

УДК 539.3

© 1999 г.

А.Г. Колпаков

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ НАПРЯЖЕННОЙ БАЛКИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Методом усреднения получены уравнения равновесия, определяющие уравнения и граничные условия для тонкой упругой напряженной балки периодической структуры. В отличие от предыдущих работ [1–3] рассматриваются начальные напряжения, сравнимые с модулем Юнга материала балки.

Ранее [1, 2] был осуществлен переход от трехмерной задачи теории упругости к одномерной задаче теории балок при отсутствии начальных напряжений. Предельная одномерная задача была получена методом асимптотических разложений в области малого диаметра.

Отметим, что перерезывающая сила, играющая важную роль в классической теории балок, исключалась [1] из уравнений равновесия без получения какого-либо ее выражения через осевую деформацию и кривизны (как в классической теории). В этой связи к определяющим уравнениям ненапряженных балок следует отнести только связь "осевое усилие, моменты – осевая деформация, кривизны, кручение". Иная ситуация возникает при наличии начальных напряжений. Была отмечена [4, 5] несимметричность перерезывающих сил в напряженной балке, не позволяющая исключить их классическим методом. Анализ перерезывающих сил привел к получению классических уравнений устойчивости методами асимптотического анализа [4], и к уравнениям устойчивости при наличии моментов начальных напряжений [5]. Был принят [4, 5] следующий порядок величин: упругие постоянные порядка ε^{-4} (что гарантирует ненулевую изгибную жесткость при $\varepsilon \rightarrow 0$), начальные напряжения порядка ε^{-2} [4] (что соответствует ненулевому осевому усилию), и порядка ε^{-3} [5] (что соответствует ненулевым моментам). Было отмечено [4, 5] отсутствие влияния начальных напряжений на жесткость балки на кручение, что противоречит результатам [6], полученным для нетонкого стержня.

В данной работе рассмотрение проводится для начальных напряжений порядка ε^{-4} . Будет показано, в частности, что именно в этом случае возникает описанная ранее [6] зависимость.

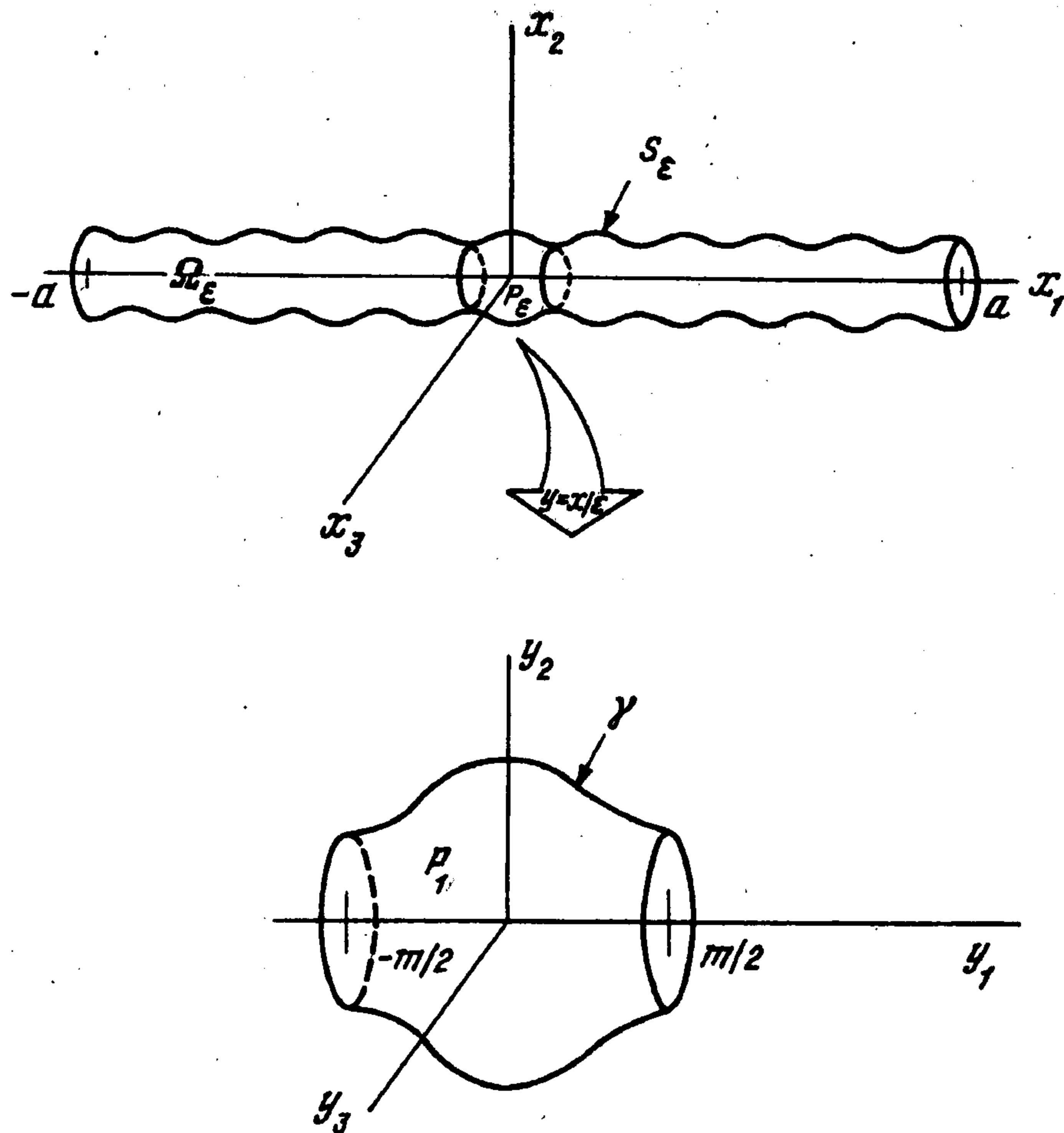
1. Постановка задачи. Рассмотрим область G_ε , получающуюся периодическим повторением некоторой ячейки периодичности (ЯП) P_ε вдоль оси Ox_1 от $-a$ до a (фигура). Характерный размер ЯП (совпадающий с толщиной балки) $\varepsilon \ll 1$, что формализуется в виде $\varepsilon \rightarrow 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ область G_ε стягивается к отрезку $[-a, a]$ – балке.

