УДК 531.39

© 1999 г. Э.Э. Шноль

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений, обладающие конечной (или компактной) группой симметрий и зависящие от одного параметра. Изучается характер потери устойчивости положений равновесия в случаях, когда из-за симметрии собственные значения линеаризованной задачи являются кратными. Приведены условия, определяющие: мягко или жестко теряется устойчивость при изменении параметра, для двукратных собственных значений λ – нулевых или чисто мнимых. Рассмотрены случаи трехкратных нулевых λ, отвечающие тетраэдральной (и кубической) симметрии.

Пусть $\mathbf{r}' = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$ – система дифференциальных уравнений, зависящая от одного (скалярного) параметра. Предположим, что в некотором диапазоне изменения параметра система имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\mathbf{c}(\alpha)$. Для простоты будем считать, что этот интервал задается неравенствами $\alpha_1 < \alpha < 0$. Как известно, в типичном семействе уравнений общего вида есть только два сценария потери устойчивости равновесия при изменении параметра: 1) при критическом значении параметра $\alpha = 0$ ветвь $\mathbf{c}(\alpha)$ сливается с другой ветвью равновесий $\tilde{\mathbf{c}}(\alpha)$ и при дальнейшем изменении параметра они "аннигилируют" (точнее, при малых $\alpha > 0$ в некоторой области U, содержащей $\mathbf{c}(0)$, положений равновесия нет); 2) при изменении α положение равновесия $\mathbf{c}(\alpha)$ плавно эволюционирует, при $\alpha > 0$ становится неустойчивым и около него возникает предельный цикл малой амплитуды (устойчивость при этом теряется мягко, если цикл рождается при $\alpha > 0$ и жестко в противном случае ([1], разд. 33)). Первый случай связан с обращением в нуль одного собственного значения λ оператора линеаризации $L = \mathbf{f}'_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}(0), 0)$ (в этом случае можно не говорить о "потере устойчивости равновесия": исчезает само равновесие). Второй случай связан с прохождением пары комплексно сопряженных собственных значений через мнимую ось.

Общие правила не применимы, если система обладает какой-либо симметрией. Часто встречающийся случай – система с нечетной по $\mathbf{r}$ правой частью. Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ есть положение равновесия при всех α. При появлении $\lambda = 0$ из этого равновесия рождается пара равновесий $\mathbf{c}^{\pm}(\alpha)$ – происходит бифуркация типа "вилка". Устойчивость здесь также может теряться мягко или жестко.

В этом примере, однако, не проявляется важная особенность симметричных систем: наличие кратных собственных значений λ при всех значениях параметра. Такая кратность может возникнуть, если группа симметрии *некоммутативна*, и тогда события, сопутствующие потере устойчивости, могут быть весьма сложными. Например, из равновесия могут возникать "хаотические" колебания малой амплитуды, если при прохождении параметра через критическое значение возникают четырехкратное нулевое λ [2] или трехкратная пара чисто мнимых λ [3].

Как и в общих системах, характер потери устойчивости положения равновесия при изменении параметра определяется тем, что происходит "в критический момент". Если при $\alpha = 0$ еще сохраняется асимптотическая устойчивость, то при $\alpha > 0$ она теряется мягко. Если же при $\alpha = 0$ равновесие неустойчиво – то жестко ([4], разд. 44; [5], гл. 1, разд. 5).

В этой статье приведены критерии устойчивости при $\alpha = 0$ для случаев двукратных критических собственных значений λ (нулевых или чисто мнимых) и трехкратных нулевых

λ[1]. В основном рассматриваются конечные группы симметрии: при непрерывных группах симметрии (и изолированном равновесии) задачи обычно упрощаются. Как и в отсутствие симметрии, исследовать вопрос об устойчивости при $\alpha = 0$ много легче, чем решить бифуркационную задачу – обрисовать локальный фазовый портрет при малых α. В ряде случаев здесь получен ответ тогда, когда полная бифуркационная картина не известна. Именно так обстоит дело для половины случаев с двукратными мнимыми λ (разд. 3), для задач из разд. 5 и 7.

