УДК 539.3

© 1999 г. А.С. Кравчук

АЛГОРИТМЫ ТОМОГРАФИИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается задача о нахождении распределения упругих модулей в неоднородном упругом теле по результатам серии механических испытаний с заданием внешних воздействий и измерением реакций на поверхности тела. Предлагаются два алгоритма для решения этой задачи, намечены способы обоснования.

1. Описание проблемы. Пусть линейно упругое тело, занимающее область Ω, характеризуется тензором заранее неизвестных упругих модулей ${}^4\hat{a}$ с компонентами $a_{ijkl} = a_{ijkl}(\mathbf{x})$ в декартовой системе отсчета; верхний левый индекс 4 в обозначении ${}^4\hat{a}$ означает, что величина ${}^4\hat{a}$ является тензором четвертого ранга (тензоры второго ранга будем помечать крышкой, без индекса).

Задача состоит в том, чтобы, задавая на поверхности Σ тела Ω усилия $\mathbf{P}$ (перемещения $\mathbf{g}$) и измеряя возникающие на той же поверхности перемещения $\mathbf{g}$ (усилия $\mathbf{P}$), найти зависимость компонентов тензора упругих модулей ${}^4\hat{a}$ от координат.

Это – обратная задача теории упругости, относящаяся к числу так называемых обратных коэффициентных задач, актуальная для многих приложений, в частности, для обнаружения дефектов в готовых изделиях (контроля качества), определения реальных жесткостных характеристик элементов конструкций, интерпретации данных в геологоразведке.

При динамической постановке проблемы в качестве внешних воздействий используют взрывные нагрузки (для объектов большой протяженности) или акустические (поверхностные вибрации). Эффективные методы решения развиты здесь для так называемых акустических сред, когда неизвестен только один скалярный коэффициент [1, 2]. Для решения задачи об определении коэффициентов Ламе изотропной неоднородной среды по результатам динамических испытаний предлагалось использовать методы обратной задачи рассеяния [2].

Задачи об определении одного скалярного коэффициента возникают в обратных задачах теплопроводности, диффузии, импедансной томографии [5]. Как оказалось, развитый в дискретной постановке алгоритм решения задач импедансной томографии [3] об определении одного скалярного коэффициента в уравнении потенциала в неоднородных изотропных проводящих средах в статической постановке может быть обобщен на системы уравнений в частных производных, в частности, на уравнения теории упругости. Помимо данного обобщения, ниже предлагается новый алгоритм, основанный на идее двойственности [4].

2. Основные уравнения и условия. Состояние среды в области Ω определяется известными уравнениями равновесия

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}[a_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})] = F_i; \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, F_i – плотность распределенных объемных сил; по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до 3 (в плоской задаче – до 2).

В соответствии с введенными выше тензорными обозначениями уравнение (2.1) можно записать в виде

$$-\nabla\cdot[{}^4\hat{a}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u})]=\mathbf{F} \tag{2.2}$$

где ∇ – оператор Гамильтона; точка означает операцию скалярного умножения (свертки).

К уравнению (2.2) добавляются условия, связывающие воздействие и реакцию на поверхности Σ:

$$\hat{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}\big|_\Sigma={}^4\hat{a}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nu}\big|_\Sigma=\mathbf{P}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Sigma \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})\big|_\Sigma=\mathbf{g}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Sigma \tag{2.4}$$

где $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности Σ.

Сформулированная задача сводится к определению векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и тензорного поля ${}^4\hat{a}(\mathbf{x})$ в области Ω из уравнений (2.2) и условий (2.3), (2.4) по известным функциям $\mathbf{P}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{F}$. Эта задача в целом нелинейная, для ее решения предлагаются итерационные (шаговые) алгоритмы.

