УДК 539.3

© 1999 г. И.Е. Ануфриев, Л.В. Петухов

ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ АНАЛОГОВ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагаются методы аппроксимации слабого решения некоторых краевых задач теории упругости, основанные на разложении приближенного решения в конечный ряд по базисным функциям, тождественно удовлетворяющим однородному дифференциальному уравнению в области. Для нахождения коэффициентов разложения построен граничный аналог метода наименьших квадратов (ГАМНК). Доказана сходимость приближенного решения, получаемого при помощи ГАМНК, к слабому решению задачи. Получены простые, с вычислительной точки зрения, достаточные условия устойчивости ГАМНК. Предложен подход к построению граничного аналога метода коллокации (ГАМК) на основе ГАМНК и дискретизации скалярного произведения при помощи квадратурных формул. Получающийся ГАМК является сходящимся и устойчивым и обладает лучшими вычислительными свойствами, чем ГАМНК.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область в $R^n (n = 1, 2, ...)$ с границей Γ, k – натуральное число, A – эллиптический дифференциальный оператор порядка $2k$

$$A = \sum_{|i|,|j|\leqslant k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij}(x) D^j) \tag{1.1}$$

$$x = (x_1, \ ..., \ x_n) \in \Omega, \quad i = (i_1, \ ..., \ i_n), \quad j = (j_1, \ ..., \ j_n), \quad D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}$$

где ν – нормаль к Γ, $g_r(s)$ – заданные на границе функции, $s \in \Gamma$; здесь и всюду далее $r = 0, ..., k-1$. Требуется аппроксимировать решение обобщенной задачи Дирихле для однородного дифференциального уравнения

$$Au(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial^r u / \partial \nu^r |_\Gamma = g_r(s), \quad s \in \Gamma \tag{1.2}$$

Введем дополнительные предположения относительно данных задачи (1.2) и рассмотрим слабую постановку задачи. Будем считать, что $\Gamma \in \mathfrak{R}^{0,1}$ (для $k = 1$) и $\Gamma \in \mathfrak{R}^{k,1}$ (для $k > 1$), т.е. функции, осуществляющие задание границы области в локальных координатах, принадлежат классу $C^{0,1}$ (для $k = 1$) и классу $C^{k,1}$ (для $k > 1$) (см. [1]), $g_r \in W_2^{k-r-1/2}(\Gamma)$, $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, $|i|$, $|j| \leqslant k$. Введем билинейную форму

$$A(v, u) = \int_\Omega \sum_{|i|,|j|\leqslant k} a_{ij}(x) D^i v(x) D^j u(x) dx \tag{1.3}$$

и подпространство $W_2^k(\Omega)$

$$V = \{v \in W_2^k(\Omega) | \partial^r v / \partial \nu^r |_\Gamma = 0\}$$

Предположим, что форма $A(v, u)$ является V-эллиптической и ограниченной. Слабая постановка задачи (1.2) состоит в нахождении функции $u \in W_2^k(\Omega)$ такой, что

$$A(v,\ u)=0,\quad \forall v \in V,\quad u-w \in V$$
$$w \in W_2^k(\Omega),\quad \partial^r w/\partial \nu^r\,|_\Gamma = g_r(s),\quad s \in \Gamma \tag{1.4}$$

2. Представление приближенного решения. Запишем приближенное решение задачи (1.4) в виде

$$u_N(x)=\sum_{j=1}^{N} a_{jN}\varphi_j(x) \tag{2.1}$$

где функции $\varphi_j(x)$ ($i = 1, 2, \ldots$) – классические линейно независимые решения однородного дифференциального уравнения $Au(x) = 0$. Назовем их глобальными базисными функциями.

Для краткости записи введем обозначения

$$\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{W_2^k(\Omega)},\quad \|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{W_2^{k-r-1/2}(\Gamma)}$$

Суммирование по r всюду далее ведется от нуля до $k-1$.

Нахождение коэффициентов разложения (2.1) сводится к аппроксимации граничных условий задачи (1.2). Из линейности краевой задачи и результатов, приведенных ранее [2], следует оценка

$$\|u-u_N\|_\Omega \le \mathrm{const}\sum_r \left\|g_r-\frac{\partial^r u_N}{\partial \nu^r}\right\|_r \tag{2.2}$$

Найдем коэффициенты разложения (2.1) исходя из условия граничного аналога метода наименьших квадратов (ГАМНК)

$$\min_{a_{1N},\ldots,a_{NN}} \sum_r \left\|g_r-\frac{\partial^r u_N}{\partial \nu^r}\right\|_r^2 . \tag{2.3}$$

3. Сходимость приближенного по ГАМНК решения к точному. Рассматривая вопрос о сходимости приближенного решения (2.1), полученного при помощи ГАМНК в виде (2.3), к слабому решению задачи (1.4), будем полагать, что форма $A(v, u)$, определяемая по (1.3), удовлетворяет следующему условию. Пусть Ω_t – последовательность ограниченных областей в R^n с границами Γ_t, удовлетворяющими условиям

$$\Gamma_t \in \mathfrak{R}^{0,1}\quad \text{при}\quad k=1,\quad \Gamma_t \in \mathfrak{R}^{k,1}\quad \text{при}\quad k>1$$
$$\overline{\Omega} \subset \Omega_t,\quad \overline{\Omega}_{t+1} \subset \Omega_t,\quad \lim_{t\to\infty} \mathrm{mes}(\Omega_t/\Omega)=0 \tag{3.1}$$

