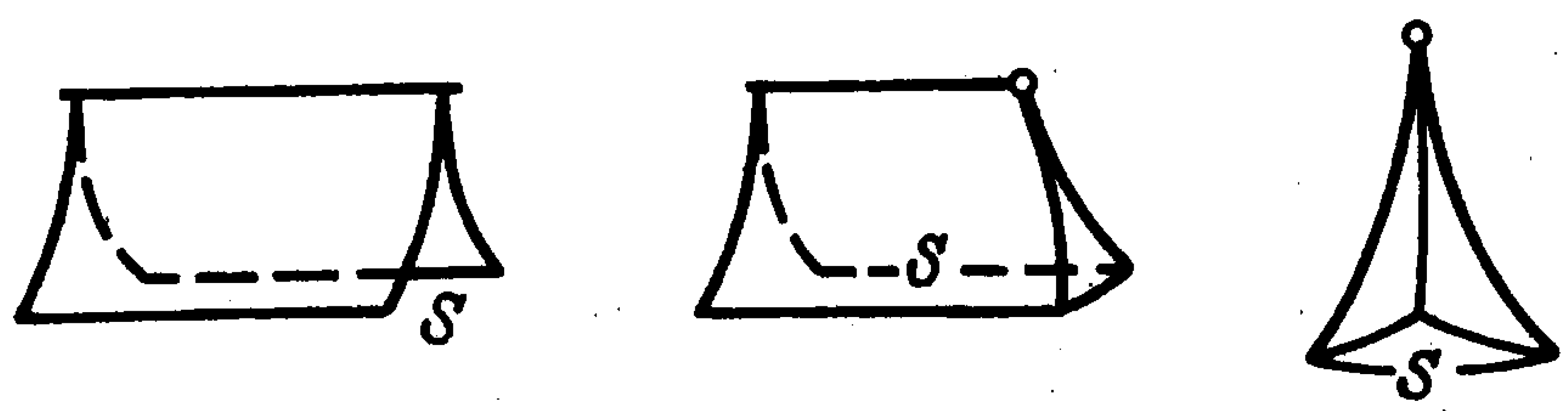
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Введенные векторы имеют наглядный геометрический смысл. Например, вектор $t(\mathbf{a} + \mathbf{b} \sin \alpha + \mathbf{c} \cos \alpha)$ при фиксированном t и изменении α от 0 до π описывает эллипс в пространстве параметров. Этот эллипс является сечением конуса плоскостью, параллельной векторам **b** и **c** (фиг. 3).

Особым точкам типа 0^4, $(\pm i\omega)^3$, $0^4(\pm i\omega)^2$, $(\pm i\omega)^3 0^2$, $(\pm i\omega_1)^3(\pm i\omega_2)^2$, $(\pm i\omega)^4$, 0^6 отвечают вырожденные КК. Эти особенности будут рассмотрены в следующем разделе.

В случае общего положения векторы, определяющие КК (2.1)–(2.7), образуют линейно независимые системы. Линейная независимость векторов, определяющих КК, может использоваться как критерий того, что рассматриваемая особенность – общего положения. Отметим, что для вычисления КК к области устойчивости требуется лишь знание собственных и присоединенных векторов, соответствующих кратным СЗ, а также первых производных матрицы **A** по параметрам, вычисленных в рассматриваемой особой точке границы.

3. Особенности с вырожденными касательными конусами. В этом разделе исследуются особенности общего положения ГОУ, которым отвечают вырожденные КК. Для двухпараметрических семейств гамильтоновых матриц такими особенностями являются "точки возврата" 0^4 и $(\pm i\omega)^3$ (фиг. 4) [1]. В случае трех параметров – это "ребра возврата" 0^4, $(\pm i\omega)^3$, "усеченные ребра возврата" $0^4(\pm i\omega)^2$, $(\pm i\omega)^3 0^2$, $(\pm i\omega_1)^3(\pm i\omega_2)^2$ и "трехгранные шпили" 0^6, $(\pm i\omega)^4$ (фиг. 5). ГОУ для особенности "трехгранный шпиль" представляет собой три ребра, сходящихся в особой точке по касательной к общему лучу. Из них два ребра имеют тип "ребро возврата", а третье – "двугранный угол".

Выражения для КК в этих особых точках даны в следующей теореме.

