УДК 531.31.534.1

© 1999 г. Б.С. Бардин

О ВЕТВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ, БЛИЗКОЙ К СИСТЕМЕ ЛЯПУНОВА

Исследуется ветвление 2π-периодических решений (2π-ПР) системы дифференциальных уравнений второго порядка, близкой к системе Ляпунова. Рассмотрен случай главного резонанса, когда собственная частота линейных колебаний невозмущенной системы близка к частоте возмущающего воздействия. Установлено, что при определенных значениях параметров задачи имеет место ветвление 2π-ПР, рождающихся из положения равновесия. Предложен конструктивный метод нахождения кривой разветвления, а также 2π-ПР на ней. В качестве примеров рассмотрено ветвление 2π-ПР в задаче о колебаниях математического маятника с вибрирующей по горизонтали точкой подвеса и в задаче о плоских колебаниях спутника на слабоэллиптической орбите. В указанных примерах построены кривые разветвления, а также найдены отвечающие этим кривым 2π-ПР.

1. О существовании периодических решений на кривой разветвления. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$dx/dt = -\omega y + X(x, y) + \mu F_1(x, y, t, \mu) \tag{1.1}$$
$$dy/dt = \omega x + Y(x, y) + \mu F_2(x, y, t, \mu)$$

Правые части системы (1.1) являются аналитическими функциями переменных x, y в некоторой достаточно малой окрестности начала координат $x = y = 0$, при этом разложения $X(x, y)$, $Y(x, y)$ в сходящиеся ряды по степеням x, y начинаются с членов не ниже второй степени

$$X(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j, \quad Y(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} b_{ij} x^i y^j \tag{1.2}$$

ω – положительная постоянная, μ – малый параметр задачи. При $\mu = 0$ система (1.1) представляет собой систему Ляпунова. Возмущающие функции $F_i(x, y, t, \mu)$ ($i = 1, 2$) являются аналитическими по μ и 2π-периодическими по t, их разложения Фурье при $x = y = \mu = 0$ задаются формулами

$$F_i(0,0,t,0) = A_{i0} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{im} \cos mt + B_{im} \sin mt) \tag{1.3}$$

Пусть в системе (1.1) имеет место главный резонанс [1], т.е. величина ω близка к целому числу n, и кроме того, хотя бы одна из величин

$$D_1 = \frac{1}{2}(A_{1n} + B_{2n}), \quad D_2 = \frac{1}{2}(A_{2n} - B_{1n}) \tag{1.4}$$

отлична от нуля. Далее положим

$$\omega = n + \delta \tag{1.5}$$

где δ – малая величина.

Ранее [1, 2] исследовалась задача о существовании 2π-периодических решений (2π-ПР) системы (1.1), рождающихся из положения равновесия невозмущенной (при $\mu = 0$) системы. Было показано [2], что плоскость параметров μ, δ разделяется на две подобласти, в одной из которых система (1.1) имеет одно 2π-ПР, а в другой три 2π-ПР указанного вида. Кривую, разделяющую эти подобласти, называют кривой разветвления решений.

В данной работе исследуется вопрос об аналитическом построении кривой разветвления и 2π-ПР на ней в виде сходящихся по дробным степеням параметра μ рядов.

Следуя известному подходу [1, 2], будем искать начальные значения β_1, β_2 переменных x, y, удовлетворяющие условиям 2π-периодичности решений системы (1.1)

$$x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) = \beta_1, \; y(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) = \beta_2 \tag{1.6}$$

Любые достаточно малые β_1, β_2 при $\mu = 0$ определяют периодическое решение с периодом

$$T = 2\pi\omega^{-1}[1 + h_{2l}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^l + \ldots] \tag{1.7}$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости, чем $O(\beta_i^{2l})(i = 1, 2)$ [3].

Искомые периодические решения являются аналитическими функциями β_1, β_2, μ и могут быть представлены в виде

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = x(t, \beta_1, \beta_2, 0) + \mu[c_1(t) + \Phi_1(t, \beta_1, \beta_2, \mu)] \tag{1.8}$$

$$y(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = y(t, \beta_1, \beta_2, 0) + \mu[c_2(t) + \Phi_2(t, \beta_1, \beta_2, \mu)]$$

где функции Φ_i аналитичны относительно β_1, β_2, μ и обращаются в нуль при $\mu = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда условия (1.6) 2π-периодичности x, y запишутся в виде

$$x(2\pi, \beta_1, \beta_2, 0) + \mu[c_1(2\pi) + \Phi_1(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu)] = \beta_1 \tag{1.9}$$

$$y(2\pi, \beta_1, \beta_2, 0) + \mu[c_2(2\pi) + \Phi_2(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu)] = \beta_2$$

Подставляя (1.8) в (1.1) и интегрируя полученные уравнения для $c_i(t)$ с нулевыми начальными условиями, имеем

$$c_i(2\pi) = 2\pi D_i + O(\delta) \tag{1.10}$$

Величины D_i определяются по формулам (1.4). Выражение (1.7) при учете (1.5) можно преобразовать к виду [1]

$$2\pi = nT + \delta\frac{2\pi}{n} - 2\pi h_{2l}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^l + O(\beta^{2l+2}) + O(\delta^2) + O(\delta\beta^{2l}) \tag{1.11}$$

