ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 63. Вып. 3, 1999

УДК 539.3

© 1999 г. С.А. Берестова, Е.А. Митюшов

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Получено точное решение задачи об определении всех макроскопических упругих постоянных анизотропной текстурированной поликристаллической системы, составленной из зерен с кубической симметрией упругих свойств и дискретным их распределением по двум равноправным ориентациям, отличающимся поворотом вокруг оси четвертого порядка на угол $\pi/4$.

В проблеме отыскания эффективных модулей упругости микронеоднородных материалов известны точные решения лишь для сред, составленных из ортотропных слоев с произвольным распределением их по толщине [1, 2], и композиций изотропных фаз с одинаковыми модулями сдвига [3]. В последнем случае особенности пространственного распределения фаз никакой роли не играют и материал остается макроскопически изотропным. Еще одно точное решение, как следует из дальнейшего изложения, может быть получено для частного случая анизотропной микронеоднородной среды, состоящей из зерен кубической симметрии с двумя идеальными ориентациями, переходящими одна в другую при повороте на угол $\pi/4$ вокруг общей оси симметрии.

Упругое поведение микронеоднородных материалов описывается обобщенным законом Гука, который дает связь между тензорами деформаций ε и напряжений σ

$$\varepsilon = \mathbf{s}\sigma, \quad \sigma = \mathbf{c}\varepsilon \tag{1}$$

где $\mathbf{s}$, $\mathbf{c}$ – тензоры коэффициентов податливости и модулей упругости в произвольной точке среды.

В силу малости элементов неоднородности и случайного их распределения микронеоднородную среду можно считать макроскопически однородной и характеризовать набором эффективных коэффициентов податливости $\mathbf{s}^*$ и эффективных модулей упругости $\mathbf{c}^*$, т.е. таких, которые связывают усредненные по объему системы характеристики полей деформаций и напряжений

$$\langle\varepsilon\rangle = \mathbf{s}^*\langle\sigma\rangle, \quad \langle\sigma\rangle = \mathbf{c}^*\langle\varepsilon\rangle \tag{2}$$

Проводя осреднение в (1) и сравнивая с (2), получаем

$$\mathbf{s}^*\langle\sigma\rangle = \langle\mathbf{s}\sigma\rangle$$

После тождественных преобразований

$$\mathbf{s}^*\langle\sigma\rangle = \langle\mathbf{s}\rangle\langle\sigma\rangle + \langle(\mathbf{s}-\langle\mathbf{s}\rangle)\sigma\rangle \tag{3}$$

В качестве микронеоднородной среды рассматривается поликристалл с кубической симметрией структуры, зерна которого имеют только две идеальные ориентировки с равной относительной объемной концентрацией и углом разориентации вокруг общей оси симметрии четвертого порядка равным $\pi/4$. Ось симметрии системы совместим с осью x_3 лабораторной системы координат. Тогда матрицы коэффициентов податливости зерен первой и второй ориентации в лабораторной системе координат имеют вид

$$s^1 = \begin{Vmatrix} S_1^1 & O \\ O & S_2^1 \end{Vmatrix}, \quad s^2 = \begin{Vmatrix} S_1^2 & O \\ O & S_2^2 \end{Vmatrix}$$

$$S_1^1 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} \end{Vmatrix}, \qquad S_1^2 = \begin{Vmatrix} s_{11}-\zeta/2 & s_{12}+\zeta/2 & s_{12} \\ s_{12}+\zeta/2 & s_{11}-\zeta/2 & s_{12} \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} \end{Vmatrix}$$

$$S_2^1 = \mathrm{diag}\,\{s_{44}, s_{44}, s_{44}\}, \quad S_2^2 = \mathrm{diag}\,\{s_{44}, s_{44}, s_{44}+2\zeta\}$$

$$\zeta = s_{11} - s_{12} - s_{44}/2$$

(O – нулевая матрица 3 × 3).

Матрица средних значений коэффициентов податливости принимает вид

$$\langle s\rangle = \begin{Vmatrix} S_1 & O \\ O & S_2 \end{Vmatrix}$$

$$S_1 = \begin{Vmatrix} s_{11}-\zeta/4 & s_{12}+\zeta/4 & s_{12} \\ s_{12}+\zeta/4 & s_{11}-\zeta/4 & s_{12} \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} \end{Vmatrix}, \quad S_2 = \mathrm{diag}\{s_{44}, s_{44}, s_{44}+\zeta\}$$

Данная поликристаллическая система имеет ось симметрии восьмого порядка, которая служит одновременно осью упругой симметрии бесконечного порядка [4], поэтому материал является трансверсально-изотропным [5]. При этом из условия трансверсальной изотропности системы следует

$$s_{66}^* = 2\,(s_{11}^* - s_{12}^*) \tag{4}$$

Рассматривая различные напряженные состояния данной системы, а именно макроскопические напряженные состояния, соответствующие растяжению вдоль осей x_1 и x_3, чистому сдвигу в плоскости x_2x_3, а также всестороннему сжатию, из равенства (3) при учете вида матриц s^1, s^2 и $\langle s\rangle$ получим

$$s_{13}^* = s_{12}, \quad s_{33}^* = s_{11}, \quad s_{44}^* = s_{44}, \quad s_{11}^* + s_{12}^* = s_{11} + s_{12} \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что для решения проблемы отыскания всех эффективных коэффициентов податливости достаточно найти коэффициент s_{66}^*. Для его определения рассмотрим два напряженных состояния чистого сдвига

$$\langle\sigma\rangle = \begin{Vmatrix} 0 & \langle\sigma_{12}\rangle & 0 \\ \langle\sigma_{12}\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ и } \langle\sigma'\rangle = \begin{Vmatrix} -\langle\sigma_{12}\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle\sigma_{12}\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

($\langle\sigma'\rangle$ получается поворотом поля напряжений $\langle\sigma\rangle$ на угол $\pi/4$ вокруг оси x_3 лабораторной системы координат).

