

УДК 531.36 : 534.1

© 1999 г. М.А.Ф. Азиз, А.Ф. Вакакис, Л.И. Маневич

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВИБРОУДАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

Негладкие преобразования времени применяются для исследования сильно нелинейных периодических свободных колебаний виброударной системы с двумя степенями свободы. Учет граничных условий в моменты соударений позволяет исключить сингулярности, индуцированные этими преобразованиями. Сглаженные уравнения движения оказываются линейными. Исследование периодических решений обнаруживает виброударные режимы с односторонними и двухсторонними соударениями, в том числе локализованные (лишь одна из масс испытывает соударения с ограничителями), и их бифуркационную структуру.

Для исследования виброударных колебаний и близких к ним решений применялись различные подходы, включая отображения Пуанкаре [1, 2], сведение к граничным задачам [3], численное интегрирование уравнений движения [4], теорию возмущений и другие аналитические методы [5–10]. В этой статье свободные периодические колебания виброударной системы с двумя степенями свободы изучаются с использованием негладких преобразований времени [7, 8], примененных ранее [9–12] для построения модифицированной теории возмущений сильно нелинейных систем. Устойчивость либо неустойчивость выделенных периодических режимов устанавливалась путем численного интегрирования уравнений движения при начальных условиях, соответствующих теоретическим решениям. При этом в устойчивом случае в течение длительного (по сравнению с периодами собственных колебаний линеаризованной системы) времени численное решение оставалось близким к теоретическому, а в неустойчивом наблюдалось быстрое их расхождение.

Рассматривается система, состоящая из двух линейных осцилляторов единичной массы и жесткости, связанных между собой линейно упругой пружиной с жесткостью  $\epsilon$ . Амплитуды колебаний обеих масс лимитируются абсолютно жесткими ограничителями, симметрично расположенными на единичных расстояниях от каждой массы. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{u}_1 + u_1 + \epsilon(u_1 - u_2) + P(u_1, \dot{u}_1) = 0, \quad \ddot{u}_2 + u_2 + \epsilon(u_2 - u_1) + P(u_2, \dot{u}_2) = 0 \tag{1}$$

$$P(u_i, \dot{u}_i) = 2\dot{u}_i[\delta(u_i + 1) - \delta(u_i - 1)], \quad i = 1, 2$$

(точка означает производную по времени  $t$ ).

С целью упростить исследование виброударных режимов введем негладкое преобразование времени [7, 8]

$$\tau(t) = \frac{T}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{\pi t}{T}\right); \quad e(t) = \dot{\tau}(t) \tag{2}$$

где  $T$  – полупериод искомого решения. При этом  $\tau = \tau(\tau)$  – пилообразная функция, а ее производная (в смысле теории обобщенных функций) – прямоугольный косинус. Выражая производные функций  $u_i(t)$  в терминах переменной  $\tau$ , получим

$$\dot{u}_i = u'_i e, \quad \ddot{u}_i = u''_i e^2 - 2u'_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta(t - T_*), \quad T_* = \frac{T}{2} + kT, \quad e^2 = 1$$

(штрих означает производную по  $\tau$ ).

Следовательно, вторая производная  $\ddot{u}_i$  содержит сингулярные члены, которые описывают разрывы в моменты времени  $t = T_*$  и равны нулю везде, кроме этих точек. Эти разрывы несущественны, если в те же моменты времени  $u'_i = 0$ , в противном случае с указанными моментами времени ассоциируются соударения  $i$ -й массы с ограничителями. Но тогда нелинейные члены в уравнениях движения можно записать следующим образом:

$$P(u_i, \dot{u}_i) = 2u'_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta(t - T_*)$$

Здесь также возникают сингулярности при  $t = T_*$ , которые несущественны, если в эти же моменты времени  $u'_i = 0$  (отметим, что нули функции  $u'_i$  будут и нулями функции  $\dot{u}_i$ ). Очевидно, эти члены компенсируются сингулярными слагаемыми, входящими в выражение для второй производной  $\ddot{u}_i$ .