где $O(\beta^{2l+2})$, $O(\delta\beta^{2l})$ – члены, порядок которых относительно β_1, β_2 не ниже $(2l + 2)$ и $2l$ соответственно. Из уравнений (1.1) следует, что

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=nT,\mu=0} = -n\beta_2 + O(\beta^2) + O(\delta\beta) \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT,\mu=0} = n\beta_1 + O(\beta^2) + O(\delta\beta)$$

Разлагая левые части уравнений (1.6) в ряды в окрестности $t = nT$ и $\mu = 0$, а также учитывая соотношения (1.11) и (1.12), условия периодичности (1.9) перепишем в виде

$$nh_{2l}\beta_2(\beta_1^2 + \beta_2^2)^l - \delta\beta_2 + \mu D_1 + \psi_1 = 0 \tag{1.13}$$

$$nh_{2l}\beta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2)^l - \delta\beta_1 - \mu D_2 + \psi_2 = 0$$

где ψ_i – функции, содержащие члены порядков не ниже $O(\beta^{2l+2})$, $O(\delta^2\beta)$, $O(\delta\beta^2)$, $O(\delta\mu)$, $O(\mu\beta)$, $O(\mu^2)$.

Далее, следуя известному подходу [2], ограничимся рассмотрением случая, когда величины $\delta\beta_i$ имеют порядок μ. Тогда из условий (1.13) следует, что $\beta_i = O(\mu^{1/(2l+1)})$, т.е. $\delta = O(\mu^{2l/(2l+1)})$. Положив $\varepsilon = \mu^{1/(2l+1)}$, $\delta = \alpha\varepsilon^{2l}$, $\beta_i = b_i\varepsilon$ (величины α, b_i порядка единицы), из условий 2π-периодичности (1.13) получим

$$f_1 \equiv nh_{2l}b_2(b_1^2+b_2^2)^l - \alpha b_2 + D_1 + O(\varepsilon) = 0 \tag{1.14}$$

$$f_2 \equiv nh_{2l}b_1(b_1^2+b_2^2)^l - \alpha b_1 - D_2 + O(\varepsilon) = 0$$

Из системы (1.14) имеем уравнение

$$b_1 f_1 - b_2 f_2 \equiv b_1 D_1 + b_2 D_2 + O(\varepsilon) = 0 \tag{1.15}$$

Далее для определенности предположим, что $D_2 \neq 0$. Тогда, разрешая уравнение (1.15) относительно b_2 и подставляя результат во второе уравнение (1.14), имеем

$$g(b_1,\alpha,\varepsilon) \equiv f_2(b_1, b_2(b_1,\varepsilon),\alpha,\varepsilon) \equiv b_1^{2l+1} + (2l+1)pb_1 + 2lq + O(\varepsilon) = 0 \tag{1.16}$$

$$p = -\frac{\alpha r}{(2l+1)nh_{2l}},\quad q = -\frac{D_2 r}{2l\, nh_{2l}},\quad r = \left(\frac{D_2^2}{D_1^2+D_2^2}\right)^l$$

Анализ уравнения (1.16) показывает [2], что при $\varepsilon = 0$ всегда существует непрерывно зависящее от параметра α вещественное решение $b_1 = b_1^{(1)}$ уравнения (1.16) такое, что $\partial g/\partial b \neq 0$ при $b_1 = b_1^{(1)}$, $\varepsilon = 0$. Это означает, что для любых значений параметра α при достаточно малых ε уравнение (1.16) имеет по крайней мере одно вещественное решение, представимое в виде сходящегося ряда по степеням ε. Это решение является единственным, если выполняется неравенство

$$h_{2l}(\alpha - \alpha^{cr}) < 0 \tag{1.17}$$

$$\alpha^{cr} = (2l+1)nh_{2l}[(D_1^2+D_2^2)^l/(2l\, nh_{2l})^{2l}]^{1/(2l+1)}$$

Если же неравенство (1.17) выполняется с обратным знаком, то при достаточно малых ε существует еще два вещественных решения указанного вида [2]. При $\varepsilon = 0$ и $\alpha = \alpha^{cr}$ уравнение (1.16) имеет ровно два вещественных решения. Эти значения параметров отвечают точке ветвления решений, т.е. точке, в которой происходит рождение нового вещественного решения уравнения (1.16).