Чтобы использовать приведенные ниже критерии устойчивости, нужно уметь находить входящие в них коэффициенты. Соответствующие вычисления нетривиальны, требуют отдельного математического рассмотрения (см. [6]) и разработки специальных компьютерных программ (см. [7], гл. 10).

1. Постановка задачи и вспомогательные сведения. Пусть однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений (1.1) инвариантно относительно действия конечной (или компактной) группы Γ линейных преобразований

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha), \quad \mathbf{r}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, \alpha) \equiv \mathbf{0} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{f}(g\mathbf{r}, \alpha) = g\mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha), \quad g \in \Gamma \tag{1.2}$$

Без ограничения общности можно считать, что элементы g группы Γ – ортогональные преобразования в смысле некоторого скалярного произведения. Для простоты предположено, что $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ – положение равновесия при всех значениях параметра α (обладающее максимальной симметрией). Общий случай, когда положение равновесия $\mathbf{c}(\alpha)$ инвариантно лишь относительно некоторой подгруппы группы Γ, легко сводится к этому, если группа Γ конечна. Предполагается, что при $\alpha_1 < \alpha < 0$ все собственные значения λ оператора линеаризации $L_\alpha = \mathbf{f}'_{\mathbf{r}}(\mathbf{0}, \alpha)$ лежат в левой полуплоскости, а при $\alpha = 0$ некоторые λ лежат на мнимой оси.

Задача: выяснить как (мягко или жестко) теряется устойчивость равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ при заданной группе Γ. Или, что то же: выяснить, устойчиво ли равновесие при критическом значении $\alpha = 0$.

Фазовое пространство разлагается, не обязательно единственным образом, в прямую сумму ортогональных подпространств, инвариантных для группы Γ и неприводимых (не содержащих меньших инвариантных подпространств)

$$\mathbf{R}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_s \tag{1.3}$$

При рассмотрении собственных значений оператора L_α приходится выходить в комплексную область, естественным образом продлив действие линейных преобразований g. Каждое подпространство E_k переходит при этом в комплексное подпространство $\tilde{E}_k$. Если размерность E_k нечетная, то $\tilde{E}_k$ будет по-прежнему неприводимым. При четной размерности E_k есть две возможности: 1) $\tilde{E}_k$ распадается в сумму двух инвариантных подпространств половинной размерности, 2) $\tilde{E}_k$ – неприводимо. В последнем случае назовем E_k *абсолютно неприводимым* подпространством.

Предположим, что оператор L_0 имеет ν-кратное собственное значение $\lambda = 0$. Соответствующее собственное подпространство E будет инвариантным относительно действия группы симметрии Γ. Следующая ситуация является "типичной", т.е. сохраняется при произвольном малом возмущении исходного семейства уравнений, не разрушающем его симметрию (или отвечает коразмерности 1 в классе симметричных уравнений): E состоит из собственных векторов и совпадает с одним из абсолютно неприводимых подпространств E_k. Для ν-кратных мнимых λ подпространство E (размерности 2ν) может быть как приводимым, так и неприводимым (см. [8], гл. 16; [9] и Приложение).

---

[1] Опущенные здесь подробности, в том числе часть доказательств, см. *Шноль Э.Э.* О потере устойчивости положений равновесия в симметричных системах дифференциальных уравнений. Препринт. Пущинский научный центр РАН, 1998.

