УДК 532.58

© 1999 г. А.Г. Петров

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЯЖЕЛОГО ШАРА В СТАЦИОНАРНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

Доказывается теорема о неустойчивости любого положения равновесия тяжелого шара конечного радиуса в произвольном стационарном потенциальном неоднородном потоке идеальной жидкости.

Задача об устойчивости положения равновесия тяжелого тела в заданном стационарном неоднородном потенциальном потоке была поставлена для малого шара [1] и для малого тела произвольной формы [2]. Были построены лагранжианы и показаны отсутствия точек локального минимума у потенциальной энергии. Кроме того, было показано, что в лагранжиане для малого шара отсутствуют линейные по скорости слагаемые и сделан вывод о неустойчивости любого положения равновесия [1].

Ниже строится точное выражение лагранжиана для шара конечного радиуса, движущегося в заданном потенциальном неоднородном потоке. Ставится и решается задача об устойчивости положения равновесия шара в неоднородном стационарном потоке в потенциальном поле массовых сил. Для шара конечного радиуса доказаны те же свойства лагранжиана, которые были установлены для малого шара [1]. Отсюда, на основании известных результатов по обращению теоремы Лагранжа – Дирихле делается вывод об отсутствии устойчивого равновесия шара.

1. Точный динамический принцип и уравнения движения. Пусть задано произвольное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости с полем скорости, зависящим от времени t и координат $\mathbf{x}(x, y, z)$,

$$\mathbf{v}_0(t,\mathbf{x}) = \nabla\Phi_0(t,\mathbf{x}),\ \ \nabla^2\Phi_0(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

и давлением $p_0(t, \mathbf{x})$. Если массовые силы имеют потенциал U, то давление и скорость связаны интегралом Коши – Лагранжа

$$p_0 + \rho\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + \frac{v_0^2}{2}\right) - \rho U = f(t) \tag{1.2}$$

Движение тела в потоке с полем скорости (1.1) можно описать с помощью вариационного принципа Гамильтона, точная формулировка которого для рассматриваемого случая приведена ранее [3, 4].

Действительное движение тела между его двумя заданными положениями отличается от кинематически возможных движений за тот же промежуток времени $t \in (t_1, t_2)$ тем, что для действительного движения вариация действия по Гамильтону равна нулю

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,\ \ L = T_0 - \Pi_0 + \Lambda \tag{1.3}$$

где T_0 и Π_0 – кинетическая и потенциальная энергии тела, Λ – присоединенная функция Лагранжа.

Было выведено следующее точное представление [3]:

$$\Lambda = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)^2 dV - \int_V p_0 dV \tag{1.4}$$

где $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ – потенциальное поле скорости жидкости, возмущенное телом, V – объем тела, Ω – область, занятая жидкостью.

Если $q_1, q_2,..., q_6$ – обобщенные координаты тела, то формулы (1.1) – (1.4) определяют функцию Лагранжа от времени t, обобщенных координат q_α и скоростей $\dot{q}_\alpha$ (α = = 1,2,..., 6). Уравнения движения тела запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., 6 \tag{1.5}$$

В дальнейшем потенциальное поле скорости общего вида $\mathbf{v}_0(t, \mathbf{x})$ будет называться неоднородным потоком, не зависящее от времени поле скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ – неоднородным стационарным потоком. Не зависящее от координат поле скорости $\mathbf{v}_0(t)$ – однородным потоком.

2. Малый шар в неоднородном потоке. Неустойчивость равновесия малого шара в стационарном неоднородном потоке. За обобщенные координаты шара можно принять декартовы координаты его центра $\mathbf{x}_0(x_0, y_0, z_0)$. Для шара достаточно малого радиуса a при потенциале $U = -gz$ (поле силы тяжести) функции (1.4) и (1.3) имеют следующие асимптотически главные члены разложения:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho V\,|\,\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{v}_0(t,\mathbf{x}_0)\,|^2 - Vp_0(t,\mathbf{x}_0) + O(a^5)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{x}}_0^2, \quad \Pi_0 = gMz_0 \tag{2.1}$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{x}}_0^2 + \frac{1}{4}\rho V\,|\,\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{v}_0(t,\mathbf{x}_0)\,|^2 - Vp_0(t,\mathbf{x}_0) - gMz_0$$

где M – масса, $V = 4\pi a^3/3$ – объем шара.