Исследуем вопрос о ветвлении решений при малых, но отличных от нуля ε. Необходимым условием рождения нового вещественного решения уравнения (1.16) является равенство нулю частной производной $\partial g/\partial b = 0$. Таким образом, чтобы найти значение α, отвечающее точке ветвления, нужно решить следующую систему уравнений относительно α, b_1:

$$g(b_1,\alpha,\varepsilon) = 0,\quad \varphi(b_1,\alpha,\varepsilon) \equiv \partial g/\partial b_1(b_1,\alpha,\varepsilon) = 0 \tag{1.18}$$

При $\varepsilon = 0$ единственным вещественным решением системы (1.18) является решение α^{cr}, $b_1^{cr} = -(2l+1)/(2l\alpha)^{cr}$. Функциональный определитель

$$\partial(g,\varphi)/\partial(b,\alpha)\big|_{\alpha=\alpha^{cr},\, b_1=b_1^{cr},\, \varepsilon=0} = (2l+1)2l(b_1^{cr})^{2l} r/(nh_{2l})$$

отличен от нуля, поэтому при достаточно малых ε система (1.18) имеет единственное решение, представимое в виде сходящегося ряда по степеням ε

$$b_1^* = b_1^{cr} + \varepsilon b_{11} + \ldots,\quad \alpha^* = \alpha^{cr} + \varepsilon\alpha_1 + \ldots \tag{1.19}$$

Чтобы показать, что при значениях параметра α, отвечающих (1.19) действительно имеет место ветвление решений уравнения (1.16), разложим левую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности b_1^*, α^*

$$B(b_1 - b_1^*)^2 - A(\alpha - \alpha^*) + \ldots = 0 \tag{1.20}$$

$$B = (2l+1)l(b_1^*)^{2l-1} + O(\varepsilon), \quad A = b_1^* r/(nh_{2l}) + O(\varepsilon)$$

Величины b_1^*, α^* зависят от ε; многоточием обозначены члены, порядков $O((b_1 - b_1^*)^3)$, $O((\alpha - \alpha^*)^2)$, $O((\alpha - \alpha^*)(b_1 - b_1^*))$, $O(\varepsilon)$. Уравнение (1.20) называется уравнением разветвления [4]. Если $h_{2l}(\alpha - \alpha^*) > 0$ и величина $|\alpha - \alpha^*|$ достаточно мала, то уравнение (1.20) имеет ровно два вещественных решения относительно b_1, которые представимы в виде сходящихся рядов по степеням $\sqrt{|\alpha - \alpha^*|}$. Коэффициенты этих рядов – аналитические функции ε. Указанные решения сливаются и переходят в b_1^*, при $\alpha \to \alpha^*$. Если же выполнено неравенство $h_{2l}(\alpha - \alpha^*) < 0$, то уравнение (1.20) вещественных решений относительно b_1 не имеет. Таким образом, при значениях параметра α, заданных формулой (1.19), имеет место ветвление решений уравнения (1.16), а значит, и соответствующих им 2π-ПР системы (1.1). При учете (1.5) из (1.19) имеем следующую зависимость параметра ω от параметра μ:

$$\omega = n + \mu^{2l/(2l+1)}\alpha^{\mathrm{cr}} + O(\mu) \tag{1.21}$$

которая задает кривую разветвления 2π-ПР системы (1.1), разделяющую область параметров ω, μ на две подобласти: в одной из них существует одно 2π-ПР, а в другой – три 2π-ПР системы (1.1), обращающихся в тривиальное решение при $\mu \to 0$. На самой же этой кривой система (1.1) имеет два 2π-ПР указанного вида.

2. Метод нахождения 2π-ПР на кривой разветвления. Рассмотрим метод практического построения кривой разветвления и 2π-ПР на ней. Для простоты изложения ограничимся случаем $l = 1$.

Как было показано выше, кривую разветвления и 2π-ПР на ней следует искать в виде рядов по степеням малого параметра $\varepsilon = \mu^{1/3}$

$$\omega = n + \alpha^{\mathrm{cr}}\varepsilon^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\alpha_k\varepsilon^k, \quad x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}x_k(t)\varepsilon^k, \quad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty}y_k(t)\varepsilon^k \tag{2.1}$$

Подставляя выражения (2.1) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при равных степенях ε, приходим к следующим системам уравнений для функций $x_k(t)$, $y_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$dx_k/dt = -ny_k - \alpha_{k-1}y_1 + G_1^{(k)}, \quad dy_k/dt = nx_k + \alpha_{k-1}x_1 + G_2^{(k)} \tag{2.2}$$

где $G_j^{(k)}(j = 1, 2)$ – целые рациональные относительно $x_1,\ldots, x_{k-1}, y_1,\ldots, y_{k-1}, \alpha_2,\ldots, \alpha_{k-2}$ и 2π-периодические по t функции.

Общее решение систем уравнений (2.2) имеет вид

$$x_k(t) = M_k^{(2)}\cos nt - M_k^{(1)}\sin nt + \varphi_k, \quad y_k(t) = M_k^{(2)}\sin nt + M_k^{(1)}\cos nt + \psi_k \tag{2.3}$$

где $M_i^{(m)}$ $(i = 1, 2,\ldots;\ m = 1, 2)$ – произвольные постоянные, а φ_k, ψ_k – целые рациональные относительно $M_1^{(m)},\ldots, M_{k-1}^{(m)}, \alpha_2,\ldots, \alpha_{k-2}$ и 2π-периодические по t функции.