Теорема. КК к области устойчивости в особых точках границы типа 0^4, $(\pm i\omega)^3$, 0^6, $(\pm i\omega)^4$, $0^4(\pm i\omega)^2$, $(\pm i\omega)^3 0^2$, $(\pm i\omega_1)^3(\pm i\omega_2)^2$ являются вырожденными и имеет вид

$$K_{0^4} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^0, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_2^0, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{3.1}$$

$$K_{(\pm i\omega)^3} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^{i\omega}, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_1^{i\omega}, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{3.2}$$

$$K_{0^6} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^0, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_2^0, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_4^0, \mathbf{e}) \geqslant 0\} \tag{3.3}$$

$$K_{(\pm i\omega)^4} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^{i\omega}, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_1^{i\omega}, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_2^{i\omega}, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{3.4}$$

$$K_{0^4(\pm i\omega)^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^0, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_2^0, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^{i\omega}, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{3.5}$$

$$K_{(\pm i\omega)^3 0^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^{i\omega}, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_1^{i\omega}, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^0, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{3.6}$$

$$K_{(\pm i\omega_1)^3(\pm i\omega_2)^2} = \{\mathbf{e} : (\mathbf{f}_0^{i\omega_1}, \mathbf{e}) = 0, (\mathbf{f}_1^{i\omega_1}, \mathbf{e}) \leqslant 0, (\mathbf{f}^{i\omega_2}, \mathbf{e}) \leqslant 0\} \tag{3.7}$$

где верхний индекс указывает СЗ, для которого вычислен данный вектор. Выражения (3.1)–(3.7) верны, если векторы, определяющие КК, составляют линейно независимую систему. В случае общего положения это условие выполняется.

Опишем основные этапы доказательства теоремы[1].

Было показано [1], что любое семейство гамильтоновых матриц $\mathbf{JA}(\mathbf{h})$ с матрицей $\mathbf{JA}(\mathbf{h}_0) = \mathbf{JA}_0$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{JA}(\mathbf{h}) = \mathbf{C}(\mathbf{h})\mathbf{JA}'(\mathbf{g}(\mathbf{h}))\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{h})$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{h})$ – семейство невырожденных матриц, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{h})$, $\mathbf{g}(\mathbf{h}_0) = 0$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$ – гладкое отображение окрестности $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ в окрестность $\mathbf{g} = 0$. Семейство $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$ называется версальной деформацией и выбирается в соответствии с нормальной формой Уильямсона матрицы $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{g}$ – вектор параметров миниверсальной деформации [1]. Для описания семейства $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$ достаточно указать вид гамильтониана $H'(\mathbf{g}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}'(\mathbf{g})\mathbf{x}/2$. Гамильтониан $H'(\mathbf{g})$ можно представить [1] в виде суммы

$$H'(\mathbf{g}) = H'_{(1)}(\mathbf{g}^{(1)}) + H'_{(2)}(\mathbf{g}^{(2)}) + \ldots \tag{3.8}$$

где $H'_{(j)}(\mathbf{g}^{(j)}) = \mathbf{x}^{(j)T}\mathbf{A}'_j(\mathbf{g}^{(j)})\mathbf{x}^{(j)}/2$ ($j = 1, 2, \ldots$) – гамильтонианы, отвечающие различным СЗ и зависящие от соответствующих им векторов переменных Гамильтона $\mathbf{x}^{(j)}$ и векторов параметров $\mathbf{g}^{(j)}$. Векторы $\mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{g}^{(j)}$, взятые для всех $j = 1, 2, \ldots$, образуют в совокупности векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{g}$ соответственно, а матрица $\mathbf{A}'(0)$, соответствующая гамильтониану $H'(0)$ (3.8), является нормальной формой Уильямсона матрицы $\mathbf{A}_0$.

Поскольку СЗ матриц $\mathbf{JA}(\mathbf{h})$ и $\mathbf{JA}'(\mathbf{g}(\mathbf{h}))$ совпадают, устойчивость семейства $\mathbf{JA}(\mathbf{h})$ эквивалентна устойчивости семейства $\mathbf{JA}'(\mathbf{g}(\mathbf{h}))$. Таким образом, при знании отображения $\mathbf{g}(\mathbf{h})$ вместо семейства $\mathbf{JA}(\mathbf{h})$ можно исследовать устойчивость семейства $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$.