Пример. Пусть m одинаковых двумерных систем связаны в кольцо линейными связями "диффузионного" типа. Полная система $2m$ уравнений имеет вид

$$\mathbf{q}'_k = \mathbf{h}(\mathbf{q}_k) + D(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k) + D(\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{q}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1 (\mathrm{mod}\, m) \tag{1.14}$$

Здесь $\mathbf{q}$ и $\mathbf{h}$ двумерны, D – диагональная матрица (положительные d_1 и d_2 на диагонали). Если двумерная система $\mathbf{q}' = \mathbf{h}(\mathbf{q})$ не обладает "внутренней" симметрией, то группа Г для (1.4) изоморфна полной группе симметрии правильного m-угольника. Имеется инвариантное для действия Г двумерное подпространство $E^{(0)}$, задаваемое условиями $\mathbf{q}_0 = \ldots = \mathbf{q}_{m-1}$; любая прямая в $E^{(0)}$ также инвариантна. При нечетном m имеются еще $(m - 1)/2$ четырехмерных инвариантных подпространств $E^{(l)}$; в $E^{(l)}$

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{a} \cos (k\theta_l) + \mathbf{b} \sin (k\theta_l), \quad \theta_l = 2\pi l/m$$

Здесь $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – произвольные двумерные векторы. Каждое подпространство $E^{(l)}$ разлагается (неединственным образом) в сумму двумерных подпространств, инвариантных для группы Г. В разложении (1.3) имеется, таким образом, два одномерных и $m - 1$ двумерных слагаемых. (Для четного m пространство $E^{(m/2)}$ двумерно и в (1.3) – четыре одномерных слагаемых.)

Система (1.4) имеет симметричные положения равновесия: все $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_*$, $\mathbf{h}(\mathbf{q}_*) = \mathbf{0}$. При $d_1 \neq d_2$ и изменении какого-нибудь параметра такое равновесие может терять устойчивость с потерей симметрии – с выходом из (инвариантного для уравнений (1.4)) подпространства $E^{(0)}$. При этом возникают двукратные нулевые или чисто мнимые собственные значения и рождаются дискретные аналоги "диссипативных структур" или волн.

Замечание. В этом сравнительно простом, примере известны все бифуркационные события (см., в частности, [8], гл. 18).

Имеется общая теорема, позволяющая при рассмотрении бифуркаций изучать систему дифференциальных уравнений, размерность которой равна числу собственных значений, попадающих на мнимую ось. Это теорема о центральном или нейтральном многообразии ([1], разд. 32; [10], гл. 2). Для задачи об устойчивости аналогичное утверждение было установлено раньше [11]. Ниже рассматриваются именно такие системы, имеющие минимально возможную (при данной группе Г) размерность. При этом "работает" не вся группа Г, а ее ограничение G на подпространство E (или, что то же, – на центральное многообразие).

2. Двукратные нулевые λ. Пусть двумерная система $\mathbf{r}' = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ инвариантна относительно группы ортогональных преобразований G, действующей в $\mathbf{R}^2$ абсолютно неприводимо (см. разд. 1). Есть две возможности: 1) G совпадает с полной группой ортогональных преобразований $\mathbf{O}(2)$, 2) G совпадает с $\mathbf{D}_m$ – полной группой симметрии правильного m-угольника.

По предположению $L = \mathbf{f}'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, т.е. линейные члены в $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ отсутствуют. Задача об устойчивости равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ в первом случае тривиальна. Система здесь имеет вид

$$x' = axr^2 + O(r^4), \quad y' = ayr^2 + O(r^4)$$

и устойчивость определяется знаком a.

Для группы $\mathbf{D}_m$ выберем декартовы координаты x и y так, чтобы ось x была одной из осей симметрии m-угольника, и заметим, что каждая ось симметрии будет инвариантной прямой для системы. Тогда системы с симметрией $\mathbf{D}_m$ в комплексной координате $\zeta = x + iy$ будут иметь вид (a и b – вещественны)

$$\begin{aligned} &m = 3\colon\ \zeta' = a\bar{\zeta}^2 + O(r^3), \quad r^2 = |\zeta|^2 = x^2 + y^2 \\ &m = 4\colon\ \zeta' = a\zeta|\zeta|^2 + b\bar{\zeta}^3 + O(r^4) \\ &m \geqslant 5\colon\ \zeta' = a\zeta|\zeta|^2 + O(r^4) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Замечание. Подобные системы возникают при изучении бифуркаций предельных циклов в общих, несимметричных системах ([1], разд. 35). Там, однако, коэффициенты комплексные.