Таким образом, при исследовании периодических режимов, в которых каждому соударению одной из масс с ограничителем соответствует соударение либо максимум смещения (без соударения) второй массы, уравнения движения после замены времени линеаризуются и принимают вид

$$u'_1 + u_1 + \varepsilon(u_1 - u_2) = 0, \quad u'_2 + u_2 + \varepsilon(u_2 - u_1) = 0 \quad (3)$$

Исключая из рассмотрения тривиальные случаи синфазной и антифазной нормальных мод, когда удары отсутствуют либо соударения обеих масс с ограничителями происходят одновременно, принимаем следующие начальные условия для системы (3):

$$u_1(0) = 1, \quad u'_2(0) = 0 \quad (4)$$

(начало координат по времени  $\tau$  сдвигаем в точку первого соударения, не изменяя обозначений). Тогда соответствующее решение можно записать следующим образом:

$$u_{1,2}(\tau) = \frac{1+u_2(0)}{2} \cos \tau \pm \frac{1-u_2(0)}{2} \cos \alpha \tau + \frac{u'_1(0)}{2} \sin \tau \pm \frac{u'_1(0)}{2\alpha} \sin \alpha \tau \quad (5)$$

где  $\alpha = \sqrt{1+2\varepsilon}$  – параметр связи, знак плюс берется для  $u_1$ , минус – для  $u_2$ .

Отметим, что в отличие от исходной системы решения уравнений (3) существуют лишь в области  $|\tau| \leq 1$ . По сути дела, можно определить виброударное решение на полупериоде колебаний, решая краевую задачу, а затем, учитывая периодичность функции  $\tau = \tau(t)$ , периодически продолжить его на большие интервалы времени. При этом рассмотрим три типа периодических виброударных колебаний, соответствующие следующим граничным условиям:

$$\text{Тип а: } u'_1(T) = 0, \quad u_2(T) = -1$$

$$\text{Тип б: } u_1(T) = -1, \quad u'_2(T) = 0 \quad (6)$$

$$\text{Тип в: } u'_1(T) = 0, \quad u_2(T) = 1$$

В дополнение учитываются условия (4) при  $\tau=0$ . Подставляя выражения (5) в (6), получаем трансцендентные соотношения

$$\frac{1+u_2(0)}{2} \cos T + I_u \frac{1-u_2(0)}{2} \cos \alpha T + \frac{u'_1(0)}{2} \sin T + I_u \frac{u'_1(0)}{2\alpha} \sin \alpha T = I_\varphi \quad (7)$$

$$-\frac{1+u_2(0)}{2} \sin T - I_u \frac{1-u_2(0)}{2} \alpha \sin \alpha T + \frac{u'_1(0)}{2} \cos T + I_u \frac{u'_1(0)}{2\alpha} \cos \alpha T = 0$$

Зависящие от типа виброударных колебаний коэффициенты принимают следующие значения:

$$\text{Тип } a: I_u = -1, I_u = +1, I_\varphi = -1$$

$$\text{Тип } б: I_u = +1, I_u = -1, I_\varphi = -1 \quad (8)$$

$$\text{Тип } в: I_u = -1, I_u = +1, I_\varphi = +1$$

Выражая  $u_1'(0)$  через  $u_2(0)$  из второго уравнения (7) и подставляя результат в первое уравнение, получим выражение, связывающее полупериод  $T$  и  $u_2(0)$

$$u_2(0)(\cos T - I_u \cos \alpha T) + \cos T + I_u \cos \alpha T + u_1'(0) \left( \sin T + \frac{I_u}{\alpha} \sin \alpha T \right) - 2I_\varphi = 0 \quad (9)$$

причем  $\max_{0 \leq \tau \leq 1} \{|u_1(\tau)|, |u_2(\tau)|\} \leq 1$ .