Здесь и далее $t = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ формы $A(v, u)$ удовлетворяют условиям $a_{ij}(x) \in C^\infty(\Omega)$, $|i|,\ |j| \le k$. Ведем обозначения

$$V_t=\left\{v \in W_2^k(\Omega_t) \left|\frac{\partial^r v}{\partial \nu^r}\right|_{\Gamma_t}=0\right\},\quad A_t(v,\ u)=\int_{\Omega_t}\sum_{|i|,|j|\le k} a_{ij}(x)D^i v(x)D^j u(x)dx$$

Пусть формы $A_t(v, u)$ являются V-эллиптическими и ограниченными

$$A_t(v,\ v) \ge \alpha_t\|v\|_{\Omega_t}^2,\quad |A_t(v,\ u)| \le \beta_t\|v\|_{\Omega_t}\|u\|_{\Omega_t} \tag{3.2}$$

причем существуют положительные постоянные α и β, такие, что $\alpha < \alpha_t$ и $\beta > \beta_t$.

Приведем несколько вспомогательных утверждений, которые являются обобщениями соответствующих утверждений [3] для $A = \Delta^2$ (Δ – оператор Лапласа), $k = 2$, $n = 2$.

*Лемма*1. Пусть $u \in W_2^k(\Omega)$ – слабое решение задачи (1.4) и существует последовательность областей Ω_t, удовлетворяющих условиям (3.1), (3.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют область Ω', ограничения в R^n, и функция $u_0 \in C^\infty(\Omega')$, такие, что

$$\overline{\Omega} \subset \Omega', \quad Au_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega', \quad \|u - u_0\|_{\Omega'} < \varepsilon$$

Лемма 2. Для любой функции $z \in W_2^k(\Omega)$, любого положительного числа ε существуют область Ω' и функция $\tilde{z} \in C^\infty(\Omega')$, такие, что $\overline{\Omega} \subset \Omega'$, $A\tilde{z}(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$, и

$$\left\| \frac{\partial^r \tilde{z}}{\partial \nu^r} - \frac{\partial^r z}{\partial \nu^r} \right\|_r < \varepsilon$$

Таким образом, вопрос о сходимости ГАМНК сводится к вопросу об аппроксимации классического решения эллиптического дифференциального уравнения.

Рассмотрим пример построения системы глобальных базисных функций, приводящих к сходящемуся ГАМНК.

Задача Дирихле для полигармонического уравнения. К задаче Дирихле для гармонического и бигармонического уравнений сводятся некоторые задачи теории упругости: о кручении призм, о прогибе пластины (для заданных значений прогиба и угла изгиба на границе), о плоском напряженном состоянии и плоской деформации. Рассмотрим общий случай – аппроксимацию решения обобщенной задачи Дирихле для полигармонического уравнения.

Пусть Δ – n-мерный оператор Лапласа. Рассмотрим задачу (1.2) для $A \equiv \Delta^k$. Заметим, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ формы $A(v, u)$, соответствующей полигармоническому оператору Δ^k, постоянны, и они могут быть продолжены в R^n/Ω. Проверим, что для последовательности областей (3.1) и формы $A(v, u)$ выполнены условия (3.2). Рассмотрим (без ограничения общности) случай $n = 2$, $k = 2$. В этом случае

$$A_t(v,\ u) = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] dx$$

и $W_2^{2,0}(\Omega_t)$-эллиптичность форм $A_t(v, u)$ устанавливается при помощи неравенства Фридрихса. Пусть $d_t = \operatorname{diam} \Omega_t$. Для $v \in W_2^{2,0}(\Omega_t)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{\Omega_t}^2 \leq \alpha_t^{-1} |v|_{\Omega_t}^2, \quad \alpha_t = [d_t^4/4 + d_t^2/2 + 1]^{-1}$$

где $|\cdot|_{\Omega_t}$ – норма по старшим производным. Тогда, так как $|A_t(v,\ v)| = |v|_{\Omega_t}^2$, то

$$|A_t(v,\ v)| \geq \alpha_t \|v\|_{W_2^k(\Omega_t)}^2 \tag{3.3}$$

Из (3.1) следует, что $0 < d < d_{t+1} < d_t$ и существует положительное число α, такое, что $\alpha_t > \alpha$, и первое условие (3.2) выполнено. Второе условие (3.2) так же выполнено.

Рассмотрим сходимость ГАМНК. Обозначим через $u(x)$ слабое решение задачи (1.2) для $A \equiv \Delta^k$. Выберем любое положительное ε. По лемме 1 существуют область Ω', ограниченная в R^n, и функция $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega')$, такие, что

$$\overline{\Omega} \subset \Omega', \quad \Delta^k \tilde{u}(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega', \quad \|u - \tilde{u}\|_{\Omega'} < \varepsilon \tag{3.4}$$

Полигармоническая в Ω' функция $\tilde{u}(x)$ может быть представлена по формуле Альманси [4] (всюду далее суммирование по m ведется от нуля до $k-1$)

$$\tilde{u}(x)=\sum_m |x|^{2m}\,\tilde{u}_m(x),\quad |x|^{2m}=\left[\sum_{l=1}^{n} x_l^2\right]^m$$