Введем обозначения

$$I_k^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(-\alpha_{k-1}y_1+G_1^{(k)})\cos nt+(\alpha_{k-1}x_1+G_2^{(k)})\sin nt\}dt$$

$$I_k^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(-\alpha_{k-1}y_1+G_1^{(k)})\sin nt-(\alpha_{k-1}x_1+G_2^{(k)})\cos nt\}dt$$

Уравнения, выражающие необходимые и достаточные условия существования 2π-ПР систем (2.2), имеют вид

$$I_k^{(l)}=0,\quad l=1,2 \tag{2.4}$$

Рассмотрим характер зависимости $I_k^{(l)}$ от $M_i^{(m)}$. Поскольку разложения $X(x, y)$, $Y(x, y)$ в ряды по степеням x, y начинаются с членов не ниже второй степени, то при $k = 2q$ (q – натуральное число) $G_j^{(k)}$ зависят линейно от $x_{q+1}, x_{q+2},\ldots, x_{k-1}, y_{q+1}, y_{q+2},\ldots, y_{k-1}$, а величины x_q, y_q входят в функции $G_j^{(k)}$ только во второй и первой степени. Под интегралом в $I_k^{(l)}$ коэффициенты при вторых степенях $M_q^{(m)}$, и первых степенях $M_{k-1}^{(m)}$ – полиномы третьей степени по $\sin nt$ и $\cos nt$, интегралы от которых, взятые в пределах от 0 до 2π всегда равны нулю. Таким образом, $I_k^{(l)}$ зависят линейно от $M_q^{(m)}$, $M_{q+1}^{(m)},\ldots, M_{k-2}^{(m)}$ и не зависят от $M_i^{(m)}$, где $i > k - 2$. Аналогично можно показать, что при $k = 2q + 1$ ($q = 2, 3,\ldots$) интегралы $I_k^{(l)}$ зависят линейно от $M_{q+1}^{(m)}$, $M_{q+2}^{(m)},\ldots, M_{k-2}^{(m)}$ и не зависят от $M_i^{(m)}$, где $i > k - 2$. Также можно показать, что при $k = 2q + 1$ ($q = = 2, 3,\ldots$) интегралы $I_k^{(l)}$ содержат лишь члены второй и первой степени относительно $M_q^{(m)}$ ($q = 2, 3,\ldots$).

Отметим еще, что имеют место соотношения

$$\frac{\partial I_k^{(l)}}{\partial M_i^{(m)}}=\frac{\partial I_{k-p}^{(l)}}{\partial M_{i-p}^{(m)}}\quad (k\geqslant i+2;\ m=1,2;\ l=1,2)$$

$$\frac{\partial^2 I_k^{(l)}}{\partial M_i^{(m)}\partial M_j^{(n)}}=\frac{\partial^2 I_{k-p-s}^{(l)}}{\partial M_{i-p}^{(m)}\partial M_{j-s}^{(n)}}\quad (k\geqslant p+s+2;\ n=1,2;\ m=1,2;\ l=1,2) \tag{2.5}$$

которые можно доказать методом математической индукции.

Перейдем к описанию алгоритма вычисления постоянных $M_i^{(m)}$, α_i. При $k = 1, 2$ уравнения (2.4) выполняются тождественно. Для $k = 3$ уравнения (2.4), при учете соотношений (1.2) и (1.4) можно выписать явно

$$\chi M_1^{(m)}[(M_1^{(1)})^2+(M_1^{(2)})^2]-\alpha^{cr}M_1^{(m)}-(-1)^m D_m=0,\quad l=1,2 \tag{2.6}$$

$$\chi=(3a_{03}-b_{12}+a_{21}-3b_{30})/8$$

Можно показать, что $\chi = nh_2$, поэтому, на основании результатов разд. 1, имеем

$$\alpha^{cr}=3[\chi(D_1^2+D_2^2)/4]^{1/3}$$

Система (2.6) имеет ровно два решения, одно из которых имеет вид

$$M_1^{(m)}=2(-1)^m D_m/[2\chi(D_1^2+D_2^2)]^{1/3},\quad m=1,2 \tag{2.7}$$

Величины $M_1^{(m)}$, вычисленные по формулам (2.7), соответствуют изолированному 2π-ПР системы (1.1), которое существует при любых значениях параметра α и для которого функциональный определитель системы (2.6) всегда отличен от нуля. Как на кривой разветвления, так и вне ее это решение можно построить методом, описанным ранее [1]. Следуя этому методу, величины $M_i^{(m)}$, $(i \geqslant 2)$ будут однозначно определяться из системы уравнений (2.4) для $k = i + 2$. При этом выражения для $M_i^{(m)}$ будут зависеть от α_j $(i \leqslant j)$. Коэффициенты кривой разветвления α_j будем определять в процессе построения второго 2π-ПР системы (1.1), для которого $M_1^{(m)}$ определяются формулами

$$M_1^{(m)} = (-1)^{m+1} D_m / [2\chi(D_1^2 + D_2^2)]^{1/3}, \quad m = 1, 2 \tag{2.8}$$

Рассмотрим подробно метод построения этого решения. Обозначим через Δ_1 функциональный определитель системы (2.6). На решении (2.8) определитель Δ_1 обращается в нуль. Как было показано выше на кривой разветвления система (1.1) имеет единственное 2π-ПР, удовлетворяющее этому условию. Поэтому при нахождении $M_i^{(m)}$ $(i \geqslant 2)$ к условиям 2π-периодичности (2.4) будем добавлять условие единственности решения, которое можно удовлетворить выбором α_j.