Представление (3.8) позволяет разделить систему уравнений Гамильтона для $H'(\mathbf{g})$ на независимые системы для каждого слагаемого $H'_{(j)}(\mathbf{g}^{(j)})$. Устойчивость семейства $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$ в окрестности $\mathbf{g} = 0$ при этом определяется устойчивостью только тех систем,

[1] Подробное доказательство дано в работе *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Об областях устойчивости линейных гамильтоновых систем. Препринт № 37–98. М.: Ин-т механики МГУ, 1998. 63 с.

которые отвечают кратным СЗ матрицы $\mathbf{JA}_0$. Были приведены [1] гамильтонианы $H'_{(j)}(\mathbf{g}^{(j)})$ в зависимости от жордановой структуры соответствующих им СЗ. Используя эти представления, для рассматриваемых типов особых точек можно найти КК к области устойчивости семейства $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$. В случае кратного чисто мнимого СЗ λ_0 с одной жордановой клеткой порядка k можно доказать следующее соотношение между векторами направлений $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ из КК в пространствах параметров $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$:

$$(\mathbf{f}_j, \mathbf{e}) = (\mathbf{f}'_j, \mathbf{e}'), \quad j = 0, ..., k-1 \tag{3.9}$$

Здесь $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}'_j$ – векторы, вычисленные по формулам (1.2) для СЗ λ_0 семейств $\mathbf{JA}(\mathbf{h})$ и $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$ в точках $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ и $\mathbf{g} = 0$ соответственно. Соотношения (3.9) позволяют, используя выражения для КК к области устойчивости семейства $\mathbf{JA}'(\mathbf{g})$, найти КК к области устойчивости семейства $\mathbf{JA}(\mathbf{h})$ в исходном пространстве параметров. Таким образом получаются выражения для КК, приведенные в теореме.

4. Особенности границ областей устойчивости гироскопических систем. Рассмотрим линейную автономную гироскопическую систему

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{G}\dot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = 0 \tag{4.1}$$

где $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)^T \in \mathbb{R}^m$ – вектор обобщенных координат; $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}$ – действительные матрицы порядка $m \times m$, гладко зависящие от вектора параметров $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, причем $\mathbf{M}^T = \mathbf{M} > 0$, $\mathbf{G}^T = -\mathbf{G}$, $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$. Представив решение уравнения (4.1) в виде $\Phi = \mathbf{U}e^{\lambda t}$, придем к задаче на СЗ

$$[\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{G} + \mathbf{K}]\mathbf{U} = 0$$

Уравнение (4.1) можно записать в виде (1.1) [5], где

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}/4 & \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}/2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}/2 & \mathbf{M}^{-1} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Vmatrix} \Phi \\ \Psi \end{Vmatrix}, \quad \Psi = \mathbf{M}\dot{\Phi} + \mathbf{G}\Phi/2 \tag{4.2}$$

Матрица $\mathbf{A}$ симметрическая и гладко зависит от вектора $\mathbf{h}$.

Системы уравнений (4.1) и (1.1), (4.2) являются уравнениями движения, записанными в форме Лагранжа и Гамильтона соответственно. Области устойчивости тривиального решения систем (4.1) и (1.1), (4.2) совпадают. Особенности общего положения ГОУ гамильтоновых и гироскопических систем, зависящих от параметров, идентичны. Все результаты, полученные в разд. 2, 3 для особенностей ГОУ гамильтоновых систем, верны и для гироскопических систем (4.1), если семейство матриц $\mathbf{A}(\mathbf{h})$ взять в виде (4.2). Подставив (4.2) в соотношении разд. 1, выражения для векторов, определяющих КК, можно записать непосредственно в терминах гироскопической системы (4.1).

1°. Пусть при $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ гироскопическая система имеет СЗ $\lambda = i\omega$ (или $\lambda = 0$) кратности k, которому отвечает жорданова цепочка векторов $\mathbf{U}_0, ..., \mathbf{U}_{k-1}$, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}\mathbf{U}_0 = 0 \\ &\mathbf{Q}\mathbf{U}_1 + \mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}_0 = 0 \\ &\mathbf{Q}\mathbf{U}_2 + \mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}_1 + \mathbf{Q}_{\lambda\lambda}\mathbf{U}_0/2 = 0 \\ &\ldots \\ &\mathbf{Q}\mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}_{k-2} + \mathbf{Q}_{\lambda\lambda}\mathbf{U}_{k-3}/2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь использованы обозначения для матричных операторов

$$\mathbf{Q} = \lambda^2\mathbf{M}(\mathbf{h}_0) + \lambda\mathbf{G}(\mathbf{h}_0) + \mathbf{K}(\mathbf{h}_0), \quad \mathbf{Q}_\lambda = 2\lambda\mathbf{M}(\mathbf{h}_0) + \mathbf{G}(\mathbf{h}_0), \quad \mathbf{Q}_{\lambda\lambda} = 2\mathbf{M}(\mathbf{h}_0)$$

Цепочка векторов $\mathbf{V}_0, ..., \mathbf{V}_{k-1}$ для сопряженной задачи, удовлетворяет уравнениям (4.3) при замене операторов $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_\lambda$, $\mathbf{Q}_{\lambda\lambda}$ на сопряженные $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}^*_\lambda, \mathbf{Q}^*_{\lambda\lambda}$.

