УДК 531.36

© 1999 г. **В.Б. Колмановский**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для уравнений Вольтерры с дискретным временем при помощи второго метода Ляпунова установлены условия устойчивости и ограниченности решений, формулируемые непосредственно в терминах характеристик уравнений.

1. Постановка задачи. Определение устойчивости. Рассмотрим скалярное уравнение, описывающее изменение состояния системы x_n

$$x_{n+1}=-\sum_{i=0}^{n}a_{n,i}x_i,\quad n\geqslant 0 \tag{1.1}$$

Здесь $n=0,1,\ldots$ – дискретное время, $a_{n,i}$ – заданная совокупность чисел при всех $n\geqslant 0$, $0\leqslant i\leqslant n$, начальное положение системы x_0 известно.

Уравнения вида (1.1) возникают в ряде приложений, в численных схемах решений дифференциальных и интегральных уравнений [1], в уравнениях типа свертки (т.е. при $a_{n,i}=a_{n-i}$)

$$x_{n+1}=-\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}x_i=-\sum_{i=0}^{n}a_ix_{n-i} \tag{1.2}$$

широко используются в теории восстановления [2].

При этом представляет интерес вопрос об асимптотических свойствах решений и, в частности, вопрос об устойчивости по отношению к возмущениям начального положения x_0.

Определение. Система (1.1) называется устойчивой, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства $|x_0|<\delta(\varepsilon)$ следует соотношение $|x_n|<\varepsilon$ для всех $n\geqslant 0$.

Устойчивая система (1.1) называется асимптотически устойчивой, если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ при любом x_0 из области притяжения нулевого решения.

Методом преобразований Лапласа были получены [2] условия асимптотической устойчивости уравнений (1.2) при дополнительном предположении о знакопостоянстве всех коэффициентов a_i и сходимости ряда из a_i. Сформулированы модифицированные теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости решений уравнений Вольтерры и с их помощью получены некоторые условия устойчивости систем вида (1.1) опять же в предположении, что ряд из абсолютных значений коэффициентов $a_{n,i}$ сходится [3–6]. Однако это предположение иногда может оказаться слишком ограничительным, поскольку, например, существуют асимптотически устойчивые системы вида (1.2), не удовлетворяющие этому предположению.

Ниже установлены некоторые условия устойчивости, справедливые без упомянутого предположения. Они получаются путем построения подходящих функционалов Ляпунова (т.е. положительно определенных функционалов, первая разность которых в силу системы определенно отрицательна), и формулируются в терминах знакоопределенных или монотонных последовательностей коэффициентов для скалярных уравнений типа свертки (разд. 2), для уравнений (1.1) (разд. 3) и для нелинейного случая (разд. 4, 5). Используемые в работе функционалы получены в результате применения предложенной ранее процедуры их построения [6]. В качестве приложения в разд. 5 приводятся условия ограниченности решений возмущенных уравнений.

Напомним [7], что последовательность a_i называется неотрицательно определенной, если для любого n и для любого конечного набора чисел $x_0,\ldots x_n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{i+j}x_i x_j \geqslant 0$$

Аналогично определяются положительно и отрицательно определенные последовательности.

Монотонность последовательности a_i означает, что разности ее членов имеют чередующийся знак. В частности, последовательность a_i называется вполне монотонной, если при всех $i, j = 0,1,\ldots$

$$(-1)^j \Delta^j a_i \geqslant 0, \quad \Delta a_i = a_{i+1} - a_i, \quad \Delta^0 a_i = a_i$$

Примером указанных выше последовательностей может служить совокупность моментов случайной величины [2].

2. Скалярные уравнения типа свертки. Установим условия устойчивости уравнений (1.2). Рассмотрим функционал V, полагая $a_{-1} = 2$,

$$V = \sum_{i,j=0}^{n} a_{i+j-1}x_{n-i}x_{n-j} \tag{2.1}$$

Вычисляя первую разность $\Delta V = G - V$, получим

$$G = \sum_{i,j=0}^{n+1} a_{i+j-1}x_{n+1-i}x_{n+1-j} \tag{2.2}$$

Преобразуем G следующим образом:

$$G = \sum_{j=0}^{n+1} a_{j-1}x_{n+1}x_{n+1-j} + \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1} a_{i+j-1}x_{n+1-i}x_{n+1-j} = a_{-1}x_{n+1}^2 +$$

$$+2x_{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j x_{n-j} + \sum_{i,j=0}^{n} a_{i+j+1}x_{n-i}x_{n-j}$$