При $k = 4$ систему уравнений (2.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial I_4^{(l)}}{\partial M_2^{(1)}} M_2^{(1)} + \frac{\partial I_4^{(l)}}{\partial M_2^{(2)}} M_2^{(2)} - \alpha_3 M_1^{(l)} + \tilde{I}_4^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2 \tag{2.9}$$

Это линейная, относительно $M_2^{(m)}$ система. Величины $\tilde{I}_4^{(l)}$ определены, если известны $M_1^{(m)}$. При учете соотношений (2.5) нетрудно показать, что определитель матрицы системы (2.9) равен Δ_1 и, следовательно, обращается в нуль. Условие совместности системы (2.9) всегда можно удовлетворить выбором α_3. Уравнения системы (2.9) линейно зависимы, второе уравнение получается умножением первого на

$$-\gamma_1 = \left(\frac{\partial I_3^{(2)}}{\partial M_1^{(1)}}\right)\left(\frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(1)}}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial I_3^{(2)}}{\partial M_1^{(2)}}\right)\left(\frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(2)}}\right)^{-1} \tag{2.10}$$

Это означает, что $M_2^{(m)}$ не могут быть однозначно определены из системы (2.9). Учитывая формулы (2.5), запишем систему уравнений (2.4) при $k = 5$

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}} M_3^{(1)} + \frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}} M_3^{(2)} - \alpha_4 M_1^{(l)} + \tilde{I}_5^{(l)}(M_2^{(1)}, M_2^{(2)}) = 0, \quad l = 1, 2 \tag{2.11}$$

Здесь $\tilde{I}_5^{(l)}$ – полиномы второй степени по $M_2^{(m)}$.

Система (2.11) линейна относительно $M_3^{(m)}$. Определитель матрицы этой системы $\Delta_1 = 0$. Это позволяет исключить неизвестные $M_3^{(m)}$. Действительно, умножив первое уравнение на γ_1 и складывая его со вторым, имеем

$$-\alpha_4(\gamma_1 M_1^{(1)} + M_1^{(2)}) + \tilde{I}_5^{(2)}(M_2^{(1)}, M_2^{(2)}) + \gamma_1 \tilde{I}_5^{(1)}(M_2^{(1)}, M_2^{(2)}) = 0 \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) содержит лишь члены первой и второй степени относительно $M_2^{(m)}$. Совместно с первым уравнением (2.9) уравнение (2.12) образует систему уравнений относительно $M_2^{(m)}$, которая имеет единственное решение при условии равенства нулю ее функционального определителя, который далее будем обозначать Δ_2.

Уравнение $\Delta_2 = 0$ совместно с первым уравнением (2.9) образует систему линейных уравнений относительно $M_2^{(m)}$. Определитель матрицы этой системы, вычисленный с учетом (2.5), равен

$$\Delta = 24\chi^3 M_1^{(2)}[(M_1^{(1)})^2 + (M_1^{(m)})^2]^2 \tag{2.13}$$

и, следовательно, отличен от нуля, поэтому указанная система имеет единственное решение. После нахождения $M_2^{(m)}$ из уравнения (2.12) однозначно определяется α_4. Заметим также, что уравнение (2.12) представляет собой условие совместности линейной относительно $M_3^{(m)}$ системы уравнений (2.11).

Для однозначного определения $M_3^{(m)}$ необходимо использовать условия 2π-периодичности решения системы линейных уравнений для $k > 5$.

Введем обозначение

$$\gamma_2 = -\left(\gamma_1 \frac{\partial I_5^{(1)}}{\partial M_2^{(1)}} + \frac{\partial I_5^{(2)}}{\partial M_2^{(1)}}\right)\left(\frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(1)}}\right)^{-1} \tag{2.14}$$

Тогда из уравнения $\Delta_2 = 0$ и (2.14) следует, что выполняются равенства

$$\frac{\partial I_5^{(2)}}{\partial M_2^{(m)}} + \gamma_1 \frac{\partial I_5^{(1)}}{\partial M_2^{(m)}} + \gamma_2 \frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(m)}} = 0, \quad m = 1,2 \tag{2.15}$$

При учете соотношений (2.5) уравнения (2.4) при $k = 6$ примут вид

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}} M_4^{(1)} + \frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}} M_4^{(2)} + \frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(1)}} M_3^{(1)} + \frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(2)}} M_3^{(2)} - \alpha_5 M_1^{(l)} + \tilde{I}_6^{(l)} = 0, \quad l = 1,2 \tag{2.16}$$

Рассмотрим линейную комбинацию уравнений (2.11), (2.16) $I_6^{(2)} + \gamma_1 I_6^{(1)} + \gamma_2 I_5^{(1)} = 0$, которая при учете (2.10) и (2.15) преобразуется к виду

$$-\alpha_5(M_1^{(2)} + \gamma_1 N_1^{(1)}) - \alpha_4 M_1^{(2)}\gamma_2 + \tilde{I}_6^{(2)} + \gamma_1 \tilde{I}_6^{(1)} + \gamma_2 \tilde{I}_5^{(1)} = 0 \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) не зависит от $M_3^{(m)}$, $M_4^{(m)}$ и может быть удовлетворено выбором α_5. Заметим, что само условие (2.17) обеспечивает совместность линейной относительно $M_3^{(m)}$, $M_4^{(m)}$ системы уравнений (2.11), (2.16).