Условия нормировки для векторов $\mathbf{U}_j$, $\mathbf{V}_j$ имеют вид

$$\mathbf{V}_0^*\mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}_{k-1} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_0^*\mathbf{Q}_{\lambda\lambda}\mathbf{U}_{k-2} = 1 \tag{4.4}$$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{V}_{j-1}^*\mathbf{Q}_{\lambda\lambda}\mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{V}_j^*\mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}_{k-1} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}_j^*\mathbf{Q}_{\lambda\lambda}\mathbf{U}_{k-2} = 0, \quad j = 1,\ldots,k-1$$

Тогда компоненты векторов $\mathbf{f}_j = (f_j^1,\ldots,f_j^n)^T \in \mathbb{R}^n$ ($j = 0, \ldots, k-1$) определяются соотношениями

$$f_j^l = i^{k-j}\left(\sum_{r=0}^{j} \mathbf{V}_r^*\mathbf{Q}_l\mathbf{U}_{j-r} + \sum_{r=0}^{j-1} \mathbf{V}_r^*\mathbf{Q}_{\lambda l}\mathbf{U}_{j-r-1} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{j-2} \mathbf{V}_r^*\mathbf{Q}_{\lambda\lambda l}\mathbf{U}_{j-r-2}\right) \tag{4.5}$$

$$Q_l = \lambda^2\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial h_l} + \lambda\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial h_l} + \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial h_l}, \quad \mathbf{Q}_{\lambda l} = 2\lambda\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial h_l} + \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial h_l}, \quad \mathbf{Q}_{\lambda\lambda l} = 2\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial h_l}$$

Производные по параметрам берутся при $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$.

В случае $k = 2$ выражения для компонент вектора $\mathbf{f}_0$ (или просто $\mathbf{f}$) можно представить в виде

$$f^l = -\frac{\mathbf{U}_0^*\mathbf{Q}_l\mathbf{U}_0}{\mathbf{U}_1^*\mathbf{Q}\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_0^*\mathbf{Q}_{\lambda\lambda}\mathbf{U}_0/2} \tag{4.6}$$

2°. Рассмотрим двукратное СЗ $\lambda = i\omega \neq 0$, которому отвечают два собственных вектора $\mathbf{U}'$ и $\mathbf{U}''$. Введем условие ортогональности $\mathbf{U}'^*\mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}'' = 0$. Тогда постоянные b_1, b_2 и компоненты векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \in \mathbb{R}^n$ определятся соотношениями

$$ib_1 = \mathbf{U}'^*\mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}', \quad ib_2 = \mathbf{U}''^*\mathbf{Q}_\lambda\mathbf{U}'' \tag{4.7}$$

$$g_1^l = b_2\mathbf{U}'^*\mathbf{Q}_l\mathbf{U}' + b_1\mathbf{U}''^*\mathbf{Q}_l\mathbf{U}'', \quad g_2^l + ig_3^l = 2\sqrt{|b_1b_2|}\,\mathbf{U}'^*\mathbf{Q}_l\mathbf{U}''$$

3°. Рассмотрим двукратное СЗ $\lambda = 0$ с двумя собственными векторами $\mathbf{U}'$, $\mathbf{U}''$, которые выбраны вещественными и удовлетворяющими условиям нормировки $\mathbf{U}'^T\mathbf{G}_0\mathbf{U}'' = 1$, $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{h}_0)$. Выражения для компонент векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \in \mathbb{R}^n$ примут вид

$$k_1^l = \mathbf{U}'^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial p_l}\mathbf{U}', \quad k_2^l = \mathbf{U}''^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial p_l}\mathbf{U}'', \quad k_{12}^l = \mathbf{U}'^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial p_l}\mathbf{U}'', \quad l = 1,\ldots,n \tag{4.8}$$

Производные по параметрам берутся в точке $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$.