где $\tilde{u}_m(x)$ – гармонические в Ω' функции. Обозначим через $\{P_q(x)\}_{q=1,2,\dots}$ систему гармонических полиномов, построенную в [5]. Там же доказано, что любую гармоническую функцию можно с любой степенью точности равномерно приблизить некоторой линейной комбинацией элементов системы $\{P_q(x)\}_{q=1,2,\dots}$. Обозначим

$$\tilde{\Sigma}_{mM}=\sum_{q=1}^{M}\tilde{a}_{qm}P_q(x)$$

Пусть $\tilde{\Sigma}_{mM}\to\tilde{u}_m(x)$ при $M\to\infty$ равномерно в Ω', $m'=0,\dots,k-1$. Тогда [6] для области Ω, такой, что $\overline{\Omega}\subset\Omega'$, $D^i\tilde{\Sigma}_{mM}\to D^i\tilde{u}_m(x)$ при $M\to\infty$ равномерно в Ω', $m=0,\dots,k-1$, $|i|=0,1,\dots$.

Для выбранного ε существует $N=kM$, такое, что

$$\|\tilde{u}_N-\tilde{u}\|_\Omega<\varepsilon,\quad \tilde{u}_N(x)=\sum_m |x|^{2m}\sum_{q=1}^{M}\tilde{a}_{qm}P_q(x) \tag{3.5}$$

Из неравенств треугольника, (3.4) и (3.5) следует, что $\|\tilde{u}_N-u\|_\Omega<2\varepsilon$. Из теорем вложения на многообразиях [1] следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^r\tilde{u}_N}{\partial\nu^r}-\frac{\partial^r u}{\partial\nu^r}\right\|_r<\mathrm{const}\cdot\varepsilon \tag{3.6}$$

Учтем, что на Γ верно равенство: $\partial^r u/\partial\nu^r=g_r$. Из неравенства (3.6) получим

$$\sum_r\left\|\frac{\partial^r\tilde{u}_N}{\partial\nu^r}-g_r\right\|_r^2<\mathrm{const}\cdot\varepsilon^2$$

Усилим предыдущее неравенство, заменив $\tilde{u}_N(x)$ на

$$u_N(x)=\sum_m |x|^{2m}\,\Sigma_{mM},\quad \Sigma_{mM}=\sum_{q=1}^{M}a_{qmN}P_q(x) \tag{3.7}$$

причем $N=kM$, а коэффициенты a_{qmN} находятся исходя из условия ГАМНК (2.3), которое в данном случае имеет вид

$$a_{qmN},\quad q=1,\dots,\min_M,\quad m=0,\dots,k-1\sum_r\left\|\frac{\partial^r u_N}{\partial\nu^r}-g_r\right\|_r^2$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_r\left\|\frac{\partial^r u_N}{\partial\nu^r}-g_r\right\|_r^2<\mathrm{const}\cdot\varepsilon^2 \tag{3.8}$$

Запишем выражение (3.7) в виде

$$u_N(x)=\sum_m\sum_{q=1}^{M}a_{qmN}|x|^{2m}P_q(x) \tag{3.9}$$

Перенумеруем слагаемые в правой части (3.9). Пусть $j = j(m, q)$ ($j = 1, ..., N$). Обозначим

$$a_{jN} = a_{qmN}, \quad \varphi_j(x) = |x|^{2m} P_q(x)$$

Тогда выражение (3.9) приобретет вид разложения приближенного решения по глобальным базисным функциям (2.1). Из оценок (2.2) и (3.8) следует, что

$$\|u_N - u\|_\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

Сходимость приближенного по ГАМНК решения слабой постановки обобщенной задачи Дирихле для полигармонического уравнения к точному решению установлена.

Дальнейшее изложение поведем следующим образом: рассмотрим численную реализацию ГАМНК, докажем разрешимость системы линейных алгебраических уравнений ГАМНК, получим простые (с вычислительной точки зрения) условия, накладываемые на глобальные базисные функции, достаточные для вычислительной устойчивости ГАМНК. Затем на основе сходящегося и устойчивого граничного аналога ГАМНК построим сходящийся и устойчивый граничный аналог метода коллокации ГАМК для аппроксимации слабого решения задачи (1.4), обладающий лучшими вычислительными свойствами, чем ГАМНК.

4. Численная реализация ГАМНК. Условия (2.3) приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{M}^{(N)}\mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{g}^{(N)} \quad (p,\ q = 1,\ ...,\ N) \tag{4.1}$$

где матрица $\mathbf{M}^{(N)}$ и вектор $\mathbf{g}^{(N)}$ имеют компоненты

$$M_{pq}^{(N)} = \sum_r \left(\frac{\partial^r \varphi_q}{\partial \nu^r}, \frac{\partial^r \varphi_p}{\partial \nu^r}\right)_r, \quad g_p^{(N)} = \sum_r \left(g_r, \frac{\partial^r \varphi_p}{\partial \nu^r}\right)_r; \quad \mathbf{a}^{(N)} = [a_{1N},\ ...,\ a_{NN}]^T$$

Теорема 1. Система (4.1) однозначно разрешима для любого натурального N.