Можно было бы попытаться исключить $M_4^{(m)}$ из (2.16), записав уравнение $I_6^{(2)} + \gamma_1 I_6^{(1)} = 0$ (которое не содержит $M_4^{(m)}$), однако полученное таким образом уравнение будет в силу (2.17) линейно зависимо с уравнениями (2.11). Таким образом, для однозначного определения $M_3^{(m)}$ потребуются уравнения (2.4) при $k = 7$

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}} M_5^{(1)} + \frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}} M_5^{(2)} + \frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(1)}} M_4^{(1)} + \frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(2)}} M_4^{(2)} - \alpha_6 M_1^{(l)} +$$

$$+\tilde{I}_7^{(l)}(M_3^{(1)}, M_3^{(2)}) = 0, \quad l = 1,2 \tag{2.18}$$

здесь $I_7^{(l)}(M_3^{(1)}, M_3^{(2)})$ – полиномы второй степени по $M_3^{(m)}$.

Аналогично (2.17) из уравнений (2.16) и (2.18) получим уравнение $I_7^{(2)} + \gamma_1 I_7^{(1)} +$

$+\gamma_2 I_6^{(1)}=0$, не содержащее неизвестных $M_4^{(m)}$, $M_5^{(m)}$

$$\gamma_2\left(\frac{\partial I_5^{(1)}}{\partial M_2^{(2)}}M_3^{(2)}+\frac{\partial I_5^{(1)}}{\partial M_2^{(1)}}M_3^{(1)}\right)-\alpha_6(M_1^{(2)}+\gamma_1 M_1^{(1)})-\gamma_2\alpha_5 M_1^{(1)}+\tilde{I}_7^{(2)}(M_3^{(1)},M_3^{(2)})+$$

$$+\gamma_1\tilde{I}_7^{(1)}(M_3^{(1)},M_3^{(2)})+\gamma_2\tilde{I}_6^{(2)}=0 \qquad (2.19)$$

Уравнение (2.19) зависит лишь от неизвестных $M_3^{(m)}$ и параметра α_6 и совместно с первым уравнением (2.11) образует систему уравнений относительно $M_3^{(m)}$, которая имеет единственное решение при условии равенства нулю ее функционального определителя Δ_3. Первое уравнение (2.11) и уравнение $\Delta_3=0$ образуют линейную относительно $M_3^{(m)}$ систему уравнений. Определитель матрицы этой системы равен Δ (2.13) и, следовательно, отличен от нуля. Это означает, что указанная система имеет единственное решение. После определения $M_3^{(m)}$ из уравнения (2.19) однозначно определяется α_6.

Пусть, таким образом при $k=2p-1$ найдены $M_1^{(m)},\ldots,\ M_{p-1}^{(m)},\ \alpha_2,\ldots,\alpha_{2p-2}$ и из (2.4) выписаны следующие уравнения:

при $k=p+2$

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}}M_p^{(1)}+\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}}M_p^{(2)}-\alpha_{p+1}M_1^{(l)}+\tilde{I}_{p+2}^{(l)}=0$$

при $k=p+3$

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}}M_{p+1}^{(1)}+\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}}M_{p+1}^{(2)}+\frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(1)}}M_p^{(1)}+\frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(2)}}M_p^{(2)}-\alpha_{p+2}M_1^{(l)}+\tilde{I}_{p+3}^{(l)}=0$$

. . . . (2.20)

при $k=2p$

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}}M_{2p-2}^{(1)}+\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}}M_{2p-2}^{(2)}+\frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(1)}}M_{2p-3}^{(1)}+\frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(2)}}M_{2p-3}^{(2)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial I_{2p}^{(l)}}{\partial M_p^{(1)}}M_p^{(1)}+\frac{\partial I_{2p}^{(l)}}{\partial M_p^{(2)}}M_p^{(2)}-\alpha_{2p-1}M_1^{(l)}+\tilde{I}_{2p}^{(l)}=0,\quad l=1,2$$

содержащие $M_p^{(m)},\ldots,M_{2p-2}^{(m)}$ в качестве неизвестных. Кроме того, из условия единственности решения были получены следующие соотношения:

при $k=3$

$$\frac{\partial I_3^{(2)}}{\partial M_1^{(m)}}+\gamma_1\frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(m)}}=0$$