Задача равновесия для тела с начальными напряжениями имеет вид [6]

$$\int_{G_\varepsilon} \sigma_{ij} \partial v_i / \partial x_j dx = 0 \quad (1.1)$$

для любой функции $v \in V(G_\varepsilon) = \{v \in H^1(G_\varepsilon) : v(x) = 0 \text{ при } x_1 = -a, a\}$ (подробнее об упоминаемых классах функций см. [7]). При этом связь между текущими напряжениями σ_{ij}^ε , перемещениями u^ε и начальными напряжениями σ_{jl}^* имеет вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^{-4} (a_{ijkl}(y) + b_{ijkl}(x_1, y)) \partial u_k^\varepsilon / \partial x_l = \varepsilon^{-4} A_{ijkl}(y)(x_1, y) \partial u_k^\varepsilon / \partial x_l \quad (1.2)$$



где $\varepsilon^{-4} a_{ijkl}(y)$ – компоненты тензора упругих постоянных; $b_{ijkl}(x_1, y) = \sigma_{jl}^*(x_1, x/\varepsilon) \delta_{ik}$; $\sigma_{jl}^{*(p)}(x_1, x/\varepsilon)$ – компоненты тензора начальных напряжений; δ_{ik} – символ Кронеккера; $y = x/\varepsilon$ – быстрые (локальные) переменные.

Было показано [4, 5], что меньшие по порядку начальные напряжения ведут к потере устойчивости, если отличны от нуля осевое усилие или моменты. В этой связи наложим на рассматриваемые напряжения условия

$$\langle \sigma_{11}^* \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{i1}^* y_\alpha \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 2, 3 \quad (\langle \cdot \rangle = 1/m \int_Y \cdot dy) \quad (1.3)$$

где m – длина ЯП Y вдоль оси Oy_1 (фигура), $Y = \{x/\varepsilon : x \in P_\varepsilon\}$ – ЯП в безразмерных переменных.

При невыполнении условия (1.3) следует пользоваться моделями, предложенными ранее [4, 5].

2. Асимптотическое разложение. Асимптотическое разложение для перемещений u^ε , напряжений σ_{ij}^ε и пробной функции v возьмем в виде [1]

$$u^\varepsilon = u^{(0)}(x_1) + \varepsilon u^{(1)}(x_1, y) + \dots = u^{(0)}(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u^{(n)}(x_1, y) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}(x_1, y) \quad (2.2)$$

$$v = v^{(0)}(x_1) + \varepsilon v^{(1)}(x_1, y) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v^{(n)}(x_1, y) \quad (2.3)$$

Здесь $y = x/\varepsilon$ – быстрые переменные, x_1 – медленная переменная. Функции в правых частях (2.1)–(2.3) предполагаются периодическими по y_1 с периодом m .

Замечание 1. Производная от функции вида $Z(x_1, y)$ вычисляется путем замены оператора дифференцирования по правилу [1]

$$\partial Z / \partial x_1 = Z_{,1x} + \varepsilon^{-1} Z_{,1y}, \quad \partial Z / \partial x_\alpha = \varepsilon^{-1} Z_{,\alpha y} \quad (\alpha = 2, 3)$$

Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; греческие – 2, 3; $m = -4, -3, \dots; n = 0, 1, \dots$

Подставив (2.1), (2.2) в (1.2), с учетом замечания 1 получим

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n-4} A_{ijkl}(x_1, y) (u_{k,1x}^{(n)} \delta_{ij} + \varepsilon^{-1} u_{k,ly}^{(n)}) \quad (2.4)$$

Здесь и далее используются обозначения: $,1y = \partial/\partial y_1$ и $,\alpha x = \partial/\partial x_\alpha$.

Приравнявая в (2.4) члены при одинаковых степенях ε , получим

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijkl}(x_1, y) u_{k,1x}^{(m+4)} + b_{ijkl}(x_1, y) u_{k,1x}^{(m+4)} + a_{ijkl}(x_1, y) u_{k,ly}^{(m+5)} + b_{ijkl}(x_1, y) u_{k,ly}^{(m+5)} \quad (2.5)$$

Отметим, что определенные (1.2) σ_{ij}^ε и определенные (2.5) $\sigma_{ij}^{(m)}$ несимметричны по ij .

Подстановка выражений (2.2), (2.3) в уравнения равновесия (1.1) при учете замечания 1 дает

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{G_1} \varepsilon^{m+n} (\sigma_{il}^{(m)} v_{i,1x}^{(n)} + \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^{(m)} v_{i,jy}^{(n)}) dz = 0 \quad (2.6)$$

$$G_1 = \{z = (x_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon) : x \in P_\varepsilon\}$$

3. Уравнения равновесия. Как отмечалось [8, 9], уравнения равновесия при использовании асимптотического метода получаются независимо от связи "напряжения–деформации", т.е. в рассматриваемом случае – от (1.2). Для балок были получены [1] уравнения для осевых усилий $N_{ij}^{(m)} = \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ и моментов $M_{j\alpha}^{(m)} = \langle \sigma_{j1}^{(m)} y_\alpha \rangle$. Приведем уравнения равновесия из [1], которые будут использоваться далее,

$$N_{11,1x}^{(-4)} = 0 \quad (3.1)$$

$$-M_{i\alpha,1x}^{(-4)} + N_{i\alpha}^{(-3)} = 0, \quad N_{\alpha 1,1x}^{(-3)} = 0 \quad (3.2)$$

$$-M_{i\alpha,1x}^{(-3)} - N_{i\alpha}^{(-2)} = 0, \quad N_{\alpha 1,1x}^{(-2)} = 0 \quad (3.3)$$