Для $m = 3$ и $m \geqslant 5$ ответ на вопрос об устойчивости очень прост. При $m = 3$ на оси x имеем уравнение $x' = ax^2 + O(x^3)$: положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво при $a \neq 0$. При $m \geqslant 5$ имеется асимптотическая устойчивость при $a < 0$ и неустойчивость при $a > 0$: $\Lambda = x^2 + y^2$ – функция Ляпунова.

Предложение 2.1. Положение равновесия $x = y = 0$ системы (2.1) с симметрией $\mathbf{D}_4$ асимптотически устойчиво при выполнении условий: $a < 0$, $|a| > |b|$. Или

$$a + b < 0, a - b < 0 \tag{2.2}$$

Положение равновесия неустойчиво, если $a > 0$ или $|a| < |b|$.

Доказательство. Положим $\Lambda = |\zeta|^2$. В силу системы (2.1) $\Lambda' \leqslant 2ar^4 + 2|b|r^4 + O(r^5)$. При выполнении неравенств (2.2) $\Lambda' < 0$ при $0 < |\zeta| < r_*$ и положение равновесия $\zeta = 0$ асимптотически устойчиво. На оси x имеем $x' = (a + b)x^3 + O(x^4)$, и неустойчивость при $a + b > 0$ очевидна. На (инвариантной) прямой $x = y$ имеем $x' = 2(a - b)x^3 + O(x^4)$, и неустойчивость при $a - b > 0$ также очевидна.

3. Двукратные мнимые λ. Двукратная пара чисто мнимых собственных значений возникает при изменении одного параметра двумя способами (см. Приложение). Бифуркационные картины при этом сильно отличаются (и известны лишь частично[2]), но для задачи об устойчивости в критический момент это различие не существенно. В обоих случаях система четырех уравнений на центральном многообразии при $\alpha = 0$, после приведения ее к нормальной форме до третьего порядка включительно, имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= i\omega\zeta_1 + \zeta_1(A_1r_1^2 + A_2r_2^2) + O(r^4), \quad r_k = |\zeta_k| \\ \zeta_2' &= i\omega\zeta_2 + \zeta_2(A_2r_1^2 + A_1r_2^2) + O(r^4), \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь ζ_1 и ζ_2 – комплексные переменные, A_1 и A_2 – комплексные коэффициенты; для первого случая, как правило, $A_1 \neq A_2$; для второго, напротив, всегда $A_1 = A_2$. Система (3.1) выглядит так же, как в задаче об устойчивости при двух различных парах мнимых собственных значений ($\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$). Точнее, она получается из общей записи при $\omega_1 = \omega_2$ и специальном выборе коэффициентов при кубичных членах.

Критерий устойчивости (Г.В. Каменкова; см. [12] и [13], разд. 1.3) для этого случая дает: положение равновесия (0, 0) системы (3.1) асимптотически устойчиво, если выполнены следующие два условия: 1) $a_1 < 0$; 2) $a_1 + a_2 < 0$ ($a_k = \mathrm{Re}\,(A_k)$); положение равновесия неустойчиво, если $a_1 > 0$ или $a_1 + a_2 > 0$; во втором случае, когда $a_1 = a_2 = a$, устойчивость определяется знаком a.

4. Трехкратные нулевые λ. Здесь G – подгруппа группы $\mathbf{O}(3)$ ортогональных преобразований трехмерного пространства, действующая неприводимо, т.е. не имеющая инвариантных подпространств размерности 1 и 2. Обозначим через G_+ подгруппу G, состоящую из собственных ортогональных преобразований; каждое такое преобразование есть поворот вокруг некоторой оси l.

Правые части изучаемой системы образуют векторное поле $\mathbf{f}$, инвариантное относительно группы G в смысле (1.2). Если прямая l – одна из поворотных осей симметрии, то на ней поле $\mathbf{f}$ параллельно l: эта прямая инвариантна для уравнений.