Заметим еще, что в силу уравнения (1.2)

$$x_{n+1}^2 = -x_{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i x_{n-i} \tag{2.3}$$

Соотношения (2.1)–(2.3) означают, что

$$\Delta V = \sum_{i,j=0}^{n} (a_{i+j+1} - a_{i+j-1})x_{n-i}x_{n-j} \tag{2.4}$$

Теперь в зависимости от предположений о квадратичных формах (2.1), (2.4) могут быть сформулированы различные критерии устойчивости. Так, например, согласно полученным ранее результатам [3], если последовательность a_{i-1} положительно определена, а $(a_{i+1}-a_{i-1})$ отрицательно определена, то система (1.2) асимптотически устойчива; впрочем [3], это заключение справедливо и при следующих более слабых предположениях относительно a_i.

Теорема 2.1. Пусть при некоторых положительных постоянных c_1, c_2 и $a_{-1} = 2$ для функционалов (2.1) и (2.4) справедливы оценки

$$V \geqslant c_1 x_n^2, \quad \Delta V \leqslant -c_2 x_n^2 \tag{2.5}$$

Тогда система (1.2) асимптотически устойчива. Если же $V \geqslant c_1 x_n^2$ и последовательность $(a_{i+1} - a_{i-1})$ неположительно определена, то система (1.2) устойчива.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение (1.2) с постоянными коэффициентами $a_i \equiv b$, $i \geqslant 0$

$$x_{n+1} = -b \sum_{i=0}^{n} x_{n-i}, \quad n \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Ряд из коэффициентов уравнения (2.6) расходится, т.е. заключение об устойчивости на основании работ, в которых предполагается его сходимость, сделать невозможно. Вместе с тем последовательность $a_{-1} = 2$, $a_i \equiv b$, $i \geqslant 0$ на основании критерия Сильвестра неотрицательно определена, если $0 \leqslant b \leqslant 2$. Кроме того, форма (2.1) в рассматриваемом случае равняется $V = (2-b)x_n^2 + b(x_0 + \ldots + x_n)^2$, причем при учете (2.6) заключаем, что первая разность $\Delta V = -(2-b)x_n^2$. Значит, на основании теоремы 2.1 система (2.6) асимптотически устойчива при $0 \leqslant b < 2$. Это условие асимптотической устойчивости не только достаточно, но и необходимо. Действительно, если ввести новую независимую переменную $y_n = b(x_0 + \ldots + x_{n-1})$, то уравнение (2.6) оказывается эквивалентным системе двух уравнений $x_{n+1} = -bx_n - y_n$, $y_{n+1} = bx_n + y_n$. Эта система на основании критерия Шура – Кона асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $0 \leqslant b < 2$.

Введем обозначение $X_{kn} = \sum_{j=k}^{n} x_j$ и обратимся к иным условиям устойчивости системы (1.2), полученным с помощью функционала

$$V = G_1 + G_2 + (2 - a_{-1})x_n^2; \; G_1 = a_{n+1} X_{0n}^2, \quad G_2 = -\sum_{i=0}^{n} (a_{n+1-i} - a_{n-i}) X_{in}^2 \tag{2.7}$$

$$\Delta V = \Delta G_1 + \Delta G_2 + (2 - a_{-1}) \Delta x_n^2 \quad \Delta G_1 = a_{n+2} X_{0n+1}^2 - G_1,$$

$$\Delta G_2 = -\sum_{i=0}^{n+1} (a_{n+2-i} - a_{n+1-i}) X_{in+1}^2 - G_2 \tag{2.8}$$

После преобразований получаем

$$\Delta G_1 = (a_{n+2} - a_{n+1}) X_{0n+1}^2 + a_{n+1} x_{n+1} (x_{n+1} + 2X_{0n})$$

$$\Delta G_2 = G_3 - \sum_{i=0}^{n+1} (a_{n+2-i} - 2a_{n+1-i} + a_{n-i}) X_{in+1}^2$$

$$G_3 = \sum_{i=0}^{n} (a_{n+1-i} - a_{n-i}) X_{in}^2 - \sum_{i=0}^{n} (a_{n+1-i} - a_{n-i}) X_{in+1}^2 = G_4 - x_{n+1}^2 (a_0 - a_{-1}) \tag{2.9}$$

$$G_4 = -x_{n+1} \sum_{i=0}^{n} (a_{n+1-i} - a_{n-i})(x_{n+1} + 2X_{in}) = -x_{n+1}^2 (a_{n+1} - a_0) -$$

$$-2a_{n+1} x_{n+1} X_{0n} + 2x_{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x_i$$