4. Определяющие уравнения балки (связь усилий и моментов с деформационными характеристиками). Для получения рассматриваемых далее уравнений используется соотношение (2.6) при подходящем выборе m, n и пробной функции v . Отметим, что уравнения для $\sigma_{ij}^{(-4)}, \sigma_{ij}^{(-3)}$ также независимы от связи "напряжения–деформации" (подробней см. [1]), а специфика задачи начинает проявляться при выражении $\sigma_{ij}^{(-4)}, \sigma_{ij}^{(-3)}$ согласно (2.5).

Положим в (2.6) $m = -4, n = 1$ и возьмем пробную функцию в виде $v = \varepsilon v(y)$. Это приводит к задаче (подробнее см. [1])

$$\sigma_{ij,ly}^{(-4)} = 0 \text{ в } G_1, \quad \sigma_{ij}^{(-4)} n_j = 0 \text{ на } \gamma_1 \quad (4.1)$$

где n – орт нормали к боковой поверхности γ_1 области G_1 .

В соответствии с (2.5) и определением величин A_{ijkl} и b_{ijkl} можно записать

$$\sigma_{ij}^{(-4)} = A_{ijkl}(x_1, y) u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijkl}(x_1, y) u_{k,1x}^{(0)} + \sigma_{j1}^*(x_1, y) \delta_{ik} u_{k,1x}^{(0)} \quad (4.2)$$

Предложение 1. Пусть начальные напряжения удовлетворяют уравнениям

$$\partial \sigma_{ij}^* / \partial x_j = 0 \text{ в } G_\varepsilon, \quad \sigma_{ij}^* n_j = 0 \text{ на } S_\varepsilon \quad (4.3)$$

Тогда

$$\sigma_{ij,jy}^* = 0 \text{ в } Y, \sigma_{ij}^* n_j = 0 \text{ на } \gamma \quad (4.4)$$

где γ – боковая поверхность ЯП Y .

Равенство (4.4) получается путем подстановки в (4.4) разложения вида (2.2) для начальных напряжений σ_{ij}^* .

Предложение 2. Если начальные напряжения удовлетворяют уравнениям (4.3), то $\langle \sigma_{i\alpha}^* \rangle = 0$.

Согласно предложению 1 начальные напряжения удовлетворяют уравнениям (4.4). Умножив уравнение из (4.4) на u_α и проинтегрировав по частям на ЯП Y , получим требуемое.

Предложение 3. Для любой функции $Z(y)$ периодической по y_1 с периодом m имеет место равенство $\langle \sigma_{ij}^* Z_{,jy} \rangle = 0$.

Для проверки достаточно умножить уравнение из (4.4) на $Z(y)$ и проинтегрировать по частям по ЯП Y с учетом краевого условия из (4.4) и условий периодичности.

Замечание 2. В задаче в переменных y функции переменной x_1 играют роль параметров [10]. То же имеет место при интегрировании по переменной y .

Задача (4.1) записана в переменных y . При учете замечания 2 решение задачи (4.1) можно представить в виде

$$u^{(1)} = N_\sigma^{pl}(y) u_{p,lx}^{(0)}(x_1) + u_B s_\beta e_\beta \phi(x_1) + V(x_1) \quad (4.5)$$

где $\phi(x_1)$ – неопределенная пока функция (имеющая смысл кручения балки), $V(x_1)$ – неопределенная пока функция (имеющая смысл осевого перемещения); $s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = 1$; индекс $B = 2$, если $\beta = 3, B = 3$, если $\beta = 2$; $\{e_i\}$ – базисные орты стандартной прямоугольной системы координат; $N_\sigma^{pl}(y)$ – решение ячеечной задачи (ЯЗ)

$$(A_{ijkl}(y) N_{\sigma k,ly}^{pl} + a_{ijpl}(y) + b_{ijpl}(y))_{,jy} = 0 \text{ в } Y \quad (4.6)$$

$$(A_{ijkl}(y) N_{\sigma k,ly}^{pl} + a_{ijpl}(y) + b_{ijpl}(y)) n_j = 0 \text{ на } \gamma$$

$N_\sigma^{pl}(y)$ периодична по y_1 с периодом m

Предложение 4. ЯЗ (4.6) имеет частное решение $N_\sigma^{\alpha 1}(y) = -y_\alpha e_1$ и соответствующая (4.6) однородная задача имеет решение $X(y) = u_B s_\beta e_\beta$.

Предложение 4 важно в связи с тем, что именно наличие явных решений позволяет получить формулу (4.5).

Сначала заметим, что $b_{ijpl}(y)_{,jy} = b_{1j,jy} \delta_{ip} = 0$ в Y в силу (4.4) и $b_{ijpl}(y) n_j = \sigma_{1j}^* n_j \delta_{ip} = 0$ на γ также в силу (4.4).

Далее, проверим, что $-y_\alpha e_1$ – решение ЯЗ (4.6). Подставив $-y_\alpha e_1$ в левую часть уравнения из (4.6), получим при учете определения величин A_{ijkl} и b_{ijkl} $(-[a_{ijl\alpha}(y) + b_{ijl\alpha}(y)] + a_{ij\alpha l}(y))_{,jy} = (-a_{ijl\alpha}(y) + a_{ij\alpha l}(y))_{,jy} - b_{ijl\alpha,jy}$. Последнее выражение равно нулю. Действительно, $-a_{ijl\alpha}(y) + a_{ij\alpha l}(y) = 0$ в силу симметрии упругих постоянных [3], а $b_{ijl\alpha,jy} = 0$ в силу (4.4). Аналогично проверяется, что в силу (4.4) $(-[a_{ijl\alpha}(y) + b_{ijl\alpha}(y)] + a_{ij\alpha l}(y)) n_j = 0$ на γ .