Доказательство теоремы аналогично доказательству разрешимости системы ГАМНК в случае аппроксимации очень слабого решения бигармонической задачи [2, 3]. Можно показать, что $\mathbf{M}^{(N)}$ – матрица Грама системы глобальных базисных функций в гильбертовом пространстве со скалярным произведением, определяемым по формуле

$$\sum_r \left(\frac{\partial^r u}{\partial \nu^r}, \frac{\partial^r v}{\partial \nu^r}\right)_r = (u,\ v)_\Gamma$$

5. Вычислительная устойчивость ГАМНК. При численной реализации элементы матрицы $\mathbf{M}^{(N)}$ и вектора правой части $\mathbf{g}^{(N)}$ системы (4.1) находятся с некоторыми погрешностями, возникающими при вычислении определенных интегралов по квадратурным (при $n = 2$) или кубатурным (при $n > 2$) формулам. Поэтому на практике вместо системы (4.1) решается система с "возмущенными" матрицей и вектором правой части

$$(\mathbf{M}^{(N)} + \delta\mathbf{M}^{(N)})\mathbf{b}^{(N)} = \mathbf{g}^{(N)} + \delta\mathbf{g}^{(N)}$$

Решение $u_N(x)$, получаемое при помощи ГАМНК, заменяется на решение

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{j=1}^{N} b_{jN}\varphi_j(x)$$

Исследуем вычислительную устойчивость ГАМНК в смысле определений [7]. Обозначим через $\|\cdot\|$ евклидову норму в R^N.

Определение 1. ГАМНК называется устойчивым, если существуют независящие от

N постоянные c_1, c_2, c_3 такие, что при $\left\|\delta\mathbf{M}^{(N)}\right\| \leqslant c_1$ и для любых $\delta\mathbf{g}^{(N)}$ справедливо неравенство

$$\left\|u_N - \tilde{u}_N\right\|_\Gamma \leqslant c_2\left\|\delta\mathbf{M}^{(N)}\right\| + c_3\left\|\delta\mathbf{g}^{(N)}\right\|$$

Устойчивость ГАМНК зависит от выбора системы глобальных базисных функций.

Определение 2. Система функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,\dots}$ называется сильно минимальной в некотором гильбертовом пространстве, если существует положительная постоянная λ_0 такая, что для всех натуральных N выполняется неравенство $\lambda_{\min,N} \geqslant \lambda_0$, где $\lambda_{\min,N}$ – минимальное собственное число матрицы Грама первых N элементов системы $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,\dots}$ в данном гильбертовом пространстве.

Справедлива теорема [7].

Теорема 2. Для того чтобы ГАМНК был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы система глобальных базисных функций была сильно минимальна в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(.,.)_\Gamma$.

Докажем теорему, дающую простые с вычислительной точки зрения условия, которые, будучи наложены на глобальные базисные функции, приводят к вычислительно устойчивому ГАМНК.

Теорема 3. Пусть область $\omega \subset R^n$ такова, что $\gamma \in \Re^{l,1}$, $\overline{\omega} \subset \Omega$, l – неотрицательное целое число, причем $l < k$, система глобальных базисных функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,\dots}$ сильно минимальна в $W_2^l(\gamma)$. Тогда ГАМНК в виде (2.3) будет устойчивым.

Доказательство. Минимальное собственное число матрицы Грама первых N функций системы $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,\dots}$ находится при помощи вариационного принципа описания собственных чисел эрмитовых матриц [8]

$$\lambda_{\min,N} = \min_{\beta\neq 0}\left[\sum_{p,q}(\varphi_p,\ \varphi_q)_\Gamma \alpha_p \alpha_q\right]\beta^{-1}, \quad \beta = \left[\sum_p |\alpha_p|^2\right] \tag{5.1}$$

Здесь и далее суммирование по p и q ведется от 1 до N.

Учтем, что

$$\sum_{p,q}(\varphi_p,\ \varphi_q)_\Gamma \alpha_p \alpha_q = \left\|z_N\right\|_\Gamma^2, \quad z_N(x) = \sum_p \alpha_p \varphi_p(x) \tag{5.2}$$

Очевидно, что функция $z_N(x)$ – решение краевой задачи

$$Au(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial^r u}{\partial \nu^r}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^r z_N}{\partial \nu^r}\right|_\Gamma \tag{5.3}$$

Тогда для нее справедлива оценка типа (2.2)

$$\left\|z_N\right\|_\Omega \leqslant \text{const}\cdot\sum_r \left\|\frac{\partial^r z_N}{\partial \nu^r}\right\|_r \tag{5.4}$$

Из теорем вложения на многообразиях следует, что

$$\left\|z_N\right\|_\Omega \geqslant \text{const}\cdot\left\|z_N\right\|_{W_2^l(\gamma)}$$

Из оценки (5.4) получаем

$$\left\|z_N\right\|_{W_2^l(\gamma)} \leqslant \text{const}\cdot\sum_r \left\|\frac{\partial^r z_N}{\partial \nu^r}\right\|_r$$

Возведем обе части последнего неравенства в квадрат и учтем, что

$$\left[\sum_r c_r\right]^2 = \sum_{r,m} c_r c_m \leq \frac{1}{2}\sum_{r,m} (c_r^2 + c_m^2) = k\sum_r c_r^2$$

Получим

$$\|z_N\|^2_{W_2^l(\gamma)} \leq \text{const}\cdot \sum_r \left\|\frac{\partial^r z_N}{\partial \nu^r}\right\|^2_r \tag{5.5}$$