Имеются следующие возможности для группы G_+, при которых G действует неприводимо ([14], разд. 13; [15], разд. 93): 1) G_+ совпадает со всей группой собственных ортогональных преобразований $\mathbf{SO}(3)$; 2) G_+ есть группа T поворотов тетраэдра (12 элементов); 3) G_+ есть группа O поворотных симметрий куба (или пра-

[2] См. *Шноль Э.Э., Николаев Е.В.* О бифуркациях положений равновесия в системах дифференциальных уравнений, обладающих конечной группой симметрий. Препринт. Пущинский научный центр РАН, 1997.

вильного октаэдра), содержащая 24 элемента; 4) G_+ есть группа Y поворотов правильного додекаэдра (или икосаэдра).

Случай 1 тривиален. Ниже подробно рассмотрен случай 2 и приведены результаты для случаев 3 и 4.

5. Тетраэдральная симметрия (G_+ – группа T вращений тетраэдра). Обозначим декартовы координаты x, y, z и запишем изучаемую систему трех уравнений в виде

$$x' = u(\mathbf{r}, \alpha),\ y' = v(\mathbf{r}, \alpha),\ z' = w(\mathbf{r}, \alpha) \tag{5.1}$$

При $\alpha = 0$ линейные члены в u, v, w по предположению отсутствуют. В силу (1.2) при преобразованиях группы G векторное поле $\mathbf{f} = (u, v, w)$ преобразуется так же, как $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Тем же свойством обладает любая однородная компонента этого поля $\mathbf{f}_k = (u_k, v_k, w_k)$ ($\mathbf{f}_k$ – совокупность членов тейлоровского разложения $\mathbf{f}$ по $\mathbf{r}$, имеющих степень k).

Расположим правильный тетраэдр так, чтобы его оси симметрии второго порядка (проходящие через середины противоположных ребер) совпадали с координатными осями. При этом четыре оси симметрии третьего порядка (проходящие через вершины) совпадут с биссектрисами координатных октантов: $x = \pm\, y = \pm\, z$. Будем говорить, что векторное поле инвариантно относительно группы линейных преобразований, если для него выполнены соотношения типа (1.2) (такие векторные поля называют также "эквивариантными").

Лемма 5.1. Квадратичное векторное поле $\mathbf{f}_2$, инвариантное относительно группы T (при указанной выше ее реализации), имеет вид

$$u_2 = ayz,\ u_2 = azx,\ w_2 = axy$$

Доказательство. При повороте вокруг оси x на 180° $x \to x, y \to -y, z \to -z$, и должно быть $u \to u$. Отсюда $u_2 = cx^2 + P_2(y, z)$. При повороте вокруг оси y на 180° $x \to -x, y \to \to y$, $z \to -z$, и должно быть $u \to -u$. Отсюда $c = 0$ и $P_2(y, z) = ayz$. Аналогично устанавливается вид v_2 и w_2. Совпадение коэффициентов следует из того, что при повороте вокруг оси $x = y = {}$ $= z$ на 120° $u \to v$ и $v \to w$.

Замечание. Квадратичное поле $\mathbf{f}_2$ инвариантно также относительно полной группы T_d симметрии тетраэдра (включающей отражения).

В силу леммы 5.1 система уравнений при $\alpha = 0$ имеет вид

$$x' = ayz + \ldots,\ y' = azx + \ldots,\ z' = axy + \ldots$$

где многоточие заменяет $O(r^3)$. Положение равновесия (0, 0, 0) при $a \neq 0$ неустойчиво. Действительно, прямая l: $x = y = z$ инвариантна для системы (см. разд. 4). На l система сводится к уравнению $x' = ax^2 + O(|x|^3)$, и неустойчивость очевидна. Из сказанного вытекает следующее предложение.