Ввиду симметрии рассматриваемой системы поворот поля напряжений эквивалентен смене средних напряжений в зернах разной ориентации, т.е.

$$\langle\sigma'\rangle_1 = \langle\sigma\rangle_2, \quad \langle\sigma'\rangle_2 = \langle\sigma\rangle_1 \tag{6}$$

где $\langle\sigma\rangle_i$ и $\langle\sigma'\rangle_i$ – тензоры средних напряжений по объему, занятому зернами i-й ориентации.

Для средних деформаций справедливы аналогичные соотношения

$$\langle\varepsilon'\rangle_1 = \langle\varepsilon\rangle_2, \quad \langle\varepsilon'\rangle_2 = \langle\varepsilon\rangle_1 \tag{7}$$

Связь между значениями σ' и ε' в некоторой произвольной точке рассматриваемой системы также дается обобщенным законом Гука

$$\varepsilon' = s\sigma', \quad \sigma' = c\varepsilon' \tag{8}$$

При этом тензоры коэффициентов податливости и модулей упругости в произвольной точке системы можно записать в виде

$$s = \lambda(s^1 - s^2) + s^2, \quad c = \lambda(c^1 - c^2) + c^2 \tag{9}$$

где c^1, c^2 – тензоры модулей упругости соответствующих ориентировок, λ – случайная индикаторная функция, равная единице, когда точка принадлежит зернам первой ориентации, и нулю в остальных точках системы.

Подставляя выражения (9) для тензоров коэффициентов податливости и модулей упругости в соотношение (8) и проводя осреднение с учетом выражений (6) и (7), получим

$$\langle\sigma'\rangle = (c^1\langle\varepsilon\rangle_2 + c^2\langle\varepsilon\rangle_1)/2, \quad \langle\varepsilon'\rangle = (s^1\langle\sigma\rangle_2 + s^2\langle\sigma\rangle_1)/2$$

Из инвариантности преобразования поворота следует, что $\langle\sigma'\rangle$ и $\langle\varepsilon'\rangle$ связывает тот же тензор s_* эффективных коэффициентов податливости. Тогда

$$s^1\langle\sigma\rangle_2 + s^2\langle\sigma\rangle_1 = s_*(c^1\langle\varepsilon\rangle_2 + c^2\langle\varepsilon\rangle_1) \tag{10}$$

При этом $\langle\varepsilon\rangle_1 = s^1\langle\sigma\rangle_1$, $\langle\varepsilon\rangle_2 = s^2\langle\sigma\rangle_2$ и равенство (10) перепишется в виде (в координатной форме)

$$s^1_{66}\langle\sigma_{12}\rangle_2 + s^2_{66}\langle\sigma_{12}\rangle_1 = s^*_{66}\left(c^1_{66}s^2_{66}\langle\sigma_{12}\rangle_2 + c^2_{66}s^1_{66}\langle\sigma_{12}\rangle_1\right) \tag{11}$$

Входящие сюда средние напряжения сдвига по объемам, занятым отдельными ориентировками, определим, проводя осреднение в (1) по всему объему поликристаллического образца с учетом выражения (9). В итоге

$$\langle\sigma_{12}\rangle_1 = r_{12}\langle\sigma_{12}\rangle, \quad r_{ik} = 2(s^*_{66} - s^k_{66})/(s^i_{66} - s^k_{66})$$

Аналогичное выражение для $\langle\sigma_{12}\rangle_2$ получается перестановкой индексов, отмечающих принадлежность зерен различным ориентациям.

Подстановка полученных значений в равенство (11) дает

$$r_{21}s^1_{66} + r_{12}s^2_{66} = s^*_{66}\left(r_{21}s^2_{66}/s^1_{66} + r_{12}s^1_{66}/s^2_{66}\right)$$

Из решения получаемого в результате преобразования квадратного уравнения находим

$$c^*_{66} = [c_{44}(c_{11} - c_{12})/2]^{1/2}$$

т.е. макроскопический модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии, и в направлении, лежащем в плоскости изотропии, определяется как среднее геометрическое сдвиговых модулей в плоскости грани и диагональной плоскости элементарной решетки кубического кристалла.

Оставшиеся макроскопические коэффициенты податливости определяются равенствами (4) и (5). В итоге для модулей упругости получим

$$\overset{*}{c}_{11} = (c_{11} + c_{12})/2 + \overset{*}{c}_{66}, \quad \overset{*}{c}_{12} = (c_{11} + c_{12})/2 - \overset{*}{c}_{66}$$

$$\overset{*}{c}_{33} = c_{11}, \quad \overset{*}{c}_{13} = c_{12}, \quad \overset{*}{c}_{44} = c_{44}$$

Полученное решение справедливо при любой форме зерен, сохраняющей упругую симметрию материала, в частности, для двумерной поликристаллической системы "сотовой" структуры с зернами, имеющими форму бесконечных шестигранных призм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. Вып. 11. С. 967–980.
2. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
3. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials I. // J. Mech. and Phys. Solids. 1964. V. 12. № 4. P. 199–212. = *Хилл Р.* Теория механических свойств волокнистых композитных материалов I. // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1966. № 2. С. 131–143.
4. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
8.I.1998