Проверим, что функция $u_B s_\beta e_\beta$ – решение однородной ЯЗ (4.6). Подставив $u_B s_\beta e_\beta$ в однородное уравнение, соответствующее уравнению из (4.6), получаем при учете определения величин A_{ijkl} и b_{ijkl}

$$(a_{ij\beta\beta} + b_{ij\beta\beta} s_\beta)_{,jy} = (a_{ij23} - a_{ij32})_{,jy} + b_{ij\beta\beta,jy} s_\beta = 0$$

в виду симметрии упругих постоянных [3] и (4.4). Аналогично, для функции $u_{\beta} s_{\beta} e_{\beta}$ и однородного краевого условия из (4.6) получаем при учете симметрии упругих постоянных [3] и уравнений (4.4), что

$$(a_{ij\beta\beta} + b_{ij\beta\beta} s_{\beta}) n_j = 0 \text{ на } \gamma$$

В результате (4.5) можно записать в виде

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{N}_{\sigma}^{11}(\mathbf{y}) u_{1,1x}^{(0)}(x_1) - y_{\alpha} \mathbf{e}_1 u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + y_{\beta} s_{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \phi(x_1) + \mathbf{V}(x_1) \quad (4.7)$$

Отметим, что решение ЯЗ в рассматриваемом случае зависит от начальных напряжений, так как главные коэффициенты в ЯЗ (4.6) представляют собой A_{ijkl} . Проведенное ранее [11, 12] исследование ЯЗ для монолитных композитов (она отличается от (4.6) краевыми условиями) показало, что в общем случае имеют место сложные нелинейные зависимости решения ЯЗ от начальных напряжений.

Подставив (4.7) в (4.2), получим при учете определения A_{ijkl} и b_{ijkl}

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-4)} = & (a_{ij\alpha l}(\mathbf{y}) + \sigma_{jl}^*(x_1, \mathbf{y}) \delta_{i\alpha} - a_{ijl\alpha}(\mathbf{y}) - \sigma_{j\alpha}^*(x_1, \mathbf{y}) \delta_{il}) u_{\alpha,1y}^{(0)}(x_1) + \\ & + (A_{ij11}(x_1, \mathbf{y}) + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y}) N_{\sigma k,ly}^{11}(\mathbf{y})) u_{1,1y}^{(0)}(x_1) + (a_{ij\beta\beta}(x_1, \mathbf{y}) s_{\beta} + \sigma_{j\beta}^*(x_1, \mathbf{y}) s_{\beta} \delta_{i\beta}) \phi(x_1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Усредняя (4.8) по ЯП \mathbf{Y} , получаем с учетом симметрии упругих постоянных [3], замечания 2 и предложения 2

$$\begin{aligned} N_{ij}^{(-4)} = \langle \sigma_{ij}^{(-4)} \rangle = & (\langle \sigma_{jl}^* \rangle \delta_{i\alpha} - \langle \sigma_{j\alpha}^* \rangle \delta_{il}) u_{\alpha,1y}^{(0)}(x_1) + \\ & + \langle A_{ij11}(x_1, \mathbf{y}) + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y}) N_{\sigma k,ly}^{11}(\mathbf{y}) \rangle u_{1,1y}^{(0)}(x_1) + \langle \sigma_{j\beta}^* \rangle s_{\beta} \delta_{i\beta} \phi(x_1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

При $ij = 11$ в силу предложения 2 и условий (1.3) последняя формула в (4.9) принимает вид

$$N_{11}^{(-4)} = \langle \sigma_{11}^{(-4)} \rangle = A(\sigma) u_{1,1x}^{(0)}(x_1), \quad A(\sigma) = \langle a_{1111}(\mathbf{y}) + A_{11kl}(x_1, \mathbf{y}) N_{\sigma k,ly}^{11}(\mathbf{y}) \rangle \quad (4.10)$$

Хотя в общем случае нельзя гарантировать, что имеющая смысл жесткости на растяжение величина $A(\sigma)$ положительна, можно указать следующее достаточное условие ее положительности:

$$|\sigma_{jl}^*| \ll |a_{ijkl}| \quad (4.11)$$

Условие (4.11) "физически естественно", поскольку начальные напряжения не могут превосходить предела прочности материала балки, который в свою очередь не превышает 0,01 от модуля Юнга (часто и менее) [3].

Из условия положительности $A(\sigma)$, уравнения равновесия (3.1) и вытекающего из (2.1) краевого условия $u_1^{(0)}(-a) = u_1^{(0)}(a) = 0$ заключаем, что $u_1^{(0)}(x_1) = 0$.

Таким образом, при выполнении условия (4.10) равенство (4.7) принимает вид

$$\mathbf{u}^{(1)} = -y_{\alpha} \mathbf{e}_1 u_{\alpha,1x}^{(0)} x_1 + y_{\beta} s_{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \phi(x_1) + \mathbf{V}(x_1) \quad (4.12)$$

полностью совпадающий с видом функции $\mathbf{u}^{(1)}$ в задаче для ненапряженной балки [1].

Предложение 5. Уравнения равновесия (3.2) при выполнении условий (1.3) и условий предложения 1 выполнены тождественно.