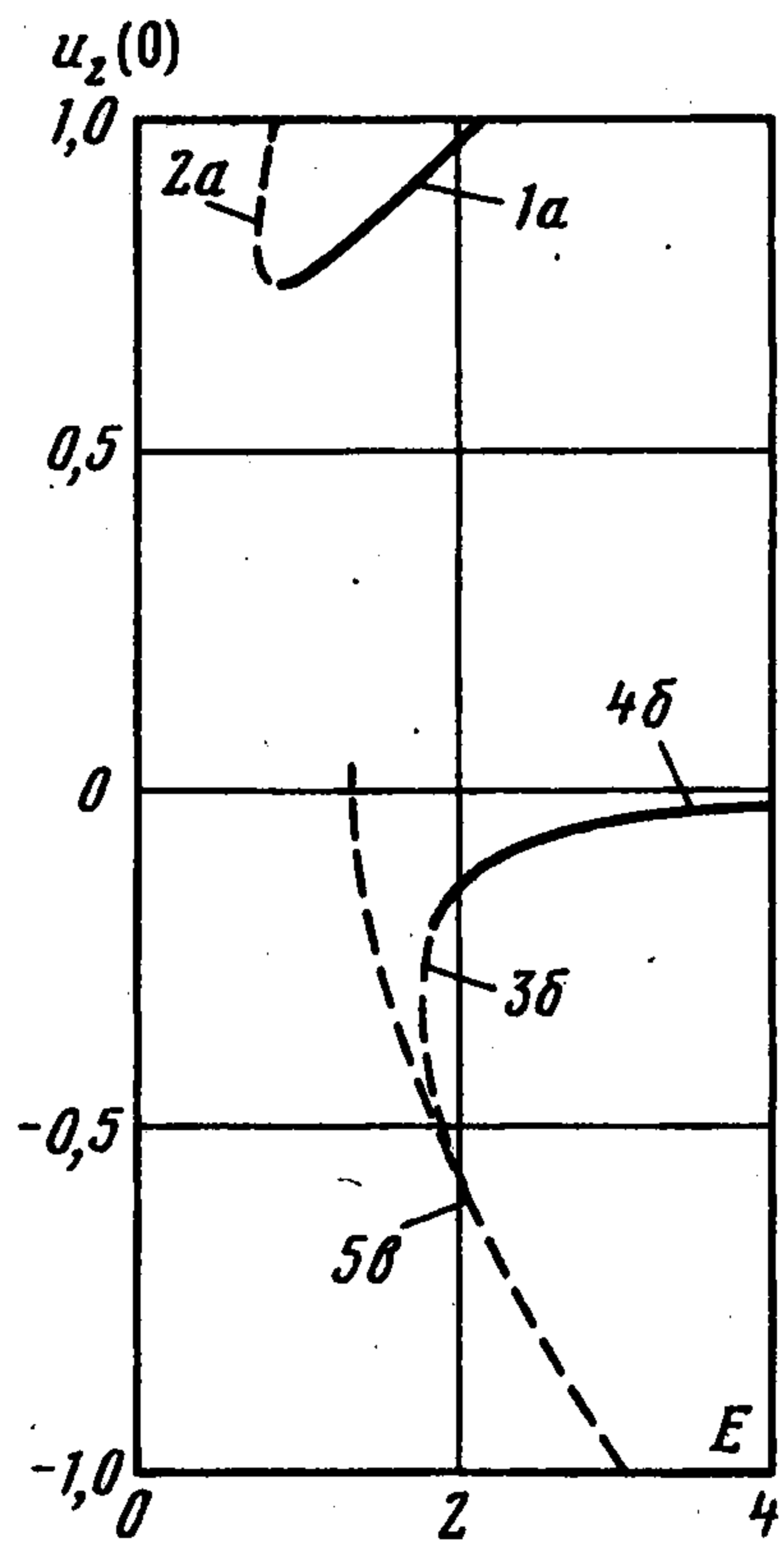
Численное решение (9) при изменяемых значениях  $u_2(0)$  обнаруживает сложные периодические виброударные режимы типов  $a, б, в$ . В дальнейшем анализировались решения с полупериодами  $0 \leq T \leq 2\pi$ , но низкочастотные режимы могут быть исследованы аналогичным образом. Устойчивость выявленных периодических орбит изучалась численно путем интегрирования исходящих уравнений движения при теоретически предсказанных начальных условиях.

Наиболее простым с точки зрения предсказания периодических виброударных режимов является случай малого параметра связи ( $\epsilon \ll 1$ ), который подробно изучен ранее [3] и здесь поэтому не рассматривается.