Предложение 5.1. Пусть система трех дифференциальных уравнений $\mathbf{r}' = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$ инвариантна относительно группы вращений тетраэдра T или полной группы его симметрий T_d. Тогда система имеет вид

$$\mathbf{r}' = \lambda(\alpha)\mathbf{r} + a(\alpha)\mathbf{s}_2(\mathbf{r}) + O(|\mathbf{r}|^3)$$

Пусть $\lambda(0) = 0$ и предположим, что выполнены следующие условия невырожденности: 1) $\lambda'(0) \neq 0$, 2) $a(0) \neq 0$. Тогда при $\alpha = 0$ устойчивость положения равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ теряется жестко. Здесь в подходящих переменных $\mathbf{s}_2(\mathbf{r}) = (yz, zx, xy)$.

Рассмотрим еще одну возможность. При $G_+ = T$ полная группа симметрии G может получаться добавлением центральной симметрии (см. [13], разд. 93, X). При такой группе G правые части системы – нечетные функции, квадратичные члены отсутствуют, и неустойчивость при $\alpha = 0$ перестает быть правилом.

Лемма 5.2. Векторное поле $\mathbf{f}_3$, инвариантное относительно группы T (при указанной выше ее реализации), имеет вид

$$u_3 = x(ax^2 + by^2 + cz^2),\ v_3 = y(ay^2 + bz^2 + cx^2) \quad w_3 = z(az^2 + bx^2 + cy^2) \tag{5.2}$$

Доказательство. Напишем

$$u_3 = ax^3 + x^2P_1(y, z) + xP_2(y, z) + P_3(y, z)$$

При повороте вокруг оси x на 180° должно быть $u \to u$. Отсюда $P_1 = P_3 \equiv 0$. При повороте вокруг оси y на 180° должно быть $u \to -u$. Отсюда $P_2(y, z) = by^2 + cz^2$. При повороте вокруг оси $x = y = z$ на 120° $u \to v$ и $v \to w$, и потому соответствующие коэффициенты в формулах (5.2) совпадают.

Предложение 5.2. Пусть система трех дифференциальных уравнений $\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ инвариантна относительно группы G (порожденной группой T и центральной симметрией). Тогда при отсутствии линейных членов

1°. В подходящих переменных система имеет вид $\mathbf{r}' = \mathbf{f}_3(\mathbf{r}) + O(|\mathbf{r}|^4)$, кубичные члены $\mathbf{f}_3(\mathbf{r})$ описаны в лемме 5.2.

2°. Положение равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ системы асимптотически устойчиво при выполнении условий

$$a < 0,\ a + b + c < 0 \tag{5.3}$$

3°. Положение равновесия неустойчиво, если $a > 0$ или $a + b + c > 0$.

Доказательство. 1°. Это утверждение следует из леммы.

2°. При выполнении неравенств (5.3) $\Lambda = {}^1/_2|\mathbf{r}|^2$ является функцией Ляпунова. Действительно, производная Λ' в силу системы равна

$$a(x^4 + y^4 + z^4) + (b + c)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + O(r^5)\ (r = |\mathbf{r}|)$$

Если $a < 0$ и $b + c < 0$, то $\Lambda' < 0$ при $0 < r < r_*$. При $a < 0$ и $b + c \geqslant 0$

$$\Lambda' < (a + b + c)(x^4 + y^4 + z^4) + O(r^5)$$

Правая часть этого неравенства отрицательна при $0 < r < r_*$, если $a + b + c < 0$.

3°. Ось x инвариантна для системы. На ней $x' = ax^3 + O(x^4)$, и неустойчивость при $a > 0$ очевидна. На (инвариантной) прямой $x = y = z$ имеем $x' = (a + b + c)x^3 + O(x^4)$, и неустойчивость при $a + b + c > 0$ также очевидна.

6. Кубическая симметрия (G_+ – группа O поворотных симметрий куба). Выберем декартову систему координат так, чтобы ее оси были параллельны ребрам куба, а начало совпадало с его центром.

Пусть система трех дифференциальных уравнений инвариантна относительно группы O вращений куба или полной группы O_h его симметрий. Тогда в указанных переменных справедливы утверждения Предложения 5.2, в формулировке которых нужно положить $b = c$.