Соотношения (2.8), (2.9), (2.4) означают, что

$$\Delta V = (a_{n+2} - a_{n+1}) X_{0n+1}^2 - \sum_{i=0}^{n+1} (a_{n+2-i} - 2a_{n+1-i} + a_{n-i}) X_{in+1}^2 - (2 - a_{-1}) x_n^2$$

Тем самым доказана

Теорема 2.2. Пусть при некотором $a_{-1} \in [0; 2)$ и всех $i \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$a_i \geqslant 0, \quad a_{i+1} - a_i \leqslant 0, \quad a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} \geqslant 0; \quad i \geqslant 0 \tag{2.10}$$

Тогда система (1.2) асимптотически устойчива.

Отметим, что применение теоремы 2.2 к тестовому примеру 2.1 приводит к условию $0 \leqslant b < 2$ асимптотической устойчивости системы (1.2), установленному выше с помощью теоремы 2.1.

3. Уравнения с переменными коэффициентами. Приведем аналоги теорем 2.1 и 2.2 для уравнений вида (1.1). Положим $a_{n,n+1} = 2$ при всех $n \geqslant -1$ и продолжим $a_{n,i}$ в область $n \geqslant 0$, $i \leqslant -1$. Рассмотрим функционал

$$V = \sum_{i,j=0}^{n} a_{n-1,n-i-j} x_{n-i} x_{n-j} \tag{3.1}$$

После вычислений, аналогичных проведенным в разд. 2, получим

$$\Delta V = \sum_{i,j=0}^{n} [a_{n,n-1-i-j} - a_{n-1,n-i-j}] x_{n-i} x_{n-j} \tag{3.2}$$

Таким образом, подобно теореме 2.1 заключаем, что справедлива

Теорема 3.1. Если формы (3.1), (3.2) удовлетворяют оценкам (2.5), то система (1.1) асимптотически устойчива.

Отметим, что формы (3.1), (3.2) переходят соответственно в (2.1), (2.4), если $a_{n,i} = a_{n-i}$.

Введем некоторые последовательности $a_{n-1,n}$ и $a_{n,-1}$, $n \geqslant 0$, считая, что

$$\sup_{n \geqslant 0} a_{n-1,n} < 2, \quad a_{n,-1} \geqslant 0, \quad a_{n+1,-1} - a_{n,-1} \leqslant 0 \tag{3.3}$$

Рассмотрим функционал

$$V = a_{n,-1} X_{0n}^2 - \sum_{i=0}^{n} (a_{n,i-1} - a_{n,i}) X_{in}^2 + (2 - a_{n-1,n}) x_n^2 \tag{3.4}$$

Вычисления, аналогичные проведенным в разд. 2, дают

$$\Delta V = -(2 - a_{n-1,n}) x_n^2 + (a_{n+1,-1} - a_{n,-1}) X_{0n+1}^2 - \sum_{i=0}^{n+1} (a_{n+1,i-1} - a_{n+1,i} - a_{n,i-1} + a_{n,i}) X_{in+1}^2$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3.2. Система (1.1) асимптотически устойчива, если выполнены неравенства (3.3), а также оценки при $0 \leqslant i \leqslant n+1$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $n \geqslant 0$

$$a_{n,j-1} - a_{n,j} \leqslant 0, \quad a_{n+1,i-1} - a_{n+1,i} - a_{n,i-1} + a_{n,i} \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Отметим, что условия устойчивости (3.3), (3.5) переходят в условия (2.10) теоремы 2.2, если $a_{n,i} = a_{n-i}$.