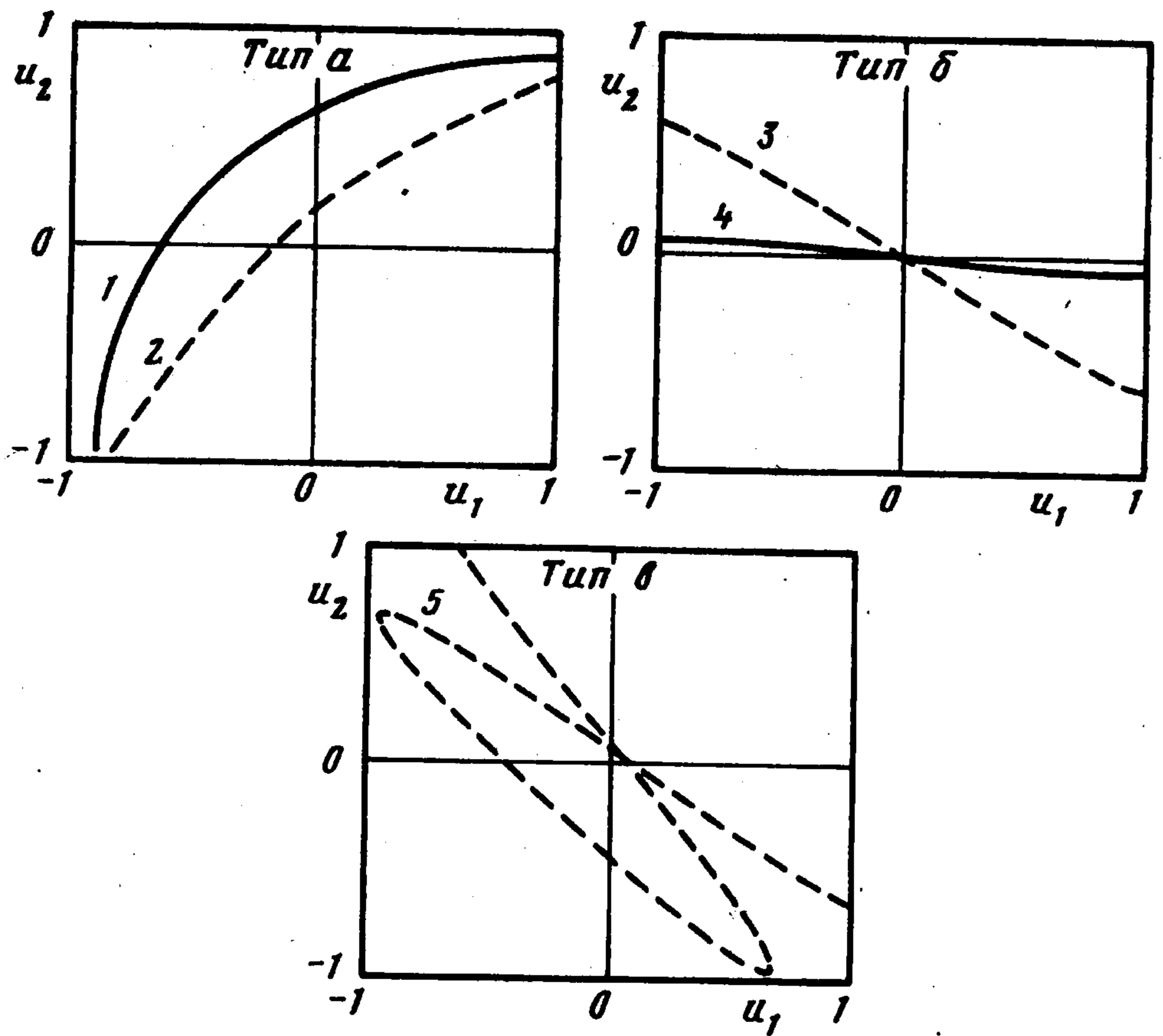
На фиг. 1 представлены ветви решения в плоскости "полная энергия  $E$ -амплитуда  $u_2(0)$ " для значения параметра связи  $\epsilon = 1$ . Ветвям решения 1 и 2 отвечают соответственно устойчивые (сплошные кривые) и неустойчивые (штриховые кривые) периодические режимы с односторонними ударами одной из масс о ее левый ограничитель, а второй – о правый (тип  $a$ ), т.е. соударения происходят с "разноименными" ограничителями. Неустойчивая ветвь 3 и устойчивая 4 соответствуют колебаниям с двухсторонними соударениями первой массы (тип  $б$ ), при этом вторая масса соударений не испытывает. Наконец, решение 5 типа  $в$  (случай односторонних соударений каждой из масс с их "одноименными" ограничителями) неустойчиво. Некоторые формы колебаний на конфигурационной плоскости  $(u_1, u_2)$  при  $\epsilon = 1$  представлены на фиг. 2, устойчивые моды показаны сплошными кривыми, неустойчивые – штриховыми. Сопоставление кривых на фиг. 1 и фиг. 2 позволяет сделать важные выводы об изменении последовательности рождения различных типов периодических режимов с возрастанием параметра энергии системы.