3. Алгоритм 1. Зададим начальное распределение упругих модулей

$$^4\hat{a}(\mathbf{x})={}^4\hat{a}^{(0)}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{3.1}$$

и решим первую краевую задачу теории упругости – задачу с условиями (2.4). Предположим, что для этой задачи построена функция Грина $\hat{G}=\hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – тензор второго ранга, зависящий от двух переменных: $\mathbf{x}$ – координаты точки наблюдения, и $\mathbf{x}_0$ – координаты точки приложения сосредоточенной силы. Тогда решение может быть записано в виде

$$\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})=\int_\Omega \hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)d\Omega_0-\int_\Sigma \hat{\sigma}(\hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))d\Sigma_0 \tag{3.2}$$

В общем случае вычисленные по решению (3.2) поверхностные силовые реакции не совпадут с измеренными в опыте реакциями $\mathbf{P}$; по возникающей невязке и производится коррекция упругих модулей.

Для вычисления первого приближения положим

$$^4\hat{a}^{(1)}={}^4\hat{a}^{(0)}+\Delta^4\hat{a}^{(1)},\quad \mathbf{u}^{(1)}=\mathbf{u}^{(0)}+\Delta\mathbf{u}^{(1)} \tag{3.3}$$

(индекс 1 для упрощения обозначений ниже будем опускать). Подставим выражения (3.3) в уравнения равновесия (2.2) и линеаризуем по приращениям $\Delta^4\hat{a}$, $\Delta\mathbf{u}$; в итоге получим уравнение

$$-\nabla\cdot[{}^4\hat{a}^{(0)}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u})]=\nabla\cdot[\Delta^4\hat{a}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})] \tag{3.4}$$

связывающее неизвестные пока приращения $\Delta^4\hat{a}$, $\Delta\mathbf{u}$. Роль заданных внешних воздействий играет теперь правая часть уравнения (3.4), плотность $\mathbf{F}=0$.

Подчиняя скорректированное поле перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}+\Delta\mathbf{u}$ граничному условию (2.4) и используя построенную функцию Грина $\hat{G}^{(0)}$, получим следующую связь между приращениями $\Delta^4\hat{a}$, $\Delta\mathbf{u}$:

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})=\int_\Omega \hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\nabla\cdot[\Delta^4\mathbf{a}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})]d\Omega_0 \tag{3.5}$$

Приравняем теперь невязку усилий

$$\Delta\mathbf{P} = \hat{\sigma}(\mathbf{u}^{(0)})\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\Sigma} - \mathbf{P} \tag{3.6}$$

величине $\hat{\sigma}(\Delta\mathbf{u})$, где поле $\Delta\mathbf{u}$ выражено через $\Delta^4\hat{a}$ по формуле (3.5). В результате получим следующее основное функциональное уравнение для определения $\Delta^4\hat{a}$:

$$\hat{\sigma}\left(\int\limits_{\Omega} \hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\nabla\cdot[\Delta^4\hat{\mathbf{a}}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})]\mathbf{d}\Omega_0\right)\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\Sigma} = \Delta\mathbf{P}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Sigma \tag{3.7}$$

4. Алгоритм 2. Как и в предыдущем случае, зададим некоторое начальное распределение упругих модулей и решим на этот раз вторую основную задачу теории упругости – с заданными на границе поверхностными усилиями **P** (соблюдая при этом обычные меры предосторожности для обеспечения единственности решения в перемещениях).

Сохранив прежнее обозначение для функции Грина данной задачи, запишем ее решение в виде

$$\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}\Omega_0 + \int\limits_{\Sigma} \hat{\mathbf{G}}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}\Sigma_0 \tag{4.1}$$

Использовав представление (3.3) для поправок, придем снова к уравнению (3.4) с линеаризованным граничным условием вида

$$^4\hat{a}^{(0)}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\Sigma} = -\Delta^4\hat{\mathbf{a}}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\Sigma} \tag{4.2}$$

Решение полученной задачи выражается через построенную в нулевом приближении функцию Грина по формуле

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = &\int\limits_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot(\nabla\cdot[\Delta^4\hat{\mathbf{a}}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})])\mathbf{d}\Omega_0 - \\ &-\int\limits_{\Sigma} \hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot[\Delta^4\hat{\mathbf{a}}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})\cdot\boldsymbol{\nu}]_{\Sigma}(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}\Sigma_0\end{aligned} \tag{4.3}$$

Определив невязку перемещений для решения (4.1) и приравняв ее величине (4.3) на поверхности Σ, придем к основному функциональному уравнению для определения коррекции упругих модулей