Подставим в (5.5) вместо функции $z_N(x)$ ее выражение через глобальные базисные функции (5.3) и примем во внимание определение скалярного произведения $(.,.)_\Gamma$, получим

$$\|z_N\|^2_{W_2^l(\gamma)} \leq \text{const}\cdot \|z_N\|^2_\Gamma$$

Последнее неравенство справедливо для любых значений $\alpha_1, ..., \alpha_N$. Поделим обе его части на β и возьмем минимум от обеих частей по всем $\beta \neq 0$. Имеем

$$\min_{\beta\neq 0}\left\|\sum_p \alpha_p\varphi_p\right\|^2_{W_2^l(\gamma)} \beta^{-1} \leq c\min_{\beta\neq 0}\left\|\sum_p \alpha_p\varphi_p\right\|^2_\Gamma \beta^{-1} \tag{5.6}$$

где C – некоторая положительная постоянная. По условию теоремы система глобальных базисных функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,...}$ сильно минимальна в $W_2^l(\gamma)$. Тогда из (5.1), (5.2) следует, что существует положительное число μ_0, такое, что для всех натуральных N

$$\mu_0 \leq \min_{\beta\neq 0}\left\|\sum_p \alpha_p\varphi_p\right\|^2_{W_2^l(\gamma)} \beta^{-1}$$

Но тогда из (5.6) получаем, что для всех натуральных N справедливо неравенство

$$\lambda_0 \leq \min_{\beta\neq 0}\left\|\sum_p \alpha_p\varphi_p\right\|^2_\Gamma \beta^{-1} = \lambda_{\min N}$$

т.е. система $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,...}$ сильно минимальна в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(.,.)_\Gamma$. Используя теорему 2 получаем, что ГАМНК в виде (2.3) будет устойчивым. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема дает простые достаточные условия устойчивости ГАМНК. Достаточно, например, ортонормировать систему глобальных базисных функций в $W_2^l(\gamma)$ Выбор области ω с достаточно простой границей γ облегчает процесс ортонормализации.

Замечание 2. Можно было бы ортонормировать систему глобальных базисных функций сразу в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(.,.)_\Gamma$. Однако, такой подход имеет ряд недостатков. Во-первых, процесс ортонормализации может оказаться численно неустойчивым. Во-вторых, такой процесс оказывается неэффективным при решении задач с изменяющейся границей. При каждом изменении границы Г пришлось бы заново ортонормировать систему глобальных базисных функций. Если же выбрать некоторую область ω, содержащуюся внутри изменяющейся области Ω, и произвести ортонормализацию в $W_2^l(\gamma)$, то ГАМНК будет устойчивым при любом изменении границы Г.

6. Построение системы линейных алгебраических уравнений ГАМНК. Системуам линейных алгебраических уравнений ГАМНК (4.1) запишем в виде

$$\sum_q \left\{ \sum_r \left(\frac{\partial^r \varphi_q}{\partial v^r}, \frac{\partial^r \varphi_p}{\partial v^r} \right)_r \right\} a_q^{(N)} = \sum_r \left(g_r, \frac{\partial^r \varphi_p}{\partial v^r} \right)_r, \quad p = 1, \dots, N$$

Пусть последовательность областей $\{Q_j\}_{j=1,\dots,J}$ образует покрытие границы Г: $\Gamma \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_J$, на покрытии $\{Q_j\}_{j=1,\dots,J}$ задано разбиение единицы $\{\eta_j\}_{j=1,\dots,J}$, $\eta_j \in C_0^\infty(Q_j \cap \Gamma)$, $\eta_1 + \dots + \eta_J \equiv 1$ на Г. Введем обозначения

$$Q = \left\{ y \in R^n \mid y = (y', y_n),\ \|y'\| < 1,\ |y_n| < 1 \right\}$$

$$Q^- = \left\{ y \in R^n \mid y = (y', y_n),\ \|y'\| < 1,\ -1 < y_n < 0 \right\}$$

$$Q^+ = \left\{ y \in R^n \mid y = (y', y_n),\ \|y'\| < 1,\ 0 < y_n < 1 \right\},\ Q_j^+ = \Omega \cap Q_j,\ Q_j^- = \left(R^n / \Omega \right) \cap Q_j$$

Пусть T_j – отображение, такое, что T_j: $Q^+ \to Q_j^+$, T_j: $Q^- \to Q_j^-$ (здесь и всюду далее $j = 1, \dots, J$, суммирование по j ведется от 1 до J). Рассмотрим вычисление элементов матрицы и вектора правой части системы ГАМНК.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $W_2^s(\Gamma)$ для вещественных s определяется следующим образом [9]:

$$(u, v)_{W_2^s(\Gamma)} = \sum_j \left(\eta_j(y') u(y'), \eta_j(y') v(y') \right)_{W_2^s(R^{n-1})}$$

$$u_j(y') = u\left(T_j(y', 0)\right),\ v_j(y') = v\left(T_j(y', 0)\right),\ \eta_j(y') = \eta_j\left(T_j(y', 0)\right)$$