Отметим, что матрицы гамильтоновой или гироскопической системы и их первые производные по параметрам, вычисленные в особой точке границы, позволяют определить в первом приближении геометрию области устойчивости в окрестности этой точки.

5. Приближенное исследование устойчивости колебаний трубы с протекающей по ней жидкостью. В качестве примера двухпараметрической гироскопической системы рассмотрим шарнирно опертую упругую трубу, по которой течет жидкость. Линейное дифференциальное уравнение колебаний трубы и граничные условия имеют вид [9]

$$(m+m_f)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v_f m_f\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \mathrm{EJ}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f v_f^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{5.1}$$

$$w(0) = \left(\mathrm{EJ}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0, \quad w(l) = \left(\mathrm{EJ}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0$$

где $w(x, t)$ – прогиб трубы; m, EJ, l – соответственно погонная масса, жесткость на изгиб и длина трубы; m_f, v_f – погонная масса и скорость течения жидкости, t – время. Представленные члены уравнения (5.1) описывают инерционные, кориолисовы, упругие и центробежные силы, действующие на трубу. Демпфирование не учитывается.

Решая уравнения (5.1) с помощью метода Бубнова–Галеркина и удерживая в разложениях два члена

$$w(x,t)=\varphi_1(t)\sin\frac{\pi x}{l}+\varphi_2(t)\sin\frac{2\pi x}{l}$$

приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1) относительно функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, где [9]

$$\mathbf{M}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{G}=\sqrt{\alpha\Lambda}\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{K}=\begin{Vmatrix}1-\Lambda & 0\\ 0 & 16-4\Lambda\end{Vmatrix} \tag{5.2}$$

Здесь введены безразмерные параметры α и Λ, характеризующие относительную массу и скорость потока [9]

$$\alpha=\left(\frac{16}{3\pi}\right)^2\frac{m_f}{m+m_f},\quad \Lambda=\frac{m_f v_f^2 l^2}{\pi^2 \mathrm{EJ}} \tag{5.3}$$

При изменении величины относительной массы $0\leqslant m_f/m<\infty$ параметр α изменяется в пределах $0\leqslant\alpha\leqslant(16/3\pi)^2\approx 2{,}882$. Параметр скорости потока Λ неотрицателен, $0\leqslant\Lambda<\infty$.

Характеристическое уравнение для рассматриваемой системы при учете (5.2) имеет вид [9]

$$\lambda^4+\lambda^2(17-5\Lambda+\alpha\Lambda)+4(1-\Lambda)(4-\Lambda)=0 \tag{5.4}$$

Точка (4, 3/4) является особой точкой ГОУ типа 0^4. Действительно, в этой точке оба коэффициента полинома (5.4) обращаются в нуль. Поэтому $\lambda=0$ – четырехкратный корень уравнения (5.4). Полагая в уравнениях (4.3)

$$\mathbf{Q}=\begin{Vmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{Q}_\lambda=\begin{Vmatrix}0 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{Q}_{\lambda\lambda}=\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{Vmatrix} \tag{5.5}$$

найдем из них цепочки из четырех правых и левых собственных и присоединенных векторов, удовлетворяющих условиям нормировки (4.4)

$$\mathbf{U}_0=\begin{Vmatrix}0\\ 1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{U}_1=\begin{Vmatrix}-\sqrt{3}/3\\ 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{U}_2=\begin{Vmatrix}0\\ 1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{U}_3=\begin{Vmatrix}-4\sqrt{3}/9\\ 0\end{Vmatrix} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{V}_0=\begin{Vmatrix}0\\ -3\end{Vmatrix},\quad \mathbf{V}_1=\begin{Vmatrix}-\sqrt{3}\\ 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{V}_2=\begin{Vmatrix}0\\ 4\end{Vmatrix},\quad \mathbf{V}_3=\begin{Vmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{Vmatrix}$$

Наличие линейно зависимых векторов не должно смущать, так как цепочка (4.3) связывает три вектора $\mathbf{U}_j$, $\mathbf{U}_{j-1}$, $\mathbf{U}_{j-2}$. Аналогично связаны тройки векторов $\mathbf{V}_j$, $\mathbf{V}_{j-1}$, $\mathbf{V}_{j-2}$.