При достаточно малых энергиях, очевидно, устойчивыми являются не рассматриваемые здесь синфазные и антифазные нормальные моды без соударений. В случае слабой связи ( $\epsilon = 0, 1$ ) с увеличением энергии в результате бифуркации "седло – узел" рождаются две пары локализованных мод с двухсторонними соударениями одной из масс [3]. Оказывается, что в случае, когда параметр связи  $\epsilon = 1$ , возрастание параметра энергии приводит прежде всего (при значении этого параметра, близком к единице) к рождению устойчивой (1а) и неустойчивой (2а) мод с односторонними ударами масс о "разноименные" ограничители (фиг. 1). Лишь с дальнейшим увеличением параметра энергии (при его значении, близком к двум) рождаются две устойчивые и две неустойчивые моды типа  $б$  (на фиг. 1, 2 показана только одна пара: устойчивая и неустойчивая моды). Моды же типа  $в$  с односторонними ударами об "одноименные" ограничители неустойчивы.

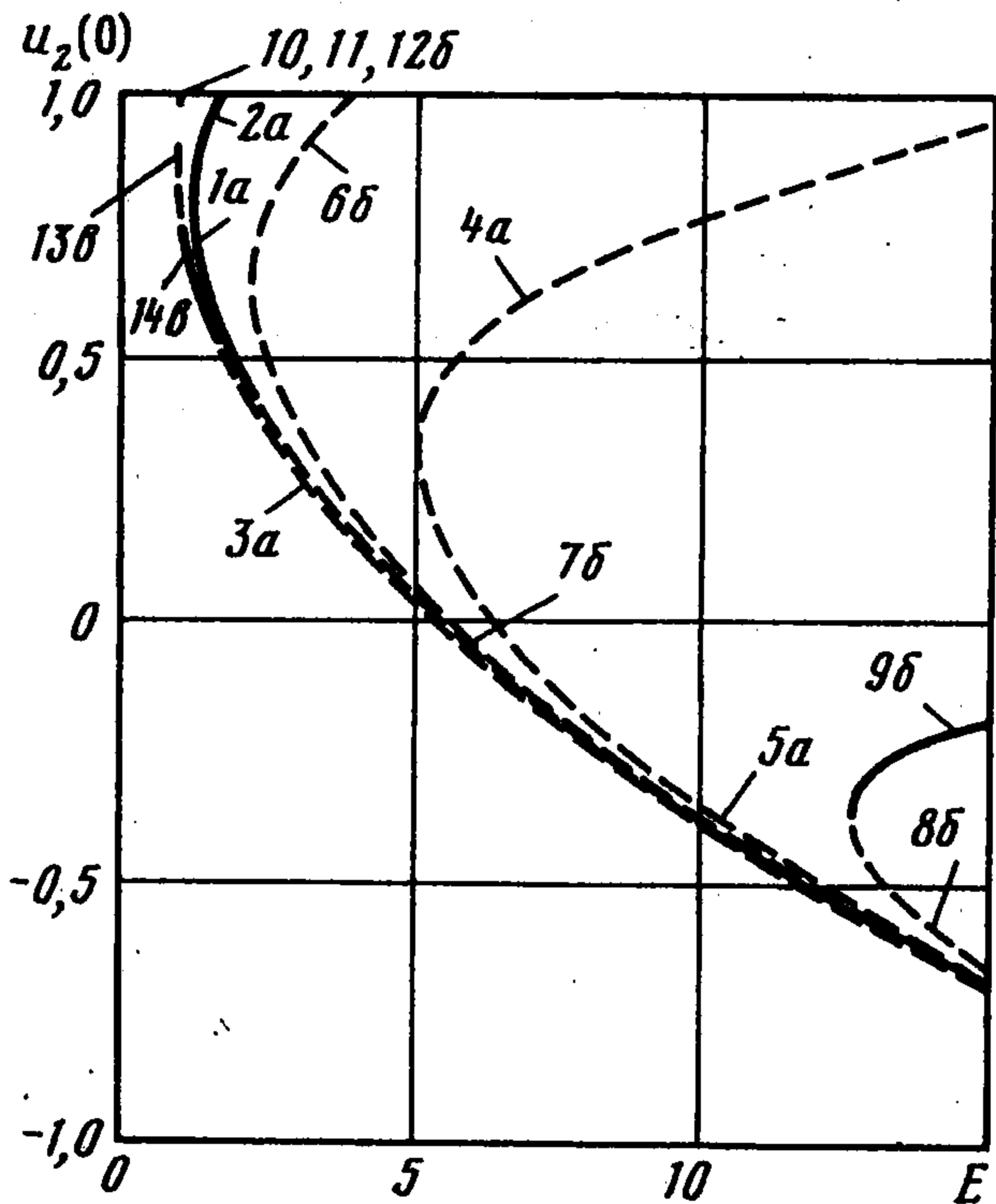
Чтобы показать усложнение поведения системы при больших значениях параметра связи, представлены данные (фиг. 3 – на плоскости "полная энергия  $E$  – амплитуда  $u_2(0)$ ", фиг. 4 – на конфигурационной плоскости  $(u_1, u_2)$ ), относящиеся к периодическим виброударным режимам при  $\epsilon = 10$ . Здесь ветви 1а и 2а (устойчивые, показанные на фиг. 3 сплошными кривыми), 3а–5а (неустойчивые, показанные штриховыми кривыми)