при $k=5$

$$\frac{\partial I_5^{(2)}}{\partial M_2^{(m)}}+\gamma_1\frac{\partial I_5^{(1)}}{\partial M_2^{(m)}}+\gamma_2\frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(m)}}=0$$

. . . . (2.21)

при $k=2p-1$

$$\frac{\partial I_{2p-1}^{(2)}}{\partial M_{p-1}^{(m)}}+\gamma_1\frac{\partial I_{2p-1}^{(1)}}{\partial M_{p-1}^{(m)}}+\gamma_2\frac{\partial I_{2p-3}^{(1)}}{\partial M_{p-2}^{(m)}}+\ldots+\gamma_{p-1}\frac{\partial I_3^{(1)}}{\partial M_1^{(m)}}=0,\quad m=1,2$$

Величины $\gamma_1,\ldots,\gamma_{p-1}$ уже вычислены по формулам аналогичным (2.10), (2.14).

В уравнениях (2.20), наряду с неизвестными $M_p^{(m)},\ldots,M_{k-2}^{(m)}$, неопределенной является еще величина α_{2p-1}. Соотношения (2.21) позволяют, исключив из уравнений (2.21) неизвестные $M_i^{(m)}$ $(i = p,\ldots,k + 2)$, записать уравнение для нахождения α_{2p-1}, которое может быть получено, как линейная комбинация уравнений (2.20)

$$I_{2p}^{(2)} + \gamma_1 I_{2p}^{(1)} + \gamma_2 I_{2p-1}^{(1)} + \gamma_3 I_{2p-2}^{(1)} + \ldots + \gamma_{p-1} I_{p+2}^{(1)} = 0$$

Для нахождения величин $M_p^{(m)}$ к уравнениям (2.20) добавим уравнения (2.4), полученные при $k = 2p + 1$

$$\frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(1)}} M_{2p-1}^{(1)} + \frac{\partial I_3^{(l)}}{\partial M_1^{(2)}} M_{2p-1}^{(2)} + \frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(1)}} M_{2p-2}^{(1)} + \frac{\partial I_5^{(l)}}{\partial M_2^{(2)}} M_{2p-2}^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial I_{2p+1}^{(l)}}{\partial M_p^{(1)}} M_p^{(1)} + \frac{\partial I_{2p+1}^{(l)}}{\partial M_p^{(2)}} M_p^{(2)} - \alpha_{2p} M_1^{(l)} + \tilde{I}_{2p+1}^{(l)}(M_p^{(1)}, M_p^{(2)}) = 0, \quad l = 1,2 \tag{2.22}$$

Линейная комбинация уравнений (2.20), (2.22)

$$I_{2p+1}^{(2)} + \gamma_1 I_{2p+1}^{(1)} + \gamma_2 I_{2p}^{(1)} + \gamma_3 I_{2p-1}^{(1)} + \ldots + \gamma_{p-1} I_{p+3}^{(1)} = 0 \tag{2.23}$$

содержит лишь неизвестные $M_p^{(m)}$, которые входят в первой и второй степенях, а также неопределенную еще величину α_{2p}. Первое уравнение (2.20) и (2.23) образуют систему уравнений относительно $M_p^{(m)}$. Условие единственности решения этой системы и первое уравнение (2.20) образуют линейную относительно $M_p^{(m)}$ систему уравнений. Определитель матрицы этой системы равен Δ (2.13) и, следовательно, отличен от нуля. Таким образом, система имеет единственное решение. Когда $M_p^{(m)}$ найдены, величина α_{2p} определяется из уравнения (2.23).

3. Примеры. Результаты разд. 1 и 2 можно применить для исследования ветвления движений механических систем достаточно широкого класса. Рассмотрим два примера.

Маятник с вибрирующей точкой подвеса. Пусть x – угол отклонения от вертикали маятника длины l, точка подвеса которого совершает горизонтальные колебания с амплитудой a и частотой Ω. Диссипативные силы, действующие на маятник, задаются функцией Релея $R = \chi \dot{x}^2/2$ (здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \Omega t$). Уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{x} + \chi\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = \varepsilon \sin\tau \cos x; \quad \omega_0^2 = g/(\Omega^2 l), \quad \varepsilon = a/l \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) можно заменить эквивалентной системой двух уравнений

$$\dot{y} = -\omega_0 \sin x + (\varepsilon/\omega_0)\sin\tau\cos x - \chi y, \quad \dot{x} = \omega_0 y \tag{3.2}$$

Примем, что ε и χ – малые величины одного порядка, т.е. $\chi = b\varepsilon \ll 1$, $b = 0(1)$. При других предположениях о порядках малости величин ε и χ задача о ветвлении 2π-ПР рассматриваемого маятника изучалась ранее [5].