Учтем определение скалярного произведения в $W_2^s(R^{n-1})$ при помощи преобразования Фурье. Получим

$$(u, v)_{W_2^s(\Gamma)} = \sum_j \int_{R^{n-y}} \left(1 + |\xi|^2 \right)^s \widehat{\zeta_j u_j}(\xi)\, \overline{\widehat{\zeta_j u_j}}(\xi) d\xi$$

$$\widehat{\zeta_j w_j}(\xi) = \int_{\operatorname{supp}\zeta_j = B(0,1)} e^{-i\xi y'} \zeta_j(y') w_j(y') dy',\ w_j = u_j, v_j$$

$$\xi y' = \xi_1 y_1' + \dots + \xi_{n-1} y_{n-1}'$$

(черта означает комплексное сопряжение). Развернутая запись системы линейных алгебраических уравнений ГАМНК примет вид

$$\sum_q \{ \sum_r \sum_j \int_{R^{n-1}} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{k-r-1/2} \widehat{\zeta_j \varphi_{qrj}}(\xi) \overline{\widehat{\zeta_j \varphi_{prj}}}(\xi)\, d\xi \} a_q^{(N)} =$$

$$= \sum_r \sum_j \int_{R^{n-1}} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{k-r-1/2} \widehat{\zeta_j g_{rj}}(\xi) \overline{\zeta_j \widehat{\varphi_{prj}}}(\xi)\, d\xi \qquad (6.1)$$

$$\varphi_{prj}(y') = \partial^r \varphi_p\left(T_j(y', 0)\right) / \partial v^r,\ g_{rj}(y') = g_r\left(T_j(y', 0)\right),\ p = 1, \dots, N$$

Заметим, что построение системы ГАМНК непросто. Разработаем на основе сходящегося и устойчивого ГАМНК сходящийся и устойчивый ГАМК, обладающий лучшими вычислительными свойствами.

7. Построение ГАМК для аппроксимации решения задачи Дирихле. Рассмотрим два важных на практике случая: когда преобразование Фурье глобальных базисных функций и граничных условий уже найдены (и построим ГАМК для преобразований Фурье), а также когда преобразование Фурье глобальных базисных функций и граничных условий вычисляются по кубатурным формулам (и построим ГАМК для самих базисных функций).

7.1. Построение ГАМК для преобразований Фурье. Вычислим интегралы, входящие в систему ГАМНК (6.1), по кубатурным формулам порядка L_r с коэффициентами A_{lr} и узлами ξ_{lr} ($l = 1, ..., L_r$). Введем индекс $t = t\,(r, l)$, причем $t = 1, ..., M$, где $M = L_0 + ... + L_{k-1}$, и обозначим

$$\Psi_{qjt} = S_{lr}\,\widehat{\zeta_j\varphi_{qrj}}(\xi_{lr}),\ \chi_{jt} = S_{lr}\,\widehat{\zeta_j g_{rj}}\,(\xi_{lr}) \tag{7.1}$$

$$S_{lr} = \left[A_{lr}\left(1+|\xi_{lr}|^2\right)^{k-r-1/2}\right]^{1/2},\ \sum_r\sum_j R_{pqrj} = R_{pq},\ \sum_r\sum_j r_{prj} = r_p$$

где R_{pqrj}, r_{prj} – погрешности кубатурных формул. Тогда система ГАМНК примет вид

$$\sum_q\left\{\sum_j\sum_{t=1}^{M}\Psi_{qjt}\overline{\Psi}_{pjt} + R_{pq}\right\}a_q^{(N)} = \sum_j\sum_{t=1}^{M}\overline{\Psi}_{pjm}\chi_{jm} + r_p \tag{7.2}$$

Введем в рассмотрение матрицы и векторы: $\mathbf{K}_j^{(N)} = \left\{\Psi_{qjt}\right\}_{t=1,...,M,q=1,...N}$, $\mathbf{R}^{(N)} = \left\{\mathbf{R}_{pq}\right\}_{p,q=1,...,N}$, $\mathbf{h}_j^{(N)} = \left\{\chi_{jt}\right\}_{t=1,...,M}$, $\mathbf{r}^{(N)} = \left\{r_p\right\}_{p=1,...,N}$.

Представим выражение (7.2) в виде

$$\sum_q\left\{\sum_j\sum_{t=1}^{M}\left(\mathbf{K}_j^{(N)}\right)^*_{pt}\left(\mathbf{K}_j^{(N)}\right)_{tq} + \left(\mathbf{R}^{(N)}\right)_{pq}\right\}a_q^{(N)} = \sum_j\sum_{t=1}^{M}\left(\mathbf{K}_j^{(N)}\right)^*_{pt}\left(\mathbf{h}_j^{(N)}\right)_t + \left(\mathbf{r}^{(N)}\right)_p$$

где $\mathbf{M}^*$ означает матрицу, комплексно сопряженную к $\mathbf{M}$. Введем блочную матрицу $\mathbf{K}^{(N)}$ и блочный вектор $\mathbf{h}^{(N)}$ по формулам

$$\mathbf{K}^{(N)} = \begin{bmatrix}\mathbf{K}_1^N \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{K}_J^N\end{bmatrix},\ \mathbf{h}^{(N)} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1^{(N)} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{h}_J^{(N)}\end{bmatrix}$$

Тогда система (7.2) примет вид

$$\{(\mathbf{K}^{(N)*}\mathbf{K}^{(N)}+\mathbf{R}^{(N)}\}\mathbf{a}^{(N)} = (\mathbf{K}^{(N)})^*\mathbf{h}^{(N)}+\mathbf{r}^{(N)} \tag{7.3}$$

Отметим, что системы (7.3) и (4.1) эквивалентны, т.е. для матрицы $\mathbf{M}^{(N)}$ и вектора правой части $\mathbf{g}^{(N)}$ системы (4.1) ГАМНК справедливы представления

$$\mathbf{M}^{(N)} = (\mathbf{K}^{(N)})^*\mathbf{K}^{(N)} + \mathbf{R}^{(N)},\ \mathbf{g}^{(N)} = (\mathbf{K}^{(N)})^*\mathbf{h}^{(N)} + \mathbf{r}^{(N)}$$