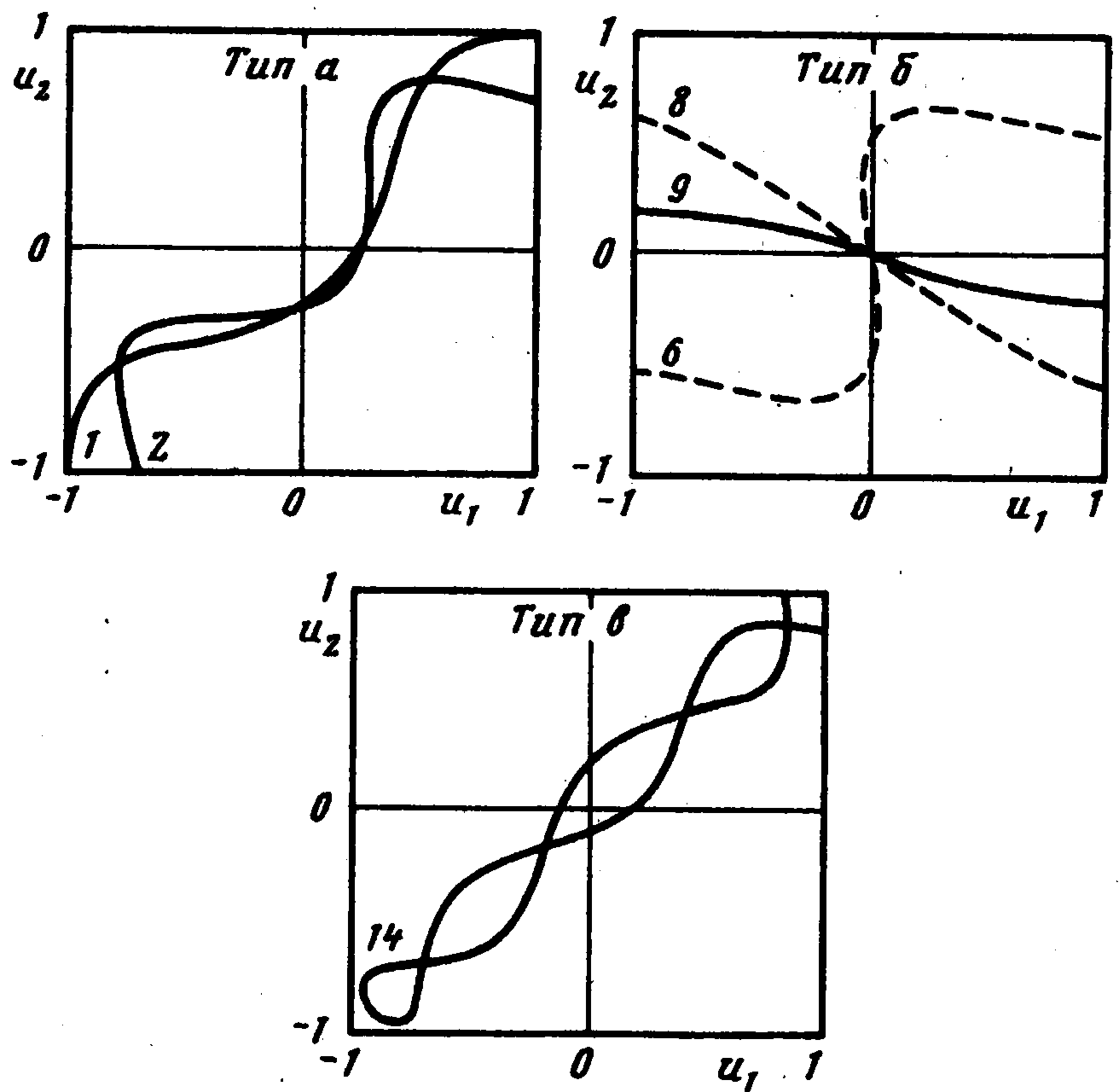
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