Можно показать, что в функции Лагранжа L члены, линейные по скорости $\dot{\mathbf{x}}_0$, можно исключить. Действительно, добавляя к правой части последнего выражения (2.1) полную производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho V\Phi_0(t,\mathbf{x}_0)\right) = \frac{1}{2}\rho V\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}_0\mathbf{v}_0\right)$$

получим

$$L = \frac{1}{2}M'\dot{\mathbf{x}}_0^2 - W, \quad W = \frac{3}{2}Vp_0(t,\mathbf{x}_0) + gz_0M', \quad M' = M + \frac{1}{2}\rho V \tag{2.2}$$

Тогда уравнения движения (1.5) примут вид

$$M'\ddot{\mathbf{x}}_0 = -\nabla_0 W(t,\mathbf{x}_0), \quad \nabla_0 = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y_0} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z_0} \tag{2.3}$$

Функция Лагранжа (2.2) и уравнение движения (2.3) малого шара в неоднородном потоке были получены иным способом и, по-видимому, впервые в [1]. Для установившегося неоднородного потока уравнения (2.3) выведены Кельвином [5]. Сила, действующая на неподвижный малый шар в неоднородном нестационарном потоке, определена Жуковским [6].

Малый шар массы M в неоднородном потоке движется так же, как материальная точка с массой M' в поле сил с потенциалом $-W$. (В дальнейшем функция $-W$ будет называться силовым потенциалом, а обратная к ней функция – потенциальной энергией). Влияние неоднородного потока сводится к добавлению к массе шара M присоединенной массы $\rho V/2$ и добавлению к потенциалу внешних сил слагаемого $-3Vp_0(t, \mathbf{x}_0)/2$.

Была поставлена задача об устойчивости равновесия малого шара в стационарном неоднородном потоке [1] и затем сведена к исследованию точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ и ее устойчивости в соответствии с уравнениями движения (2.3). Условие равновесия $\nabla_0 W = 0$ или $\nabla p_0 = 2gM'V^{-1}/3$ при $\mathbf{x} = 0$ и может быть выполнено при соответствующем подборе потенциала неоднородного потока $\Phi_0(\mathbf{x})$. Было отмечено, что для стационарного однородного потока имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}M'\dot{\mathbf{x}}_0^2 + W(\mathbf{x}_0) = E$$

Ввиду известного неравенства $\nabla_0^2 p_0(\mathbf{x}_0) \leqslant 0$ функция $W(\mathbf{x}_0)$ субгармоническая, т.е. для нее выполнено неравенство

$$\nabla_0^2 W(\mathbf{x}_0) = \frac{3}{2}V\nabla_0^2 p_0(\mathbf{x}_0) \leqslant 0$$

Как известно, такая функция не может иметь локального минимума. Это свойство рассматриваемой динамической системы [1] является аналогом известной теоремы Ирншоу в электродинамике об отсутствии устойчивого положения равновесия точечного заряда в электростатическом поле. В силу того, что потенциальная энергия – гармоническая функция, она не имеет максимума ни в одной точке. Состояние вопроса о неустойчивости систем с субгармонической силовой функцией обсуждается в разд. 5.

Ниже будет доказано, что все свойства, обеспечивающие неустойчивость для малого шара, справедливы и для шара конечного радиуса. А именно, в разд. 3 доказывается, что лагранжиан системы для общего стационарного неоднородного потока представляется в виде суммы $L = L_2 + L_0$, где L_2 – квадратичная по скоростям положительно определенная форма, L_0 – силовой потенциал, не зависящий от скоростей. Затем в разд. 4 устанавливается, что L_0– субгармоническая функция: $\nabla_0^2 L_0 > 0$. Отсюда, как следствие существующих результатов по неустойчивости систем при субгармоничности силового потенциала (разд. 5), вытекает теорема о неустойчивости любого положения равновесия шара конечного радиуса в стационарном неоднородном потоке.