Наряду с системой (7.3) рассмотрим систему без матрицы $\mathbf{R}^{(N)}$ и вектора $\mathbf{r}^{(N)}$, содержащих погрешности вычисления определенных интегралов

$$(\mathbf{K}^{(N)})^*\mathbf{K}^{(N)}\mathbf{b}^{(N)} = (\mathbf{K}^{(N)})^*\mathbf{h}^{(N)} \tag{7.4}$$

Выберем число узлов кубатурных формул так, чтобы выполнялось равенство $JM = N$, т.е. чтобы матрица $\mathbf{K}^{(N)}$ была квадратной. Тогда решение $\mathbf{b}^{(N)}$ совпадает с решением следующей системы:

$$\mathbf{K}^{(N)}\mathbf{b}^{(N)} = \mathbf{h}^{(N)} \tag{7.5}$$

Система (7.5) является системой ГАМК с узлами ξ_{lr} для преобразований Фурье базисных функций и граничных условий.

Рассмотрим сходимость и устойчивость построенного ГАМК. Отметим, что ГАМК дает последовательность приближенных решений $\tilde{u}_N(x) = b_{1N}\varphi_1(x) + \ldots + b_{NN}\varphi_N(x)$, отличную, вообще говоря, от последовательности $u_N(x)$ приближенных решений, получаемых при помощи ГАМНК. Получим достаточные условия сходимости ГАМК. Требуется доказать, что $\|\tilde{u}_N - u_N\|_\Gamma \to 0$ при $N \to \infty$. Тогда, так как $\|u_N - u\|_\Gamma \to 0$ при $N \to \infty$, где $u(x)$ – точное решение, то сходимость приближенного по ГАМК решения к точному будет установлена. Систему (7.4), решение которой совпадает с решением системы ГАМК (7.5), можно рассматривать как систему ГАМНК с "возмущенными" матрицей и вектором правой части. Матрица и вектор "возмущений" равны, соответственно, $-\mathbf{R}^{(N)}$ и $-\mathbf{r}^{(N)}$. Из результатов разд. 5, касающихся устойчивости ГАМНК, следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть кубатурные формулы (7.1) таковы, что $\|\mathbf{R}^{(N)}\| \to 0$, $\|\mathbf{r}^{(N)}\| \to 0$, при $N \to \infty$, а система глобальных базисных функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1,2,\ldots}$ сильно минимальна в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(.,.)_\Gamma$. Тогда

$$\|\tilde{u}_N - u_N\|_\Gamma \to 0 \quad \text{при } N \to \infty$$

Сходимость ГАМК установлена. Выясним, какие преимущества дает переход от ГАМНК к ГАМК. Обозначим через $\mu(\mathbf{M})$ число обусловленности матрицы $\mathbf{M}$ относительно $\|\cdot\|$. Используя теорему Вейля [8] о возмущении собственных чисел эрмитовых матриц можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть кубатурные формулы, применяемые для вычисления определенных интегралов в системе (6.1) таковы, что $\|\mathbf{R}^{(N)}\| \to 0$, $\|\mathbf{r}^{(N)}\| \to 0$, при $N \to \infty$. Тогда

$$\lim \mu(\mathbf{K}^{(N)}) = \lim \sqrt{\mu(\mathbf{M}^{(N)})} \quad \text{при } N \to \infty$$

7.2. Построение ГАМК для глобальных базисных функций. Рассмотрим возможность построения ГАМК, приводящего к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей и вектором правой части, содержащими (в отличие от подразд. 7.1) не преобразование Фурье функций $\zeta_j(y')\varphi_{qrj}(y')$, $\zeta_j(y')g_{rj}(y')$, соответственно, а сами эти функции, вычисленные в точках, которые соответствуют некоторым точкам границы Γ.

Имеем

$$\widehat{\zeta_j\varphi_{prj}}(\xi_{lr}) = \int\limits_{B(0,1)} e^{-i\xi_{lr}y'}\zeta_j(y')\varphi_{prj}(y')dy', \quad \widehat{\zeta_j g_{prj}}(\xi_{lr}) = \int\limits_{B(0,1)} e^{-i\xi_{lr}y'}\zeta_j(y')g_{rj}(y')dy' \tag{7.6}$$

Вычислим интегралы, входящие в (7.6), при помощи кубатурных формул с L-узлами $y_i', \ldots, y_L'$ и коэффициентами $B_1, \ldots, B_L$. Введем обозначения

$$\Phi_{qrjlt} = S_{lr}B_t e^{-i\xi_{lr}y_t'}\zeta_j\left(y_t'\right)\varphi_{qrj}\left(y_t'\right)$$

$$\chi_{rjlt} = S_{lr}B_t e^{-i\xi_{lr}y_t'}\zeta_j\left(y_t'\right)g_{rj}\left(y_t'\right)$$

Тогда система ГАМНК (6.1) примет вид

$$\sum_q\sum_r\sum_j\left\{\sum_{l=1}^{L_r}\left(\sum_{t=1}^{L}\overline{\Phi}_{qrjlt}\sum_{t=1}^{L}\Phi_{qrjt}\right)+\tilde{R}_{pqrj}\right\}a_q^{(N)} = \sum_r\sum_j\left\{\sum_{l=1}^{L_r}\left(\sum_{t=1}^{L}\overline{\Phi}_{prjlt}\sum_{t=1}^{L}\chi_{rjlt}\right)+\tilde{r}_{qrj}\right\}$$

где $\tilde{R}_{pqrj}$ и $\tilde{r}_{prj}$ – суммарные погрешности вычисления определенных интегралов.