относятся к колебаниям типа *a* (соударения с "разноименными" ограничителями). Для ветвей 1*a*–3*a* полупериод изменяется в пределах  $2 < T < 3$ , а для остальных –  $\frac{3}{2} < T < 2$ . Были обнаружены ветви типа *b* (двухсторонние соударения одной из масс). Из них при  $\frac{5}{2} < T < \frac{7}{2}$  – две неустойчивых (10*b*, 12*b*) и одна устойчивая (11*b*), при  $1 < T < \frac{5}{2}$  – две неустойчивых (6*b*, 7*b*), наконец, при  $0 < T < 1$  – одна неустойчивая (8*b*) и одна устойчивая (9*b*). В то же время, в отличие от случая  $\epsilon = 1$ , появляется устойчивая мода (14*b*) (односторонние соударения масс с "одноименными" ограничителями), а вторая мода этого типа (13*b*) оказывается неустойчивой.

На фиг. 4 представлены некоторые из найденных устойчивых и неустойчивых мод типов *a*, *b* и *v*. Номера кривых на фиг. 4 соответствуют обозначениям мод на фиг. 3. Анализ результатов, приведенных на фиг. 3 и 4, свидетельствует о том, что вновь изменяется последовательность рождения мод различного типа. В частности, устойчивые локализованные моды, соответствующие двухсторонним соударениям одной из масс и наиболее важные в случае малых  $\epsilon$ , здесь могут быть реализованы лишь при весьма больших энергиях. Но уже при малых энергиях рождаются моды с односторонними ударами масс об "одноименные" ограничители.

Работа поддержана Национальным научным фондом США (NSF International, 94-57750).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Shaw S., Holmes P.* A periodically forced linear oscillator with impacts: chaos and long period motions // *Phys. Rev. Letters*. 1983. V. 51. № 8. P. 623–626.
2. *Shaw S.* The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constraints. Pt I: Subharmonic motions and local bifurcations. Pt II: Chaotic motions and global bifurcations // *Trans. ASME Appl. Mech.* 1985. V. 52. N. 2. P. 453–464.
3. *Mikhlin Yu.V., Vakakis A.F., Salenger G.* Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system // *Journal of Sound and Vibration*. 1998. V. 216. № 2. P. 227–250.
4. *Emaci E., Nayfeh T.A., Vakakis A.F.* Numerical and experimental study of nonlinear localization in a flexible structure with vibro-impacts // *ZAMM*. 1997. V. 77. № 7. P. 527–541.
5. *Иванов А.П.*, Аналитические методы в теории виброударных систем // *ПММ*. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 5–21.
6. *Peterka F., Vacik J.* Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts // *Sound and Vibration*. 1992. V. 154. № 1. P. 95–115.
7. *Журавлев В.Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1976. № 2. С. 30–34.
8. *Журавлев В.Ф.* Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1977. № 6. С. 24–28.
9. *Пилипчук В.Н.* Преобразование колебательных систем при помощи пары негладких периодических функций // *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1988. № 4. С. 37–40.
10. *Веденова Е.Г., Маневич Л.И., Пилипчук В.Н.* Нормальные колебания в струне с сосредоточенными массами на нелинейно-упругих опорах // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 203–211.
11. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М. Наука, 1989. 216 с.
12. *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. New York: Wiley, 1996. 552 с.

Эрбана (шт. Иллинойс, США),  
Москва  
e-mail: lmanev@chph.ras.ru

Поступила в редакцию  
10.II.1998