3. Доказательство отсутствия гироскопических сил. Покажем, что слагаемые в функции Λ (1.4), линейные по скорости $\dot{\mathbf{x}}_0$, можно исключить не только для малого шара, но и для шара конечного радиуса, движущегося в стационарном неоднородном потоке с потенциалом $\Phi_0(\mathbf{x}_0)$. Для этого представим поле скорости, входящее в первый интеграл (1.4), в виде

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \nabla(\varphi - \tilde{\varphi}) \tag{3.1}$$

Обе функции φ и $\tilde{\varphi}$ являются гармоническими, стремятся к нулю на бесконечности и на границе шара $\partial V(\mathbf{x}_0)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\mathbf{x}}_0\mathbf{n}, \quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial n}; \quad \mathbf{n} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)/a \tag{3.2}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности сферы ∂V.

Таким образом, функции φ и $\tilde{\varphi}$ удовлетворяют уравнению и граничным условиям внешних задач Неймана, которые имеют единственные решения. Решения для φ и $\tilde{\varphi}$

можно выписать в явном виде

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = -\frac{a^3}{2r^2}(\dot{\mathbf{x}}_0\mathbf{n}) \tag{3.3}$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{a}\int\limits_0^{a^2/r} R\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{x}_0+R\mathbf{n})}{\partial R}dR \tag{3.4}$$

$$r^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

$$R^2 = (x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2$$

Потенциал φ (3.3) определяет известное течение около сферы, движущейся в неподвижной на бесконечности жидкости. Потенциал $\tilde{\varphi}$ (3.4) является потенциалом части течения, возмущенного присутствием сферы в неоднородном потоке с потенциалом Φ_0, и находится по теореме Вейса ([7], с. 467). Функция $\tilde{\varphi}$ в дальнейшем будет называться потенциалом Вейса. Подставим выражение (3.1) в (1.4) и воспользуемся формулой Грина, замечая, что φ – линейная по скорости функция, а $\tilde{\varphi}$ не зависит от скорости $\dot{\mathbf{x}}_0$, отделим слагаемые Λ_2 – квадратичное, Λ_1 – линейное и Λ_0 – не зависящее от скорости $\dot{\mathbf{x}}_0$, получим

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\rho\int\limits_{\partial V(\mathbf{x}_0)}(\varphi-\tilde{\varphi})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right)dS - \int\limits_{V(\mathbf{x}_0)} p_0 dV = \Lambda_0+\Lambda_2$$

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{2}\rho\int\limits_{\partial V(\mathbf{x}_0)}\tilde{\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}dS - \int\limits_{V(\mathbf{x}_0)} p_0 dV,\quad \Lambda_2 = \frac{1}{4}\rho V(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2) \tag{3.5}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль, внешняя к шару V.

Слагаемое

$$\Lambda_1 = \frac{\rho}{2}\int\limits_{\partial V(\mathbf{x}_0)}\left(\varphi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}+\tilde{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS \tag{3.6}$$

здесь опущено, поскольку оно является полной производной по времени

$$\Lambda_1 = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\rho V\Phi_0(x_0,y_0,z_0)\right) \tag{3.7}$$

и не дает вклада в уравнения движения шара.

Действительно, по формуле Грина и с помощью граничного условия (3.2) выражение (3.6) преобразуется к виду

$$\Lambda_1 = \rho\int\limits_{\partial V(\mathbf{x}_0)}\varphi\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}dS$$

На границе $\partial V(\mathbf{x}_0)$ функция φ равна $P_1 = -(\dot{x}_0\Delta x+\dot{y}_0\Delta y+\dot{z}_0\Delta z)/2$. Функция $P_1\nabla\Phi_0$ определена и дифференцируема внутри шара V, и можно применить к последнему интегралу теорему Остроградского–Гаусса. Далее, пользуясь свойством гармонической функции $\nabla(P_1\nabla\Phi_0)$, получим

$$\Lambda_1 = \rho\int\limits_{V(\mathbf{x}_0)}\nabla(P_1\nabla\Phi_0)dV = -\frac{1}{2}\rho V\left(\dot{x}_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0}+\dot{y}_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial y_0}+\dot{z}_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial z_0}\right)$$

По теореме о дифференцировании сложной функции последнее выражение совпадает с (3.7), что и требовалось доказать.