7. Симметрия додекаэдра. В этом случае квадратичные члены в уравнениях (5.1) отсутствуют, а кубичные имеют тот же вид, что при сферической симметрии.

Предложение 7.1. Пусть система трех дифференциальных уравнений инвариантна относительно группы Y вращений додекаэдра. Тогда при отсутствии линейных членов

1) система имеет вид $x_k' = ax_kr^2 + O(r^4)$ (x_k ($k = 1, 2, 3$) – декартовы координаты);

2) положение равновесия (0, 0, 0) асимптотически устойчиво при $a < 0$ и неустойчиво при $a > 0$.

Приложение (о двукратных мнимых λ в задачах коразмерности 1). Пусть $\mathbf{R}^n = E_1 + \ldots + E_s$ – разложение фазового пространства на неприводимые компоненты (см. разд. 1). Обозначим через Γ_k ограничение группы Γ на инвариантное подпространство E_k. Соответствие $\Gamma \to \Gamma_k$ дает (линейное) неприводимое представление группы Γ в пространстве E_k. Двукратные мнимые собственные значения оператора L_α могут возникать (неустранимым образом) при изменении одного параметра в двух случаях [8, 9].

1) Существует четырехмерное подпространство E_k, для которого представление $\Gamma \mapsto \Gamma_k$ не является абсолютно неприводимым (распадается при комплексификации).

2) Существуют два двумерных подпространства E_i и E_j, представления в которых абсолютно неприводимы и изоморфны.

В первом случае четырехмерное собственное подпространство E, отвечающее двукратным $\lambda = \pm i\omega$, совпадает с E_k. Во втором случае E есть прямая сумма E_i и E_j. Будет ли в формуле (3.1) обязательно $A_1 = A_2$, зависит от группы G – ограничения группы Γ на подпространство E (см. работу, указанную в сноске к разд. 3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00954).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с. = *Arnol'd V.I.* Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.

2. *Guckenheimer J., Worfolk P.* Instant chaos // Nonlinearity. 1992. V. 5. № 6. P. 1211–1222.

3. *Swift J., Barany E.* Chaos in the Hopf bifurcation with tetrahedral symmetry: convection in a rotating fluid with low Prandtl number // Europ. J. Mechanics. B. Fluids. 1991. V. 10. № 2. Suppl. P. 99–104.

4. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.

5. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундамент. направления. Динамические системы. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 5–218. = *Arnol'd V.I., Afraimovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P.* Bifurcation Theory // Arnol'd V.I. (Ed.) Dynamical Systems V. Berlin etc.; Springer-Verlag, 1994. P. 1–205.

6. *Куракин Л.Г., Юдович В.И.* Полуинвариантная форма критериев устойчивости равновесия в критических случаях // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 707–711.

7. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. New York etc.: Springer, 1995. 515 p.

8. *Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D.G.* Singularities and Groups in Bifurcation Theory. V. 2. New York etc.: Springer, 1988. 533 p.

9. *Werner B.* Eigenvalue problems with the symmetry of a group and bifurcations // Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications / Eds D. Roose et al. Dordrecht etc.: Kluwer, 1990. P. 71–88.

10. *Marsden J., McCracken M.* Hopf Bifurcation and its Applications. New York: Springer, 1976. 408 p. = *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

11. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28. № 6. С. 1297–1324.

12. *Каменков Г.В.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 258 с.

13. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: Изд. НЦБИ АН СССР, 1985. 215 с. = *Khazin L.G., Shnol E.E.* Stability of critical equilibrium states. Manchester: Manchester University Press, 1991. 208 p.

14. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундамент. направления. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1986. 289 с. = = *Shafarevich I.R.* Basic Notions of Algebra. Springer-Verlag, 1989. 272 p.

15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика, нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 767 с. = *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Oxford: Pergamon Press, 1977.

Пущино, Моск. обл.

Поступила в редакцию
1.IX.1998