

УДК 532.516

© 1999 г. В.И. Грабовский, А.Н. Крайко

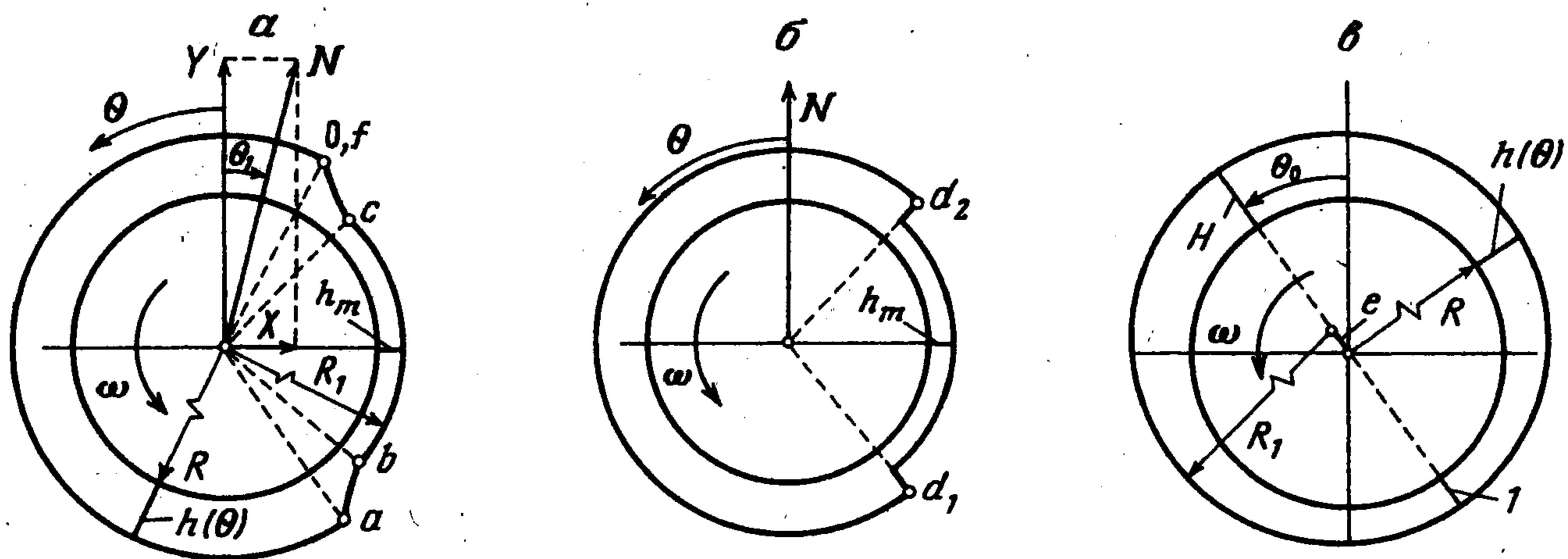
ПРОФИЛИРОВАНИЕ ЗАЗОРА РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА С МИНИМАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В приближении несжимаемой "некавитирующей" жидкости сформулирована и решена изопериметрическая задача (ИЗ) оптимального профилирования внешних обводов зазора замкнутого гидродинамического радиального подшипника бесконечной протяженности. Если в задаче Релея (ЗР) оптимальный подшипник реализует максимум коэффициента несущей способности C_N , то в ИЗ он обеспечивает минимум коэффициента момента сопротивления C_M на шипе (вале) при заданном C_N . Установлена структура оптимального решения. Показано, что при C_N , меньших величины C_{NR} , отвечающей ЗР, высота h оптимального зазора – непрерывная функция полярного угла θ . В общем случае оптимальная $h = h(\theta)$ имеет участки четырех типов. Два из них $h \equiv 1$ и $h \equiv H > 1$ – участки краевого экстремума (УКЭ1 и УКЭН), появляющиеся из-за ограничения на h снизу (h отнесено к минимально допустимой высоте) и сверху. Еще два – участки двустороннего экстремума – УДЭ. Первый из них – УДЭ1 аналогичен единственному УДЭ в ЗР. На нем $h \equiv h_1$, где $1 < h_1 < H$. Второй УДЭ – УДЭ2 появляется только в ИЗ. При $C_N > 0,75C_{NR}$ УКЭ1 разбивает УДЭ2 на два. Первый из них имеет отрицательный наклон, а второй – положительный, соединяя УКЭ1 с УКЭН или с УДЭ1. При $C_N \rightarrow C_{NR}$ тангенсы углов наклона УДЭ2 обращаются в $\pm \infty$, а сами они превращаются в две ступеньки, т.е. в известные разрывы h в ЗР. В отличие от решенной ранее ИЗ для ползуна оптимальный зазор радиального подшипника на УДЭ2 может быть и сужающимся, и расширяющимся. Теоретический анализ иллюстрируется результатами расчета.