С помощью выражений (5.2), (5.6) вычислим согласно (4.5) векторы $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{f}_2$, определяющие КК к области устойчивости в точке 0^4 ($\Lambda=4$, $\alpha=3/4$).

$$\mathbf{f}_0=(12,0)^T,\quad \mathbf{f}_2=(17/4,-4)^T \tag{5.7}$$

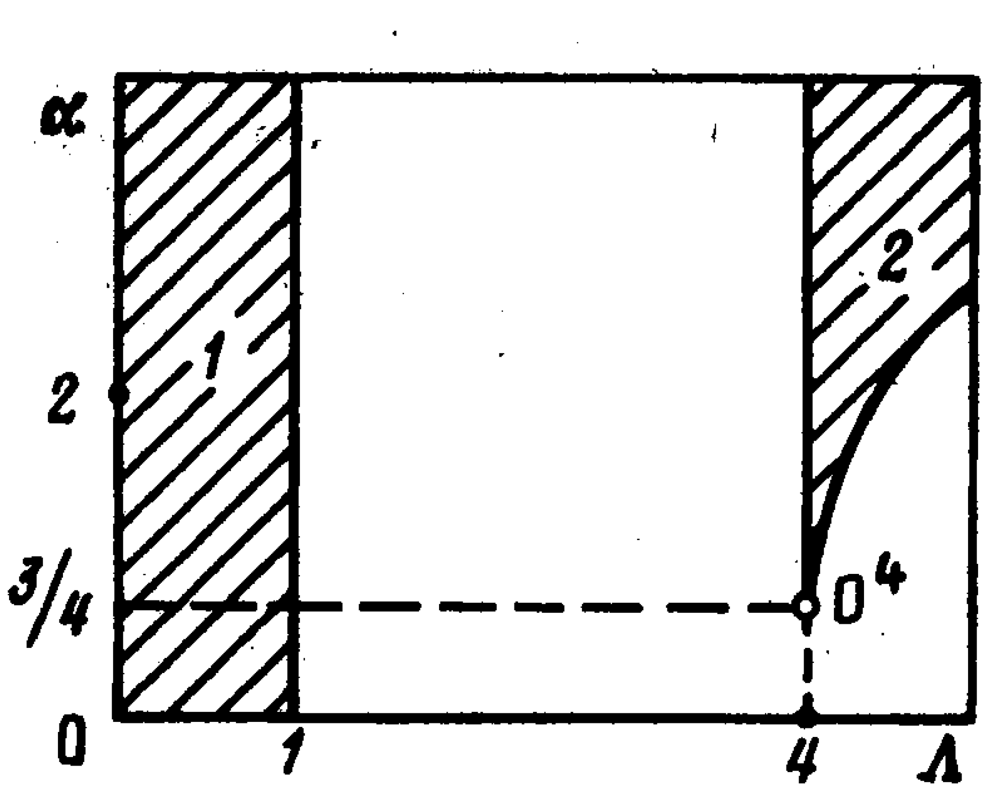
Итак, из (3.1), (5.7) найдем КК к области устойчивости в виде

$$K_{0^4}=\left\{\mathbf{e}=(e_1,e_2)^T:\ e_1=0,\ \ e_2\geqslant 0\right\} \tag{5.8}$$

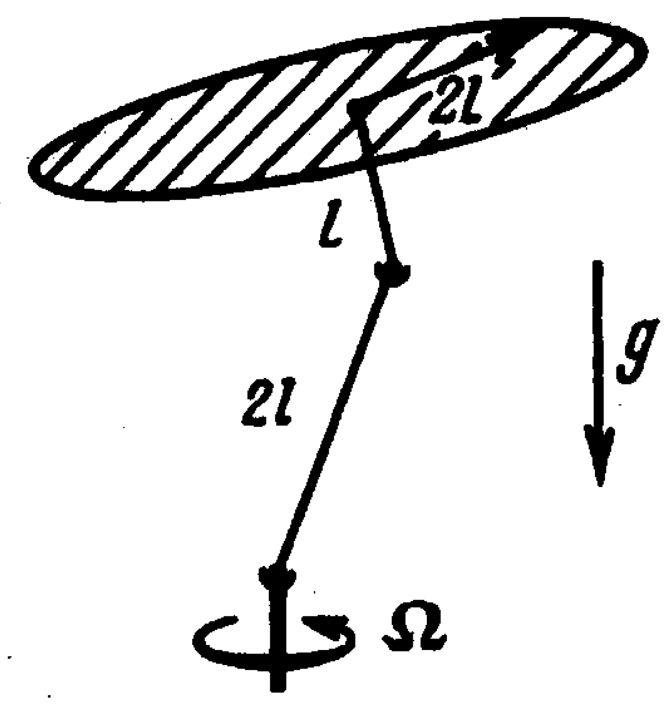
КК (5.8) состоит из одного направления, которое определяет ориентацию особенности "точка возврата" в пространстве параметров Λ, α.