Система (3.2) является системой типа (1.1), поэтому на основании известных результатов [2] и разд. 2 при значениях ω_0, близких к единице, имеет место ветвление 2π-периодических колебаний маятника, переходящих при $\varepsilon = 0$ в устойчивое положение равновесия ($x = 0$). Кривая разветвления и 2π-ПР на ней, построенные методом изложенным в разд. 2, имеют вид

$$\omega_0 = 1 + \varepsilon^{2/3}\cdot 3\cdot 2^{1/3}/8 - \varepsilon^{4/3}(45 + 64b^2)/256 + O(\varepsilon^2) \tag{3.3}$$

$$x_1 = \varepsilon^{1/3}\sin\tau - \varepsilon^{2/3} b\cdot 2^{4/3}\cos\tau + \varepsilon((6-64b^2)\sin\tau + \sin 3\tau)/48 + O(\varepsilon^{4/3}) \quad (3.4)$$

$$x_2 = -\varepsilon^{1/3}\cdot 2\cdot 2^{2/3}\sin\tau + \varepsilon^{2/3} 8b\cos\tau - \varepsilon((57+448b^2)\sin\tau - 4\sin 3\tau)/24 + O(\varepsilon^{4/3}) \quad (3.5)$$

При переходе через кривую разветвления 2π-ПР (3.4) либо исчезает, либо является порождающим для двух новых 2π-ПР.

Колебания спутника в плоскости слабоэллиптической орбиты. Плоские движения спутника – твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите описываются уравнением [6]

$$(1+e\cos\nu)d^2\psi/d\nu^2 - 2e\sin\nu d\psi/d\nu + \omega_0^2\sin\psi\cos\psi = 2e\sin\nu \quad (3.6)$$

где ψ – угол между одной из главных центральных осей инерции спутника, лежащих в плоскости орбиты, и радиус-вектором его центра масс, e – эксцентриситет орбиты, ν – истинная аномалия; $\omega_0^2 = 3(A-C)/B$, где A, B, C – моменты инерции спутника относительно его главных центральных осей. В случае круговой орбиты ($e = 0$) уравнение (3.6) допускает частное решение $\psi = 0$, отвечающее положению равновесия спутника в орбитальной системе координат. При $e \ll 1$ равновесие $\psi = 0$ переходит в нечетные по ν и 2π-периодические колебания. Если $\omega_0 \approx 1$, то имеет место ветвление указанных решений [6]. Разными методами было найдено [6–8] приближенное выражение кривой разветвления. Используя методику разд. 2, получим более точное выражение для кривой разветвления. С этой целью заменим уравнение (3.6) эквивалентной системой уравнений Гамильтона

$$dq/d\nu = \partial H/\partial p, \quad dp/d\nu = -\partial H/\partial q \quad (3.7)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}q^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2(1+e\cos\nu)\sin^2\left(\frac{q}{1+e\cos\nu}\right) - 2eq\sin\nu \quad (3.8)$$

Канонически сопряженные координата q и импульс p введены по формулам

$$\psi = \frac{q}{1+e\cos\nu}, \quad p = \frac{dq}{d\nu} \quad (3.9)$$

Каноническая замена переменных $q_* = \sqrt{\omega_0}q$, $p_* = p/\sqrt{\omega_0}$ приведет систему (3.7) к виду (1.1). Кривая разветвления и 2π-ПР на ней, найденные методом, изложенным в разд. 2, имеют вид

$$\omega_0 = 1 + e^{2/3}\cdot 3\cdot 2^{2/3}/4 + e^{4/3}\cdot 3\cdot 2^{1/3}/32 - e^2\cdot 49/256 + O(e^{8/3}) \quad (3.10)$$

$$\psi_1(\nu) = e^{1/3}\cdot 2^{1/3}\sin\nu - e(18\sin\nu - \sin 3\nu)/24 - e^{4/3}\cdot 2^{-2/3}\sin 2\nu +$$

$$+e^{5/3}\cdot 2^{2/3}(190\sin\nu + 5\sin 3\nu + \sin 5\nu)/640 + e^2(45\sin 2\nu - 13\sin 4\nu)/240 + O(e^{7/3}) \quad (3.11)$$

$$\psi_2(\nu) = e^{1/3}\cdot 2^{4/3}\sin\nu + e(9\sin\nu - 4\sin 3\nu)/12 + e^{4/3}\cdot 2^{1/3}\sin 2\nu +$$

$$+e^{5/3}\cdot 2^{2/3}(5\sin\nu + 5\sin 3\nu - 2\sin 5\nu)/40 + e^2(225\sin 2\nu - 52\sin 4\nu)/120 + O(e^{7/3}) \quad (3.12)$$

Решение (3.11) при переходе через кривую разветвления либо исчезает, либо является порождающим для двух новых 2π-ПР.

Для построения разложений (3.3)–(3.5), (3.10)–(3.12) автором была составлена программа, реализующая выполнение алгоритма разд. 2 в системе аналитических преобразований MAPLE.

Автор благодарит А.П. Маркеева за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00405).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956, 491 с.
2. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* К одной теореме Малкина о периодических решениях систем, близких к системам Ляпунова // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь: Пермск. ун-т, 1984. С. 112–116.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
4. *Вайнберг М.М. Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969, 527 с.
5. *Холостова О.В.* О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 405–412.
6. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
7. *Черноусько Ф.Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 528–538.
8. *Торжевский А.П.* Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Космич. исследования. 1964. Т. 2. Вып. 5. С. 667–678.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.1998