Совершенствование гидродинамических радиальных подшипников, широко применяемых в различных приложениях [1–3], связано с проблемой оптимального профилирования зазора. Начало исследованиям в этом направлении положил Релей [4]: он нашел, что в приближении несжимаемой вязкой жидкости максимум C_N цилиндрического ползуна дает кусочно-постоянный зазор с одной ступенькой. На начальном его участке – УДЭ1 высота зазора $h \equiv h_R > 1$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Концевой участок $h \equiv 1$, где h отнесено к минимально допустимой по постановке задачи высоте h_m , является участком краевого экстремума (УКЭ1). Ступенчатую структуру имеет и решение ЗР для радиального подшипника [5–9].

Наряду с ЗР представляют интерес другие вариационные задачи, в первую очередь, задача минимизации коэффициента сопротивления C_D или момента C_M при фиксированном C_N . Для ползуна первая попытка решения такой задачи была предпринята в [10], а ее полное решение получено в [11]. Для бесконечного радиального подшипника аналогичная ИЗ сформулирована и решена ниже.

1. Пусть r, θ, z – цилиндрические координаты с осью z , направленной по оси вала подшипника. Вал радиуса R вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Образующая неподвижного цилиндрического "основания" подшипника (фиг. 1, а)



Фиг. 1

дается уравнением $r = R_1(\theta)$. Высота зазора $h(\theta) = R_1(\theta) - R$ такова, что $0 < h \ll R$. При этом в переменных $x = \theta/(2\pi)$ и $y = r - R$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$) уравнения, описывающие течение в зазоре, совпадают с уравнениями течения в зазоре плоского ползуна, движущегося над бесконечной плоскостью. Различия состоят лишь в части граничных условий, в выражениях для сил и т.п. Форму зазора определяет его "верхняя" граница $h(x)$, образующая основание подшипника. В общем случае $h(x)$ может иметь ступеньку (или ступеньки) при $x = x_d$ (фиг. 1, б). Величинам в точках $0, f, d, \dots$ будем приписывать соответствующие нижние индексы, а если они рвутся в точке d , то до (после) нее в направлении вращения – дополнительный индекс минус (плюс). Вязкость жидкости μ и ее плотность ρ постоянны.

Введем безразмерные переменные, взяв за масштабы r, y и h , окружной компоненты скорости u , плотности и давления размерные радиус вала R , минимально допустимую высоту зазора h_m , $U = R\omega$, ρ и $\gamma\rho U^2$ с безразмерным комплексом

$$\gamma = 12\pi R\mu / (\rho h_m^2 U) = 12\pi\mu / (\rho h_m^2 \omega) = 6\mu / (\rho h_m^2 n)$$

где все величины размерные, $\omega = 2\pi n$, а n – число оборотов в единицу времени.

В рамках теории смазки при кусочно-непрерывной функции $h(x)$ давление – не зависящая от y непрерывная функция x . Ниже уравнение для p используется в двух формах

$$1) L \equiv h - q - p'h^3 = 0, \quad 2) p' = \frac{h - q}{h^3}; \quad q = 2Q \equiv 2 \int_0^h u dy \quad (1.1)$$

Здесь Q – расход смазки через зазор, а штрих означает дифференцирование по x . Для любой заданной кусочно-непрерывной функции $h(x)$ постоянная q подбирается такой, чтобы выполнялось условие периодичности давления

$$p(0) = p(1) \equiv p_0 \quad (1.2)$$

В ЗР [5–9] давление p_0 , точнее, давление p_d в одном из сечений скачка высоты зазора считается заданным. В этом, однако, как показано ниже, нет необходимости.

Пусть Y и X – размерные вертикальная и боковая компоненты силы N , действующей на вал из-за неравномерности распределения давления p по его поверхности, а M – испытываемый им момент сопротивления, возникающий из-за трения (фиг. 1, а). Для коэффициентов C_Y, C_X и C_M имеем

$$C_Y \equiv \frac{Y}{2\pi R\gamma\rho U^2} = -\int_0^1 p \cos \theta dx, \quad C_X \equiv \frac{X}{2\pi R\gamma\rho U^2} = \int_0^1 p \sin \theta dx \quad (1.3)$$

$$C_M \equiv \frac{M}{Rh_m\gamma\rho U^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3h} + hp' \right) dx; \quad \theta = 2\pi x$$

Выражение для C_M тождественно выражению для коэффициента сопротивления C_D бесконечного ползуна [11]. Следствием этого является ряд аналогий и совпадений в решениях обеих задач.