Область устойчивости рассматриваемой системы можно найти аналитически. Для устойчивости необходимо, чтобы коэффициенты биквадратного уравнения (5.4) и его дискриминант были неотрицательными. Соответствующие строгие неравенства выделяют на плоскости параметров $\mathbf{h}=(\Lambda,\alpha)^T$ области устойчивости

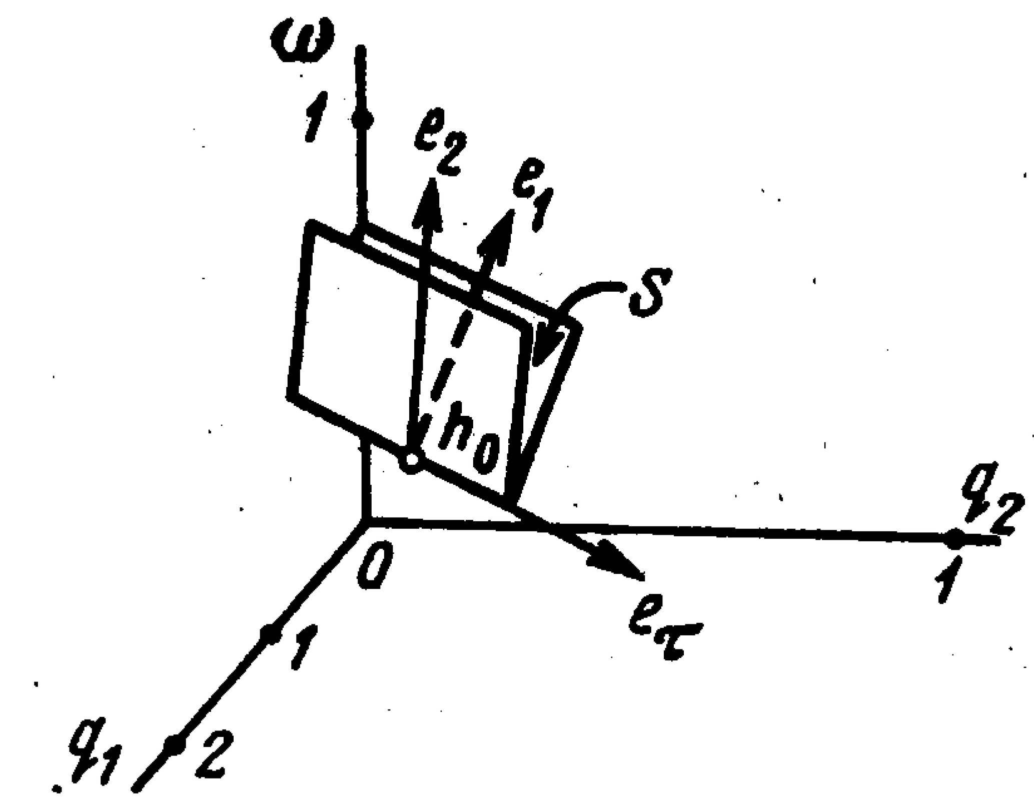
$$1)\ 0<\Lambda<1;\quad 2)\ \Lambda>4,\quad \alpha>5-\frac{17}{\Lambda}+4\left[\left(\frac{1}{\Lambda}-1\right)\left(\frac{4}{\Lambda}-1\right)\right]^{1/2}$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

представленные на фиг. 6. Область 2 представляет собой область гироскопической стабилизации. Этот результат согласуется с (5.8), так как обе кривые, составляющие ГОУ, в точке 0^4 касаются луча $\Lambda = 0$, $\alpha \geqslant 0$ (фиг. 6).

6. Об устойчивости вращения статически неустойчивой механической системы. Рассмотрим механическую систему, находящуюся в поле силы тяжести и состоящую из вертикально поставленного мотора, к ротору которого при помощи упругих шаровых шарниров последовательно прикреплены жесткие невесомые стержни длины $2l$ и l. Конец второго стержня жестко прикреплен к центру плоского диска массы m и радиуса $2l$, причем стержень перпендикулярен плоскости диска (фиг. 7). В качестве обобщенных координат выберем совокупность углов Крылова α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2$), определяющих положение каждого из стержней в системе отсчета, связанной с ротором. Подобные механические системы рассматривались ранее в [10].