Для проверки рассмотрим входящие в (3.2) величины. Равенство (4.8) при учете (4.12) дает

$$\sigma_{ij}^{(-4)} = (\sigma_{jl}^*(x_1, \mathbf{y}) \delta_{i\alpha} - \sigma_{j\alpha}^*(x_1, \mathbf{y}) \delta_{il}) u_{\alpha,1y}^{(0)}(x_1) + \sigma_{j\beta}^*(x_1, \mathbf{y}) s_{\beta} \delta_{i\beta} \phi(x_1)$$

Проинтегрируем это равенство по ЯП Y . Также проинтегрируем по ЯП это же равенство, предварительно умноженное на y_β , при $j = 1$. Получим при учете замечания 2 и предложения 2

$$N_{ij}^{(-4)} = \left(\langle \sigma_{j1}^* \rangle \delta_{i\alpha} - \langle \sigma_{j\alpha}^* \rangle \delta_{i1} \right) u_{\alpha,1y}^{(0)}(x_1) + \langle \sigma_{j\beta}^* \rangle s_\beta \delta_{i\beta} \phi(x_1) \quad (4.13)$$

$$M_{i\beta}^{(-4)} = \left(\langle \sigma_{j1y\beta}^* \rangle \delta_{i\alpha} - \langle \sigma_{j\alpha y\beta}^* \rangle \delta_{i1} \right) u_{\alpha,1y}^{(0)}(x_1) + \langle \sigma_{j\beta y\beta}^* \rangle s_\beta \delta_{i\beta} \phi(x_1)$$

Формула (2.5) при $m = -3$ дает

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = A_{ijkl}(x_1, y) u_{k,1x}^{(1)} + A_{ijkl}(x_1, y) u_{k,ly}^{(2)}$$

Подставляя в нее выражение (4.12), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} = & -A_{ij11}(x_1, y) y_\alpha u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + A_{ij\beta 1}(x_1, y) y_\beta s_\beta \phi_{,1x}(x_1) + \\ & + A_{ijkl}(x_1, y) V_{k,1x}(x_1) + A_{ijkl}(x_1, y) u_{k,ly}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения равновесия (3.2) при $i = 1$ содержат неопределенную функцию $N_{1\alpha}^{(-3)}$. Для ее исключения из (3.2) рассмотрим разность $N_{1\alpha}^{(-3)} - N_{\alpha 1}^{(-3)}$, которую, используя (4.14) и определение A_{ijkl} , можно записать в виде

$$\begin{aligned} N_{1\alpha}^{(-3)} - N_{\alpha 1}^{(-3)} = & \left(\sigma_{1\alpha}^{(-3)} - \sigma_{\alpha 1}^{(-3)} \right) = \left(- \left(\sigma_{\alpha 1}^* - \sigma_{11}^* \delta_{\alpha 1} \right) y_\beta \right) u_{\beta,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ & + \left(\left(\sigma_{\alpha 1}^* - \sigma_{11}^* \delta_{\alpha 1} \right) y_\beta \right) s_\beta \phi_{,1x} + \left(\sigma_{\alpha 1}^* \delta_{1k} - \sigma_{11}^* \delta_{\alpha 1} \right) V_{k,1x} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Коэффициенты в правых частях формул для $N_{ij}^{(-4)}$, $M_{i\beta}^{(-4)}$ из (4.13) и в (4.15) равны нулю в силу условий (1.3) и предложения 2. Следовательно, уравнения (3.2) при $i = 1$ удовлетворяются тождественно.

Перейдем к изучению последующих членов асимптотического разложения. Выберем теперь в (2.6) $m = -3$, $n = 1$ и $v = \varepsilon v(y)$. При таком выборе получаем задачу

$$\sigma_{ij,ly}^{(-3)} = 0 \text{ в } G_1, \quad \sigma_{ij}^{(-3)} n_j = 0 \text{ на } \gamma_1 \quad (4.16)$$

Рассмотрим следующие ЯЗ: ЯЗ относительно функции $N_\sigma^{2\alpha}(y)$

$$\begin{aligned} \left(A_{ijkl}(y) N_{\sigma k,ly}^{2\alpha} - a_{ij11}(y) y_\alpha - \sigma_{j1}^*(x_1, y) \delta_{i1} y_\alpha \right)_{,ij} = 0 \text{ в } Y \\ \left(A_{ijkl}(y) N_{\sigma k,ly}^{2\alpha} - a_{ij11}(y) y_\alpha - \sigma_{j1}^*(x_1, y) \delta_{i1} y_\alpha \right) n_j = 0 \text{ на } \gamma \end{aligned} \quad (4.17)$$

$N_\sigma^{2\alpha}(y)$ периодична по y_1 с периодом m

ЯЗ относительно функции $X_\sigma^3(y)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \left(A_{ijkl}(y) X_{\sigma k,ly}^3 + a_{ij\beta 1}(y) y_\beta s_\beta + \sigma_{j1}^*(x_1, y) \delta_{i\beta} y_\beta s_\beta \right)_{,jy} = 0 \text{ в } Y \\ \left(A_{ijkl}(y) X_{\sigma k,ly}^3 + a_{ij\beta 1}(y) y_\beta s_\beta + \sigma_{j1}^*(x_1, y) \delta_{i\beta} y_\beta s_\beta \right) n_j = 0 \text{ на } \gamma \end{aligned} \quad (4.18)$$

$X_\sigma^3(y)$ периодична по y_1 с периодом m

Тогда, учитывая равенства (4.14) и пользуясь функциями N_σ^{11} , $N_\sigma^{2\alpha}$, X_σ^3 , решение

(4.16) можно записать в виде

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{N}_{\sigma}^{2\alpha}(\mathbf{y})u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \mathbf{X}_{\sigma}^3(\mathbf{y})\phi_{,1x}(x_1) + \mathbf{N}_{\sigma}^{11}(\mathbf{y})V_{,1x}(x_1) - y_{\alpha}e_1V_{\alpha,1x}(x_1) \quad (4.19)$$