Таким образом, точное выражение лагранжиана L представляется двумя слагаемыми: L_2 – квадратичная по скоростям положительно определенная форма и L_0 – не зависящая от скоростей тела силовая функция и находятся с помощью (1.3) и (3.5)

$$L = L_2 + L_0$$

$$L_2(\theta,\theta_1,\theta_2,\dot\theta,\dot\theta_1,\dot\theta_2,\dot{\mathbf{x}}_0) = \rho\,|\,\dot{\mathbf{x}}_0\,|^2 + T_0 \tag{3.8}$$

$$L_0(\theta,\mathbf{x}_0) = -gM(z_0 + l\cos\theta) + \frac{1}{2}\rho\int_{\Omega(\mathbf{x}_0)} \tilde{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dV - \int_{V(\mathbf{x}_0)} p_0(\mathbf{x})dV \tag{3.9}$$

Первый интеграл в L_0 преобразован с помощью формулы Грина, вектор $\tilde{\mathbf{v}} = \nabla\tilde\varphi$ – скорость с потенциалом Вейса (3.4), зависящая от текущих координат $\mathbf{x}$ и координат центра шара $\mathbf{x}_0$.

За обобщенные координаты приняты три координаты центра шара $O(x_0, y_0, z_0)$ и углы Эйлера θ, θ_1 θ_2, где θ – угол между осью Oz, направленной вертикально вверх, и вектором $\mathbf{l}(x_c - x_0,\ y_c - y_0,\ z_c - z_0)$, точка $C(x_c, y_c, z_c)$ – центр масс шара (фигура). Кинетическая энергия T_0 твердого шара складывается из кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения относительно центра масс (теорема Кенига)

$$T_0(\theta,\theta_1,\theta_2,\dot\theta,\dot\theta_1,\dot\theta_2,\dot{\mathbf{x}}_0) = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{x}}_0^2 + (\omega\times\mathbf{l})^2) + \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} I_{ij}\omega_i\omega_j$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, I_{ij} – моменты инерции твердого тела $(i, j = 1, 2, 3)$.

Таким образом, указанное представление функции Лагранжа получено.