Исследуем устойчивость вращения системы относительно вертикальной оси $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$ ($i = 1, 2$) с постоянной угловой скоростью. Система линеаризованных уравнений движения расщепляется на две, одна из которых содержит только γ_1, γ_2 и всегда устойчива. Другая система имеет вид (4.1), где $\Phi = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)^T$, а ненулевые элементы матриц $\mathbf{M} = \|m_{ij}\|$, $\mathbf{G} = \|g_{ij}\|$ и $\mathbf{K} = \|k_{ij}\|$ таковы:

$$m_{11} = m_{22} = -g_{14} = g_{41} = g_{23} = -g_{32} = 4, \quad -g_{12} = g_{21} = 8$$

$$m_{13} = m_{31} = m_{24} = m_{42} = m_{33} = m_{44} = -g_{34} = g_{43} = 2$$

$$k_{11} = k_{22} = (q_1 + q_2 - 2)/\omega^2 - 4, \quad k_{33} = k_{44} = (q_2 - 1)/\omega^2$$

$$k_{13} = k_{31} = k_{24} = k_{42} = -q_2/\omega^2 - 2$$

Безразмерные параметры q_1, q_2 и ω характеризуют жесткости шарниров и угловую скорость вращения ротора.

Рассмотрим точку $\mathbf{h}_0 = (3/2, 2\sqrt{2} - 5/2, 2 - \sqrt{2})^T$ в пространстве параметров $\mathbf{h} = (q_1, q_2, \omega)^T$. Характеристическое уравнение системы в этой точке имеет две пары двукратных чисто мнимых корней $\lambda = \pm i(2 - \sqrt{2})/4$, $\lambda = \pm i(2 + \sqrt{2})/4$, которым отвечают цепочки Жордана второго порядка. Следовательно, область устойчивости в пространстве параметров $\mathbf{h} = (q_1, q_2, \omega)^T$ имеет особенность типа "двугранный угол" $(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2$. Векторы $\mathbf{f}^{i\omega_1}$ и $\mathbf{f}^{i\omega_2}$, определяющие КК (2.2), таковы:

$$\mathbf{f}^{i\omega_1} = -\frac{10 + 7\sqrt{2}}{8}\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ 2 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{f}^{i\omega_2} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{8}\begin{Vmatrix} 3 + 2\sqrt{2} \\ 9 + 4\sqrt{2} \\ 6 - 4\sqrt{2} \end{Vmatrix}$$

При помощи вектора $\mathbf{e}_\tau$, касательного к ребру "двугранного угла", и векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ортогональных к ребру и касательных к граням "двугранного угла", имеющих вид

$$\mathbf{e}_\tau = \mathbf{f}^{i\omega_1} \times \mathbf{f}^{i\omega_2}, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}^{i\omega_1} \times \mathbf{e}_\tau, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\tau \times \mathbf{f}^{i\omega_2}$$

КК к области устойчивости (2.2) записывается в виде

$$K_{(\pm i\omega_1)^2(\pm i\omega_2)^2} = \{\mathbf{e} : \mathbf{e} = \alpha\mathbf{e}_\tau + \beta\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta, \gamma \geqslant 0\}$$

Векторы $\mathbf{e}_\tau$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ определяют геометрию области устойчивости в окрестности особой точки $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ в линейном приближении (фиг. 8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Д.М.* Версальные деформации линейных гамильтоновых систем // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1975. Т. 1. С. 63–74.
2. *Сейранян А.П.* Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // Strojnicky casopis. 1991. V. 42. N 3. P. 193–208.
3. *Seyranian A.P.* Sensitivity analysis of multiple eigenvalues // Mech. Struct. and Mach. 1993. V. 21. N 2. P. 261–284.
4. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Об особенностях границы области устойчивости // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 5. 632–636.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
6. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
7. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
8. *Левантовский Л.В.* О границе множества устойчивых матриц // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. Вып. 2. С. 213–214.
9. *Thompson J.M.T.* Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering. New York: John Wiley & Sons, 1982. 254 p. = *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
10. *Барняк М.Я., Стороженко В.А.* К исследованию устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы шарнирно связанных осесимметричных тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 51–58.

Москва

Поступила в редакцию
13.VII.1998