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega} \hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot(\nabla\cdot[\Delta^4\hat{\mathbf{a}}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})])\mathbf{d}\Omega_0 - \\ &-\int\limits_{\Sigma} \hat{G}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot[\Delta^4\hat{\mathbf{a}}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})\cdot\boldsymbol{\nu}]_{\Sigma}(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}\Sigma_0 = \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \int\limits_{\Sigma} \hat{\mathbf{G}}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}\Sigma_0,\ \ \mathbf{x}\in\Sigma\end{aligned} \tag{4.4}$$

Естественно, что в обоих алгоритмах после вычисления поправок $\Delta^4\hat{a}$ процесс повторяется, пока не будет достигнута необходимая точность.

5. Алгоритм решения уравнений для приращений. Точное решение уравнений (3.7), (4.4) вряд ли возможно, любые же приближенные методы, опирающиеся на представление решения в виде разложений по некоторым базисам, в данной ситуации приводят к следующему усложнению традиционных алгоритмов.

Пусть $\{\chi_i\}$ – базис в пространстве функций, заданных на границе Σ. Поскольку здесь речь идет в основном об алгоритмических проблемах, структура этих пространств и вид базиса не конкретизируются. Ясно, что пространства граничных функций должны быть пространствами следов решений, поэтому возникает необходимость использовать пространства С.Л. Соболева с дробным индексом.

На каждом этапе описанных выше алгоритмов решается серия задач, когда либо сами искомые решения, либо выраженные через них усилия приравниваются функции χ_i ($i = 1, 2, \ldots$). В результате возникает конечная или бесконечная (в теоретических исследованиях) последовательность функциональных уравнений вида (3.7) или (4.4), различающихся решениями $\mathbf{u}_i^{(0)}$, но для одних и тех же значений ${}^4\hat{a}^{(0)}$ и $\Delta^4\hat{a}$.

В конечномерном варианте вместо интегральных уравнений возникает множество систем линейных алгебраических уравнений, различающихся матрицами и правыми частями, но для одних и тех же неизвестных $\Delta^4\hat{a}$. Естественно, что в целом система уравнений окажется, вообще говоря, переопределенной; ее решение можно построить методом наименьших квадратов. Как выяснилось при численной реализации предложенной методики, именно на этом этапе и проявляется некорректность исходной задачи. В таких случаях использовались регуляризации первого и второго порядков с экспериментальным подбором оптимального сочетания параметров регуляризации и длины шага β в формуле для коррекции упругих модулей

$$ {}^4\hat{a}^{(1)} = {}^4\hat{a}^{(0)} + \beta\Delta^4\hat{a} $$

Обоснование сходимости может быть дано путем обобщения методов, использованных при обосновании методов решения коэффициентных задач, когда решение в области Ω предполагается известным, а определению подлежат только коэффициенты [6, 7]. Решение будет единственным, если известна ориентация главных осей тензора ${}^4\hat{a}$.

Другие, возможно, более эффективные алгоритмы могут быть построены с использованием формулы Сомилианы – это было отмечено Б.Е. Победрей во время обсуждения работы.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства общего и профессионального образования 1998 г. № 97-03-4.3-47 и Федеральной целевой программы "Интеграция" (№ 426).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 206 с.
2. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 151 с.
3. *Dines K.A., Lytles R.J.* Analysis of electrical conductivity imaging // Geophysics. 1981. V. 46. N 7. P. 1025–1036.
4. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 339 с.
5. The Physics of Medical Imaging. Medical Science Series Ed. by S. Webb. Bristol; Philadelphia: Adam Hilger IOP Publ. 1988. 633 p. = Физика визуализации изображений в медицине / Под ред. С. Уэбба. М.: Мир, 1991. Т. 2. 408 с.
6. *Vainikko G.* Identification of filtration coefficient // Некорректно поставленные задачи в естественных науках: Тр. Междунар. конф. М.: Научное изд-во ТВП, 1992. С. 202–213.
7. *Karkkainen T.A.* Linearization technique and error estimates for distributed parameter identification in quasilinear problems // Num. Funct. Anal. Optim. 1996. V. 17. N 3/4. P. 345–364.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1998