а подстановка (4.19) в (4.14) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} = & (A_{ij11}(x_1, \mathbf{y})y_{\alpha} + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}))u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ & + (A_{ij\beta 1}(x_1, \mathbf{y})y_{\beta}s_{\beta} + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})X_{\sigma k, ly}^3(\mathbf{y}))\phi_{,1x}(x_1) + \\ & + (A_{ij11}(x_1, \mathbf{y}) + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{11}(\mathbf{y}))V_{,1x}(x_1) + \\ & + (A_{ij\alpha 1}(x_1, \mathbf{y}) + A_{ij1\alpha}(x_1, \mathbf{y}))V_{\alpha,1x}(x_1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Проинтегрируем (4.20) по ЯП Y . С учетом определения A_{ijkl} и b_{ijkl} и предложения 2 получим

$$N_{ij}^{(-3)} = A_{ij}^0 V_{,1x} + A_{ij\alpha}^1 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{ij}^0 \phi_{,1x} \quad (4.21)$$

Умножим (4.19) при $j = 1$ на y_{β} и результат проинтегрируем по ЯП Y . Получим с учетом второго условия из (1.3)

$$M_{i\beta}^{(-3)} = A_{i\beta}^1 V_{,1x} + A_{i\beta\alpha}^2 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{i\beta}^1 \phi_{,1x} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij}^0 &= \langle A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y}) + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{11}(\mathbf{y}) \rangle \\ A_{ij\alpha}^1 &= \langle A_{ij11}(x_1, \mathbf{y})y_{\alpha} + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}) \rangle \\ {}^1 A_{i\beta} &= \langle (A_{ij11}(x_1, \mathbf{y}) + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{11}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle \\ A_{i\beta\alpha}^2 &= \langle (A_{ij11}(x_1, \mathbf{y})y_{\alpha} + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle \\ B_{ij}^0 &= \langle A_{ij\beta 1}(x_1, \mathbf{y})y_{\beta}s_{\beta} + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})X_{\sigma k, ly}^3(\mathbf{y}) \rangle \\ B_{i\beta}^1 &= \langle (A_{ij\beta 1}(x_1, \mathbf{y})y_{\beta}s_{\beta} + A_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})X_{\sigma k, ly}^3(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

Формулы (4.21), (4.22) являются определяющими уравнениями напряженной балки. Коэффициенты (4.23) формул (4.21), (4.22) определяют жесткости балки на растяжение, изгиб и кручение. Хотя формулы (4.23) аналогичны по виду формулам для ненапряженных балок из [1], имеется существенное отличие, состоящее в том, что коэффициенты в (4.23) и решения ЯЗ зависят от начальных напряжений.

Используя предложения 2,3, формулам (4.23) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{ij}^0 &= \langle a_{ijkl}(x_1, \mathbf{y}) + a_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{11}(\mathbf{y}) \rangle \\ A_{ij\alpha}^1 &= \langle a_{ij11}(x_1, \mathbf{y})y_{\alpha} + a_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}) \rangle \\ {}^1 A_{i\beta} &= \langle (a_{i111}(x_1, \mathbf{y}) + a_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{11}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle + \\ & + \langle \sigma_{1l}^*(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{11}(\mathbf{y})y_{\beta} \rangle \delta_{ik} \\ A_{i\beta\alpha}^2 &= \langle (a_{ij11}(x_1, \mathbf{y})y_{\alpha} + a_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle + \langle \sigma_{1l}^*(x_1, \mathbf{y})y_{\alpha}y_{\beta} \rangle \delta_{il} \\ & + \langle \sigma_{1l}^*(x_1, \mathbf{y})N_{\sigma k, ly}^{2\alpha}(\mathbf{y})y_{\beta} \rangle \delta_{ik} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$B_{ij}^0 = \langle A_{ij\beta 1}(x_1, y) y_{\beta} s_{\beta} + A_{ijkl}(x_1, y) X_{\sigma k, ly}^3(y) \rangle + \langle \sigma_{jl}^*(x_1, y) X_{\sigma k, ly}^3(y) \rangle \delta_{ik}$$

$$B_{i\beta}^1 = \langle (A_{i1\beta 1}(x_1, y) y_{\beta} s_{\beta} + A_{i1kl}(x_1, y) X_{\sigma k, ly}^3(y)) y_{\beta} \rangle + \langle \sigma_{11}^*(x_1, y) y_{\gamma} y_{\beta} \rangle s_{\gamma} \delta_{i\gamma}$$

Как видно, в общем случае все жесткостные характеристики балки зависят от начальных напряжений.

5. Перерезывающие силы. Перерезывающие силы играют в асимптотической теории роль отличную от осевых усилий и моментов. Эта роль определяется их местом в уравнениях равновесия.

Уравнения равновесия при $i = 1$ дают, в частности,

$$-M_{1\alpha, 1x}^{(-3)} - N_{1\alpha}^{(-2)} = 0, \quad N_{\alpha 1, 1x}^{(-2)} = 0 \quad (5.1)$$

Входящие в (5.1) величины $N_{1\alpha}^{(-2)}$, $N_{\alpha 1}^{(-2)}$ в случае классической однородной балки имеют смысл перерезывающих сил. Сохраним за ними это название и в рассматриваемом случае. Если бы $N_{ij}^{(-2)}$ были симметричны при ij (как симметричны напряжения или усилия в задаче без начальных напряжений [3]), их можно бы было исключить обычным приемом: продифференцировать первое уравнение в (5.1), затем воспользоваться вторым для исключения $N_{1\alpha}^{(-2)}$. В рассматриваемом случае симметрии по ij нет. Поступим следующим образом. Заметив, что в выражении (2.5) для $m = -2$ часть членов симметрична по ij , а часть – нет, запишем равенство

$$K_{ij} = N_{ij}^{(-2)} - N_{ji}^{(-2)} = \langle \sigma_{ij}^{(-2)} - \sigma_{ji}^{(-2)} \rangle = \langle (b_{ijkl} - b_{jikl}) u_{k, 1x}^{(2)} \rangle + \langle (b_{ijkl} - b_{jikl}) u_{k, 1x}^{(3)} \rangle$$