4. Нелинейные системы. Установим некоторые условия устойчивости нулевого решения скалярного уравнения

$$x_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} g(x_i), \quad n \geqslant 0 \tag{4.1}$$

Здесь функция $g(x)$ такова, что

$$g(0) = 0, \quad x g(x) > 0, \quad x \neq 0, \quad |g(x)| \leqslant |x| \tag{4.2}$$

Рассмотрим функционал

$$V = G_1 + G_2 \tag{4.3}$$

$$G_1 = 2x_n g(x_n) - a_{-1} g^2(x_n), \quad G_2 = \sum_{i,j=0}^{n} a_{i+j-1} g(x_{n-i}) g(x_{n-j})$$

Здесь положительная постоянная a_{-1} такова, что при всех x

$$2 - a_{-1} \frac{g(x)}{x} \geqslant 0 \tag{4.4}$$

После вычислений имеем

$$\Delta V = -g(x_n)(2x_n - a_{-1} g(x_n)) - \sum_{i,j=0}^{n} (a_{i+j-1} - a_{i+j+1}) g(x_{n-i}) g(x_{n-j}) \tag{4.5}$$

Таким образом, справедливо

Следствие 4.1. Если выполнены условия (4.2), существует постоянная $a_{-1} > 0$, удовлетворяющая (4.4), и справедливы неравенства (2.5) для V и ΔV, даваемые выражениями (4.3), (4.5), то тривиальное решение уравнения (4.1) асимптотически устойчиво.

Введем обозначение

$$\Gamma_{kn} = \sum_{j=k}^{n} g(x_j)$$

и рассмотрим функционал

$$V = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_1 = -\sum_{i=0}^{n} (a_{n+1-i} - a_{n-i}) \Gamma_{in}^2, \quad G_2 = a_{n+1} \Gamma_{0n}^2, \quad G_3 = (2 - a_{-1}) x_n g(x_n)$$

Осуществляя преобразования, подобные проведенным в разд. 2, имеем

$$\Delta V = -(2 - a_{-1}) x_n g(x_n) - a_{-1} g(x_{n+1})(x_{n+1} - g(x_{n+1})) -$$

$$-(a_{n+1} - a_{n+2}) \Gamma_{0n+1}^2 - \sum_{i=0}^{n+1} (a_{n+2-i} - 2a_{n+1-i} + a_{n-i}) \Gamma_{in+1}^2$$

Таким образом, справедливо

Следствие 4.2. Пусть выполнены оценки (4.2), (2.10) и постоянная $a_{-1} \in [0;\, 2)$. Тогда нулевое решение уравнения (4.1) асимптотически устойчиво.

Пример 4.1. Пусть уравнение (4.1) имеет вид

$$x_{n+1} = -b(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n).$$

На основании любого из следствий 4.1 или 4.2 нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво при $0 \leqslant b < 2$.

5. Нелинейные нестационарные системы. Подобным же образом могут быть получены условия устойчивости нелинейных систем

$$x_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} a_{n,i} g(x_i) \tag{5.1}$$

Доопределим $a_{n,i}$ для $i = n + 1$ и $i \leqslant -1$, $n \geqslant 0$. Рассмотрим функционал

$$V = G_1 + G_2$$

$$G_1 = g(x_n)(2x_n - a_{n-1,n} g(x_n)), \quad G_2 = \sum_{i,j=0}^{n} a_{n-1,n-i-j} g(x_{n-i}) g(x_{n-j})$$

После вычислений получим

$$\Delta V = \sum_{i,j=0}^{n}[a_{n,n-1-i-j} - a_{n-1,n-i-j}]g(x_{n-i})g(x_{n-j}) - G_1$$

Следствие 5.1. Если справедливы соотношения (4.2), а функционалы V и ΔV удовлетворяют оценкам (2.5), то нулевое решение уравнения (5.1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим функционал

$$V = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_1 = a_{n,-1}\Gamma_{0n}^2, \quad G_2 = -\sum_{i=0}^{n}(a_{n,i-1} - a_{n,i})\Gamma_{in}^2, \quad G_3 = (2 - a_{n-1,n})x_n g(x_n)$$

Значит,

$$\Delta V = (a_{n+1,-1} - a_{n,-1})G_{0n+1}^2 + G_4 - G_3 - a_{n,n+1}g(x_{n+1})(x_{n+1} - g(x_{n+1}))$$

$$G_4 = -\sum_{i=0}^{n+1}(a_{n+1,i-1} - a_{n+1,i} - a_{n,i-1} + a_{n,i})\Gamma_{in+1}^2$$

Тем самым установлено

Следствие 5.2. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (4.2) и справедливы неравенства (3.3), (3.5). Тогда нулевое решение уравнения (5.1) асимптотически устойчиво.

6. Ограниченность решений возмущенных уравнений. Установленные выше условия устойчивости позволяют также установить некоторые условия ограниченности решений уравнений Вольтерры при различных предположениях о характере возмущений.