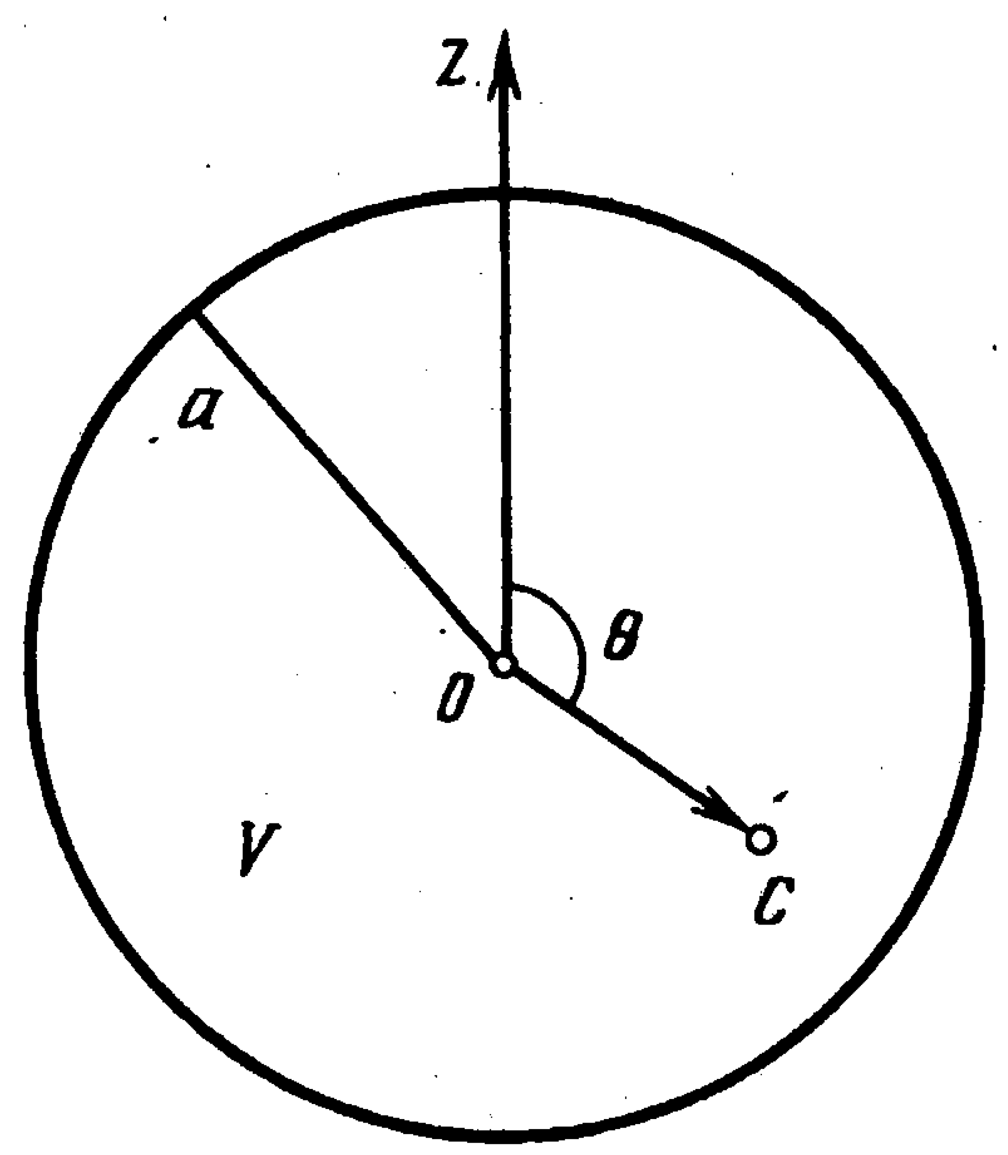
4. Доказательство субгармоничности силового потенциала. Функция Лагранжа (3.8) соответствует консервативной системе с шестью степенями свободы. Докажем свойство субгармоничности силовой функции L_2: $\nabla^2 L_0(\mathbf{x}_0) \geqslant 0$. Для этого потребуются три следующие леммы.

Лемма 1. Справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$\nabla_0 \int_{\Omega(\mathbf{x}_0)} \tilde F(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dV = \int_{\Omega(\mathbf{x}_0)} (\nabla + \nabla_0)\tilde F(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dV \tag{4.1}$$

$$\nabla_0 \int_{V(\mathbf{x}_0)} F(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dV = \int_{V(\mathbf{x}_0)} (\nabla + \nabla_0)F(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dV \tag{4.2}$$

где $V(\mathbf{x}_0)$ – внутренность шара радиуса a с центром в точке $\mathbf{x}_0$, $\Omega(\mathbf{x}_0)$ – внешность этого шара. Функции $\tilde F$ и F зависят от переменных $\mathbf{x}(x, y, z)$, $\mathbf{x}_0(x_0, y_0, z_0)$, дифференцируемы в соответствующих областях $\Omega(\mathbf{x}_0)$, $V(\mathbf{x}_0)$ и интегралы в (4.1) предполагаются абсолютно сходящимися.



Доказательство тождества (4.1) проводится на основании определения производной. Для приращения интеграла, соответствующего приращению аргумента $\Delta\mathbf{x}_0$, имеем

$$\int_{\Omega(x_0+\Delta x)} \tilde F(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x})dV - \int_{\Omega(x_0)} \tilde F(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0)dV =$$

$$= \left(\int_{\Omega(x_0)} \nabla_0 F(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0)dV + \int_{\partial\Omega(x_0)} F(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0)\mathbf{n}dS\right)\Delta\mathbf{x} + O(\Delta\mathbf{x})^2$$

где $\Omega(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x})$ – область вне шара со смещенным центром в точке $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x})$, $\Omega(\mathbf{x}_0)$ – область вне шара с центром в точке $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{n}$ – внутренняя к шару V нормаль, но внешняя к области $\Omega(\mathbf{x}_0)$. Воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса и деля на приращение аргумента, получим требуемое тождество (4.1). Тождество (4.2) выводится аналогично.