Согласно предложению 3 последнее слагаемое в правой части равно нулю. Подставляя в это равенство формулу (4.19), получаем

$$K_{ij} = \langle (b_{ijkl} - b_{jikl}) N_{\sigma k}^{11} \rangle V_{1, 1x1x} - \langle (b_{ij11} - b_{ji11}) y_{\alpha} \rangle V_{\alpha, 1x1x} + \\ + \langle (b_{ijkl} - b_{jikl}) N_{\sigma k}^{2\alpha} \rangle u_{\alpha, 1x1x1x}^{(0)} + \langle (b_{ijkl} - b_{jikl}) X_{\sigma k}^3 \rangle \phi_{, 1x1x} \quad (5.2)$$

В силу второго условия из (1.3)

$$\langle (b_{ij11} - b_{ji11}) y_{\alpha} \rangle = \langle \sigma_{j1}^* y_{\alpha} \rangle \delta_{i1} - \langle \sigma_{i1}^* y_{\alpha} \rangle \delta_{j1} = 0$$

При $ij = 1\beta$ получаем

$$K_{1\beta} = k_{\beta} V_{1, 1x1x} + k_{\beta\alpha} u_{\alpha, 1x1x1x}^{(0)} + l_{\beta} \phi_{, 1x1x} \quad (5.3)$$

где при учете определения b_{ijkl}

$$k_{\beta} = \langle \sigma_{\beta 1}^* N_{\sigma k}^{11} \rangle - \langle \sigma_{11}^* N_{\sigma k}^{11} \rangle \delta_{\beta k}$$

$$k_{\beta} = \langle \sigma_{\beta 1}^* N_{\sigma k}^{11} \rangle - \langle \sigma_{11}^* N_{\sigma k}^{11} \rangle \delta_{\beta k} \quad (5.4)$$

$$l_{\beta} = \langle \sigma_{\beta 1}^* X_{\sigma k}^3 \rangle \delta_{1k} - \langle \sigma_{11}^* X_{\sigma k}^3 \rangle \delta_{\beta k}$$

Из уравнений (5.1) следует уравнение для изгибающих моментов (получается дифференцированием первого уравнения из (5.1) и подстановкой $N_{1\beta}^{(-2)} = N_{\beta 1}^{(-2)} + K_{1\beta}$ с использованием второго уравнения из (5.1))

$$-M_{1\beta, 1x1x}^{(-3)} = K_{1\beta, 1x} \quad (5.5)$$

Величина $M_{1\beta}^{(-3)}$ определена формулой (4.22), а $K_{1\beta}$ – формулой (5.3).

Таким образом, в (5.5) входят не собственно перерезывающие силы $N_{ij}^{(-2)}$, а только их антисимметричная часть, даваемая формулой (5.3). Для вычисления самих перерезывающих сил $N_{ij}^{(-2)}$ необходимо получение последующих членов асимптотического разложения. Для вычисления антисимметричной части перерезывающих сил этого не требуется.

Для момента кручения $M = M_{32}^{(-2)} - M_{23}^{(-2)}$ получаем из первого уравнения (3.3) $-M_{,1x} = (N_{32}^{(-2)} - N_{23}^{(-2)})$. Согласно (5.2)

$$K_{32} = kV_{,1x1x} + k_{\alpha}u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + l\phi_{,1x1x} \quad (5.6)$$

где учтены определения b_{ijkl}

$$k = \langle \sigma_{21}^* N_{\sigma k}^{11} \rangle \delta_{3k} - \langle \sigma_{31}^* N_{\sigma k}^{11} \rangle \delta_{2k}, \quad k_{\alpha} = \langle \sigma_{21}^* N_{\sigma k}^{2\alpha} \rangle \delta_{3k} - \langle \sigma_{31}^* N_{\sigma k}^{2\alpha} \rangle \delta_{2k} \quad (5.7)$$

$$l = \langle \sigma_{21}^* X_{\sigma k}^3 \rangle \delta_{3k} - \langle \sigma_{31}^* X_{\sigma k}^3 \rangle \delta_{2k}$$

В результате для моментов кручения имеем уравнение

$$-M_{,1x} + K_{32} = 0 \quad (5.8)$$

Величина M определена формулой (4.22), а K_{32} — формулой (5.6). Вновь заметим, что в уравнение (5.8) входят не сами перерезывающие силы, а только их антисимметричная часть.

Решения ЯЗ определяются, как отмечалось, с точностью до постоянной. Кроме того, решение ЯЗ (4.18) определяется с точностью до функции $u_{\beta} v_{\beta} \phi(x_1)$.

Предложение 6. Указанный выше произвол в определении решений ЯЗ не влияет на величины (5.4), (5.7).

В (5.4), (5.7) указанный произвол приводит к появлению членов $\langle \sigma_{i1}^* \rangle$ и $\langle \sigma_{\alpha 1}^* u_{\beta} \rangle$. Эти члены равны нулю в силу условия (1.3) и предложения 2.

6. Краевые условия. При жестком закреплении балки из исходного краевого условия $u^e(x) = 0$ при $x_1 = -a$, a и разложения (2.1) так же, как в [1], получаем

$$V_1(-a) = V_1(a) = u_{\alpha}^{(0)}(-a) = u_{\alpha}^{(0)}(a) = u_{\alpha,1x}^{(0)}(-a) = u_{\alpha,1x}^{(0)}(a) = \phi(-a) = \phi(a) = 0 \quad (6.1)$$

При шарнирном опирании также получаем классические краевые условия.