Поступим так же, как и при выводе системы ГАМК (7.4), отбросим погрешности квадратных формул и рассмотрим соответствующую систему. В этой системе изменим порядок суммирования по $l = 1, \dots, L_r$ и $t_1, t_2 = 1, \dots, L$, и введем матрицы и векторы

$$\mathbf{F}_{qrj} = \left\{\Phi_{qrjlt}\right\}_{l=1,\dots,Lr,t=1,\dots,L}, \quad \mathbf{H}_{rj} = \left\{\chi_{rjlt}\right\}_{l=1,\dots,Lr,t=1,\dots,L}$$

$$\mathbf{f}_{qrj} = \mathbf{F}_{qrj}\mathbf{e}_L, \ \mathbf{h}_{rj} = \mathbf{H}_{rj}\mathbf{e}_L; \ \mathbf{e}_L = [1,\dots,1] \in R^L$$

Получим

$$\sum_q \sum_r \sum_j \mathbf{f}^*_{prj}\mathbf{f}_{qrj} b_q^{(N)} = \sum_r \sum_j \mathbf{f}^*_{prj}\mathbf{h}_{qrj} \qquad (7.7)$$

Перенумеруем векторы $\mathbf{f}_{qrj}$, $\mathbf{h}_{rj}$ через $\mathbf{f}_{qm}$, $\mathbf{h}_m$ при помощи преобразования индексов $t = t(r, j)$, где $t = 1, \dots, M$, а $M = kJ$. Преобразуем далее с учетом перенумерации

$$\sum_q \sum_{t=1}^{M} \mathbf{f}^*_{pt}\mathbf{f}_{qt} b_q^{(N)} = \sum_{t=1}^{M} \mathbf{f}^*_{pt}\mathbf{h}_t \qquad (7.8)$$

Обозначим

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{q1} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}_{qM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{h}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_N]$$

Тогда матричная форма системы (7.8) примет вид

$$\mathbf{F}^*\mathbf{F}\mathbf{b}^{(N)} = \mathbf{F}^*\mathbf{h} \qquad (7.9)$$

Выберем число узлов кубатурных формул так, чтобы $J(L_0 + \dots + L_{k-1}) = N$. Тогда матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^*$ будут квадратными размерности N, и решение системы (7.9) совпадает с решением системы ГАМК

$$\mathbf{F}\mathbf{b}^{(N)} = \mathbf{h}$$

Отметим, что элементы матрицы $\mathbf{F}$ и вектора $\mathbf{h}$ зависят от N.

Все результаты подразд. 7.1, касающиеся сходимости приближенного по ГАМК решения к точному и устойчивости ГАМК, справедливы и в случае построенного здесь ГАМК.

8. Заключение. Предлагаемый подход является общим и может быть применен для широкого круга задач (см. [10, 11]). Авторами разработаны устойчивые и сходящиеся ГАМНК и ГАМК для аппроксимации решения граничной задачи Дирихле для гармонического и бигармонического уравнений в случае, когда гладкость границы и заданных на границе функций не позволяют записать слабую постановку граничной задачи [12, 13]. При построении ГАМНК и ГАМК для таких задач используется так называемая "очень слабая постановка задачи", или постановка задачи в весовых пространствах заданных на границе функций [1, 2].

По сравнению с существующими методами при аппроксимации решения ряда задач предлагаемый подход позволяет понизить на единицу евклидову размерность задачи за счет перехода к границе области, что существенно облегчает алгоритмизацию метода. В отличие от метода конечных элементов и метода сеток не требуется дискретизации области, что также облегчает процесс алгоритмизации и дает преимущества при решении задач с переменными границами (задач оптимального проектирования). В отличие от метода граничных элементов метод позволяет получить решение для всей области без дополнительных вычислений. Вычислительная устойчивость позволяет получить удовлетворительную погрешность приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague: Academia, 1967. 351 p.
2. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
3. *Rektorys K.* Zahradnik V. Solution of the first biharmonic problem by the method of least squares on the boundary // Apl. mat. 1974. V. 19. № 2. P. 101–131.
4. *Бондаренко Б.А.* Полигармонические полиномы. Ташкент: ФАН, 1968. 170 с.
5. *Бондаренко Б.А.* Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. Ташкент: ФАН, 1987. 146 с.
6. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.
7. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
8. *Хорн Р., Джонс Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
9. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
10. *Ануфриев И.Е., Петухов Л.В.* Метод решения эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на разложении решения по неортогональным базисным функциям. // Сб. Т. СПбГТУ. 1996. № 461. С. 120–129.
11. *Anoufriev I.* Construction of the stable analogue of the collocation method for some boundary problems in the theory of elasticity // Abstrs Intern. Workshop on New Approaches to Hi-Tech Materials 97. Nondestructive Testing and Computer Simulation in Materials Science and Engineering. St.-Petersburg, 1997. № 6.
12. *Ануфриев И.Е., Петухов Л.В.*Применение устойчивого граничного аналога метода коллокации для аппроксимации решения некоторых задач механики. // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 633–642.
13. *Ануфриев И.Е.* Построение граничного аналога метода коллокации для аппроксимации очень слабого решения первой краевой задачи для бигармонического уравнения // Вестник молодых ученых. Сер. Прикл. математика и механика. 1997. № 1. С. 26–32.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
22.IV.1998