Лемма 2. Для потенциала Вейса $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, определяемого по (3.4), и потенциала неоднородного потока $\Phi_0(\mathbf{x})$ справедливы тождества

$$(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, \ \mathbf{x}_0) = 0 \tag{4.3}$$

Доказательство проводим при помощи равенства (3.4). Пусть аргументы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0$ получают одинаковое малое приращение $\Delta\mathbf{x}$. Тогда в интеграле (3.4) изменится только аргумент $\mathbf{x}_0$ на $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$, остальные переменные r, $\mathbf{n}$, R не изменятся. Для соответствующего приращения функции $\tilde{\varphi}$ получим

$$\Delta\mathbf{x}(\nabla + \nabla_0)\tilde{\varphi} = -\frac{\Delta\mathbf{x}}{a}\int_0^{a^2/r} R\frac{\partial}{\partial R}\nabla_0\Phi_0(\mathbf{x}_0 + R\mathbf{n})dR$$

Отсюда следует

$$(\nabla + \nabla_0)\tilde{\varphi} = -\frac{1}{a}\int_0^{a^2/r} R\frac{\partial}{\partial R}\nabla_0\Phi_0(\mathbf{x}_0 + R\mathbf{n})dR$$

Применяя вторично оператор $(\nabla + \nabla_0)$ к этому тождеству и проводя аналогичные рассуждения, получим равенство (4.3) (используется гармоничность функции $\Phi_0(\mathbf{x})$, $\Delta\Phi_0 = 0$).

Лемма 3. Для квадрата скорости $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \ \mathbf{x}_0) = \nabla\tilde{\varphi}$ с потенциалом Вейса и для давления $p_0(\mathbf{x})$, определяемого из интеграла Коши – Лагранжа (1.2), справедливы неравенства

$$\begin{gathered}(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x}, \ \mathbf{x}_0) = \\ = 2\left(\left|(\nabla + \nabla_0)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right|^2 + \left|(\nabla + \nabla_0)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\right|^2 + \left|(\nabla + \nabla_0)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}\right|^2\right) \geqslant 0 \\ -(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)p_0(\mathbf{x}) = \rho\left(\left|\nabla\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right|^2 + \left|\nabla\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right|^2 + \left|\nabla\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\right|^2\right) \geqslant 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

Доказательство. Если принять во внимание равенство (4.3) и вытекающее из него тождество и выполнить очевидное преобразование, то получим первое неравенство (4.4)

$$(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \ \mathbf{x}_0) = \nabla((\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, \ \mathbf{x}_0)) = 0$$

$$(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x}) = 2\sum_{k=1}^{3}(\tilde{v}_k(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{v}_k + |(\nabla + \nabla_0)\tilde{v}_k|^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} 2|(\nabla + \nabla_0)\tilde{v}_k|^2$$

Второе неравенство (4.4) выводится аналогично.

Перейдем к доказательству субгармоничности силовой функции $L_0(\mathbf{x}_0)$.

Применяем дважды оператор ∇_0 к функции $L_0(\mathbf{x}_0)$ в (3.9). Пользуясь последовательно тождествами (4.1), (4.2), получаем

$$\nabla_0^2 L_0(\mathbf{x}_0) = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega(\mathbf{x}_0)}(\nabla + \nabla_0)(\nabla + \nabla_0)\tilde{\mathbf{v}}^2 dV - \int_{V(\mathbf{x}_0)}\nabla^2 p_0(\mathbf{x})dV \tag{4.5}$$

Применяя к подынтегральным функциям (4.5) неравенства (4.4) леммы 3, получаем требуемое условие субгармоничности

$$\nabla^2 L_0(\mathbf{x}_0) \geqslant 0 \tag{4.6}$$

из которого следует, что функция $L_0(\mathbf{x}_0)$ не может иметь локального максимума ни в одной точке. Отсюда при использовании известных результатов по обращению теоремы Лагранжа – Дирихле вытекает теорема устойчивости равновесия шара конечного радиуса a в неоднородном стационарном потоке (разд. 5).