Отличия возникают при рассмотрении свободной кромки. В этом случае, беря $n = 0, 1$ и пробную функцию v вида $v(x_1)$ и $\varepsilon[y_2 v_2(x_1) + y_3 v_3(x_1)]$, получим

$$N_{11}^{(-3)}(-a) = N_{11}^{(-3)}(a) = 0, \quad M_{1\beta}^{(-3)}(-a) = M_{1\beta}^{(-3)}(a) = 0, \quad M(-a) = M(a) = 0 \quad (6.2)$$

$$N_{\alpha 1}^{(-2)}(-a) = N_{\alpha 1}^{(-2)}(a) = 0 \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) неудобно для применения, так как для получения выражения $N_{\alpha 1}^{(-2)}$ через деформационные характеристики надо строить последующие члены разложения.

Поступим следующим образом. Согласно уравнению равновесия (3.3) $-M_{1\alpha,1x}^{(-3)} + N_{1\alpha}^{(-2)} = 0$, в том числе и при $x_1 = -a$, a . Подставив сюда $N_{1\alpha}^{(-2)} = N_{\alpha 1}^{(-2)} + K_{1\alpha}$, получим $-M_{1\alpha,1x}^{(-3)} + N_{\alpha 1}^{(-2)} + K_{1\alpha} = 0$. При $x_1 = -a$, a получаем

$$-M_{1\alpha,1x}^{(-3)} + K_{1\alpha} = 0 \quad \text{при } x_1 = -a, a \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4), заменяющее (6.3), содержит только функции V_1 , $u_{\alpha}^{(0)}$, ϕ .

7. Цилиндрическая балка. Пусть имеется классическая цилиндрическая балка из однородного изотропного материала, в которой действует только осевое усилие. Последнее означает, что $\sigma_{11}^* \neq 0$, $\sigma_{ij}^* = 0$ при $ij \neq 11$.

В рассматриваемом случае функции a_{ijkl} , σ_{ij}^* не зависят от y_1 и решения ЯЗ можно искать в виде функции аргументов y_2, y_3 [1]. Имеем (Z означает одну из функций – решений ЯЗ $N_\sigma^{11}, N_\sigma^{2\alpha}$ или X_σ^3) $A_{ijkl}Z_{k,ly} = A_{ijk\alpha}Z_{k,\alpha y} = a_{ijk\alpha}Z_{k,\alpha y}$ в силу того, что $A_{ijk\alpha} = a_{ijk\alpha} + \sigma_{\alpha j}^* \delta_{ik}$ и $\sigma_{\alpha j}^* = 0$.

Свободные члены в уравнениях из ЯЗ (4.6), (4.18), (4.19) в силу предложения 1 и того, что $\sigma_{ij}^* = 0$ при $ij \neq 11$, равны нулю (проверяется их дифференцированием).

Для свободных членов в краевых условиях тех же ЯЗ в силу предложения 1 и того, что $n_1 = 0$ на γ и $\sigma_{\alpha 1}^* = 0$, имеем $\sigma_{i1}^* n_j = 0$ на γ .

В силу этого ЯЗ в рассматриваемом случае совпадает с ЯЗ для цилиндрической ненапряженной балки, рассмотренной ранее [1], и $N_\sigma^{11}, N_\sigma^{2\alpha}, X_\sigma^3$ в (4.24) можно заменить на $N^{11}, N^{2\alpha}, X^3$ – решения ЯЗ для ненапряженной балки (получаются из (4.6), (4.18), (4.19) при $\sigma_{ij}^* = 0$, подробнее см. [1]). С учетом сказанного формулам (4.24) в рассматриваемом случае можно придать вид

$$A_{ij}^0 = A_{ij}^0(0), \quad A_{ij\alpha}^1 = A_{ij\alpha}^1(0), \quad {}^1A_{i\beta} = {}^1A_{i\beta}(0), \quad B_{ij}^0 = B_{ij}^0(0)$$

$$A_{i\beta\alpha}^2 = A_{i\beta\alpha}^2(0) + \langle \sigma_{11}^*(x_1, y) y_\alpha y_\beta \rangle \delta_{i1} \quad (7.1)$$

$$B_{i\beta}^1 = B_{i\beta}^1(0) + \langle \sigma_{11}^*(x_1, y) y_\Gamma y_\beta \rangle s_\gamma \delta_{i\gamma}$$

Величина Γ определена аналогично B (см. (4.5)). Аргумент (0) помечает жесткость ненапряженной балки. Согласно (7.1) в рассматриваемом случае начальные напряжения оказывают влияние только на жесткости на изгиб и кручение.

Рассмотрим жесткость на кручение. В классическом случае она определяется как $B = B_{32}^1 - B_{23}^1$. Для нее имеем

$$B = B(0) + \langle \sigma_{11}^*(x_1, y) (y_2^2 + y_3^2) \rangle$$

В полученной формуле последнее слагаемое обнаруживает совпадение с членом, учитывающим начальные напряжения, из [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков А.Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 440–448.
2. Козлова М.И. Осреднение трехмерной задачи теории упругости для тонкого неоднородного бруса // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1998. Вып. 5.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 774 с.
4. Колпаков А.Г. К задаче теории балок с начальными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 6. С. 139–144.
5. Колпаков А.Г. Асимптотическая задача устойчивости балок. Потеря устойчивости при изгибе/кручении // ПМТФ. 1995. № 6. С. 133–141.
6. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
8. Аннин Б.Д., Каламкаргов А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993. 256 с.
9. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. Analysis, design and optimization of composite structures. Chichester; New York; Weinheim; Singapur; Toronto: John Wiley&Sons, 1997.
10. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1986. 352 с.
11. Колпаков А.Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66–73.
12. Kolpakov A.G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Comput. and Struct. 1992. V. 44. № 1/2. P. 97–101.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.XI.1998