Приведем вначале некоторые из них для системы вида

$$x_{n+1} = -\sum_{i=n_0}^{n}(a_{n-i}x_i + b_{n,i}(x_i)); \quad n \geq n_0, \quad x_{n_0} = x_0 \tag{6.1}$$

Здесь a_i – заданные постоянные, $b_{n,i}$ – заданные функции, $n_0 \in N$, где N – заданное множество индексов.

Напомним, что система (6.1) называется: 1) ограниченной, если для любого числа $r > 0$ существует число $\alpha(n_0, r)$, такое, что $|x_n| \leq \alpha(n_0, r)$ для всех $n \geq n_0$, и x_0 при $|x_0| \leq r$; 2) равномерно ограниченной по отношению к начальному моменту $n_0 \in N$, если $\alpha(n_0, r) \equiv \alpha(r)$.

Теорема 6.1. Предположим, что выполнены условия одной из теорем 2.1 или 2.2, функции $b_{n,i}(x)$ удовлетворяют неравенствам $|b_{n,i}(x)| \leq \gamma_{n,i}|x|$, где постоянные $\gamma_{n,i} \geq 0$ таковы, что

$$\sum_{j=n_0}^{\infty}\sum_{r=j}^{\infty}\gamma_{r,j} < \infty \tag{6.2}$$

Тогда система (6.1) ограничена.

Доказательство. Представим решение задачи (6.1) в виде

$$x_n = R(n-n_0)x_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} R(n-i-1)\sum_{j=n_0}^{i}b_{i,j}(x_j); \quad n > n_0 \tag{6.3}$$

Здесь $R(n)$ – фундаментальное решение уравнения (1.2), т.е. решение уравнения (1.2) при $n > 0$ с начальным условием $R(0) = 1$. Ввиду условий теоремы 6.1 функция $R(n)$ ограничена, т.е. $|R(n)| \leq C$ при всех $n \geq 0$ и некотором $C > 0$. Отсюда и из (6.2) и (6.3) вытекает, что

$$|x_n| \leq C\left[|x_0| + \sum_{j=n_0}^{n-1}|x_j|\sum_{i=j}^{n-1}\gamma_{i,j}\right]$$

Применяя к последнему неравенству дискретный вариант леммы Гронуолла–Беллмана, получаем

$$|x_n| \leqslant C|x_0|\exp\left[C\sum_{j=n_0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}\gamma_{i,j}\right] \tag{6.4}$$

Если учесть условие (6.2), оценка (6,4) означает ограниченность системы (6.1).

Приведем теперь условия ограниченности решений уравнений

$$x_{n+1} = -\sum_{i=n_0}^{n} a_{n-i}x_i + b_n;\ n \geqslant n_0,\ x_{n_0} = x_0. \tag{6.5}$$

где возмущения b_n суммируемы с квадратом.

Теорема 6.2. Пусть выполнены требования (2.5) или условия теоремы 2.2. Тогда система (6.5) ограничена, если

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n^2 < \infty \tag{6.6}$$

Доказательство. Предположим, что выполнены требования (2.5). Тогда, суммируя по n обе части второго из неравенств (2.5) и используя неотрицательность функции V, заключаем, что любое решение уравнения (1.2) суммируемо с квадратом. В частности,

$$\sum_{i=0}^{\infty} R^2(i) < \infty \tag{6.7}$$

Теперь из (6.6), (6.7) и формулы для представления решения задачи (6.5)

$$x_n = R(n-n_0)x_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} R(n-i-1)b_i$$

вытекает ограниченность системы (6.5), поскольку

$$|x_n| \leqslant C|x_0| + \left[\sum_{i=0}^{\infty} R^2(i) \sum_{j=n_0}^{\infty} b_j^2\right]^{1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brunner H., van der Houwen P.J.* The numerical solution of Volterra equations. Amsterdam: North Holland, 1986. 588 p.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967. 752 с.
3. *Колмановский В.Б., Родионов А.М.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 3–13.
4. *Elaydi S.N.* An introduction to Difference Equations. Berlin: Springer, 1996. 389 p.
5. *Zhang S.* Stability of infinite delay difference systems // Nonlinear Analysis Theory, Methods, Appl. 1994. V. 22. P. 1121–1129.
6. *Колмановский В.Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 1995. № 11. С. 50–64.
7. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IX.1998