Можно доказать и более общее утверждение. Углы θ_1, θ_2 могут быть циклическими координатами. Тогда шар может совершать стационарное движение с постоянным моментом количества движения с неподвижным центром $\mathbf{x}_0$. Любое такое стационарное движение будет также неустойчивым. Действительно, функция T_0 явно не зависит от координат $\mathbf{x}_0$. Поэтому после исключения циклических координат методом Рауса добавочная потенциальная энергия не будет зависеть от $\mathbf{x}_0$ и все выводы об отсутствии локального минимума у потенциальной энергии останутся без изменения.

5. Теоремы о неустойчивости равновесия при условии субгармоничности силового потенциала. Предположим, что в начале координат система с лагранжианом (3.8) удовлетворяет условию равновесия

$$\nabla_0 L_0(\theta,\ \mathbf{x}_0) = \mathbf{g}M + \frac{1}{2}\rho\nabla_0 \int\limits_{\Omega(\mathbf{x}_0)} \tilde{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0)dV - \nabla_0 \int\limits_{V(\mathbf{x}_0)} p_0(\mathbf{x})dV = 0 \tag{5.1}$$

где скорость $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0)$ с потенциалом Вейса и давление неоднородного потока $p_0(\mathbf{x})$ выражаются через произвольную функцию $\Phi_0(\mathbf{x})$ по формулам (3.4) и (1.2). Произвольная функция $\Phi_0(\mathbf{x})$ может быть подобрана так, чтобы условие (5.1) выполнялось. Например, можно выбрать семейство потенциалов $K\Phi_0$ с осевой симметрией относительно оси z. Тогда оба интеграла в (5.1) будут направлены по вектору ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$ и пропорциональны K^2. Равенство (5.1) будет удовлетворяться при соответствующем значении коэффициента K.

Разложение силового потенциала в ряд Маклорена в точке равновесия $\mathbf{x} = 0$ будет иметь вид

$$L_0 = L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)} + \ldots \tag{5.2}$$

где $L^{(n)}$ – однородный по координатам полином степени n.

Если $L^{(2)} \neq 0$, то в силу (4.6) $\nabla^2 L^{(2)} \geqslant 0$. Неустойчивость равновесия в этом случае вытекает из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению (см., например, [8]). Это наиболее распространенный случай равновесия такой системы. Заметим, что на основании этого результата Ирншоу сделан вывод о неустойчивости заряда в любом электростатическом поле.

В вырожденном случае $L^{(2)} = 0$ ряд (5.2) может начинаться с однородного полинома степени выше второй:

$$L_0 = L^{(n)} + L^{(n+1)} + \ldots,\quad n > 2$$

и $L^{(n)}$, в виду условия субгармоничности (4.6), не будет иметь локального максимума в нуле. Для доказательства неустойчивости равновесия в этом вырожденном случае при специальных условиях существуют теоремы Четаева [8] и других авторов ([9], с. 88–90) по обращению теоремы Лагранжа – Дирихле. Был сформулирован [10] результат, который полностью решает проблему доказательства теоремы о неустойчивости равновесия исследуемой системы: "предположим, что силовая функция субгармонична и ее ряд Маклорена отличен от нуля; тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво". Из этого результата [10] вытекает также неустойчивость в проблеме Ирншоу в случае вырождения.

Автора благодарит Ф.Л. Черноусько за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00399).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость и пузырь воздуха // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 735–745.
2. *Воинов О.В., Петров А.Г.* Об устойчивости малого тела в неоднородном потоке // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 6. С. 1303–1306.
3. *Воинов В.В., Воинов О.В., Петров А.Г.* Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 680–689.
4. *Петров А.Г.* Принцип Гамильтона и некоторые задачи динамики идеальной жидкости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 48–55.
5. *Thomson W.* On the forces experienced by solids immersed in a moving liquid // Proc. Roy. Soc. Edin. [1870], 1872. V. 7. P. 60–63.
6. *Жуковский Н.Е.* Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949, С. 670–688.
7. *Милн-Томпсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
9. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
10. *Козлов В.В.* Об одной задаче Кельвина // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 165–167.

Москва

e-mail:petrov @ ipmnet, ru

Поступила в редакцию

28.III.1997