В ЗР ищется такое распределение высоты зазора $h = h(x)$, которое при p , определяемом уравнением (1.1) и условием (1.2), реализует максимум коэффициента несущей способности $C_N = \sqrt{C_Y^2 + C_X^2}$. В ИЗ C_N фиксируется, а минимизируется C_M . Разумеется, $C_N \leq C_{NR}$, где C_{NR} – максимально возможный коэффициент несущей способности, получающийся в ЗР.

В обеих задачах высота зазора в согласии с выбором масштаба ограничена снизу и сверху

$$1 \leq h(x) \leq H \quad (1.4)$$

с заданной постоянной $H > 1$.

Подчеркнем, что задаваемая по постановке задачи размерная минимально допустимая высота зазора h_m определяется соображениями физического характера (шероховатостью поверхностей, наличием твердых примесей в смазке, возможными колебаниями вала подшипника и т.д.). Согласно изложенному ранее [11] в ИЗ для малых C_N минимальная высота оптимального зазора плоского ползуна $h_{\min} > h_m$. Как будет видно из дальнейшего, такое же положение сохраняется в ИЗ и для оптимального зазора радиального подшипника. Напротив, в ЗР, а для больших C_N и в ИЗ $h_{\min} = h_m$. Это легко понять. Действительно, в ЗР в приближении теории смазки при отсутствии заданной h_m как величины, уменьшение которой недопустимо из-за "внешних" ограничений, несущая способность N ползуна или подшипника при $h_{\min} \rightarrow 0$ растет неограниченно без всякого оптимального профилирования зазора, т.е. сама вариационная задача теряет смысл. Разумеется, неограниченный рост N при $h_{\min} \rightarrow 0$ есть следствие неучета шероховатости поверхностей и других эффектов, наличие которых и делает необходимым задание h_m . Кстати, только при h_m в качестве масштаба высоты зазора возможно появление УКЭИ, на котором $h = 1$, а допустимые $\delta h \geq 0$. Если же h при отсутствии h_m относить к h_{\min} , то при $h = 1$ допустимы δh любого знака и УКЭИ не может появиться. Это хорошо понимал Релей, но, к сожалению, не всегда понимают современные авторы. Следствия подобного непонимания [10] проанализированы ранее [11]. По аналогичным причинам сказанное справедливо и в отношении величины H , также задаваемой по "внешним" соображениям.

2. Для решения ИЗ, а также ЗР составим функционал Лагранжа

$$J = \alpha C_M + \beta C_N + \int_0^1 \lambda(x) L dx; \quad C_N = \sqrt{C_Y^2 + C_X^2}, \quad \frac{C_Y}{C_N} = \cos \theta_1 \quad (2.1)$$

Здесь L – левая часть первого уравнения из (1.1); λ – переменный множитель Лагранжа; $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ в ЗР и $\alpha = 1$, а β – постоянный множитель Лагранжа в ИЗ. Коэффициент C_N отвечает результирующей силе, действующей на вал в направлении $\theta = \theta_1$. В обеих задачах при допустимом варьировании вариации J и оптимизируемого функционала из (1.3) совпадают при любых ограниченных множителях Лагранжа. Поэтому для оптимального зазора $\delta J = \delta C_N \leq 0$ в ЗР и $\delta J = \delta C_M \geq 0$ в ИЗ при любом удовлетворяющем условиям (1.4) варьировании h . Проварьировав J с учетом непрерывности p в сечениях d возможного скачка h и известных правил определения вариаций, придем к выражению для δJ , справедливому для любой (необязательно оптимальной) высоты зазора $h(x)$ и произвольных ограниченных $\lambda(x)$ и β

$$\delta J = \{\alpha(h_- - h_+)/2 + (\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-\}_d \Delta p_d + X_d \Delta x_d - \Delta q \int_0^1 \lambda dx + \int_0^1 (A^h \delta h + A^p \delta p) dx \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
X_d &= \alpha(h_-^{-1} - h_+^{-1})/6 + \lambda_-(h-q)_- - \lambda_+(h-q)_+ \\
A^h &= AB/(6h^3), \quad A = 2h - 3q, \quad B = \alpha - 6\lambda h^2 \\
A^p &= -\beta \cos(\theta - \theta_1) - (\alpha h - 2\lambda h^3)/2
\end{aligned}$$

Здесь Δp_d и Δx_d — разности p и x в сечениях скачка высоты зазора для проварьированного и непроварьированного зазоров, а δp и δh — вариации p и h , т.е. их разности для тех же зазоров при фиксированном x ; слагаемые с Δp_d и Δx_d суммируются по всем сечениям скачка h . Коэффициенты X_d , A и B преобразованы с учетом выражений для p'_\pm из (1.1).

Распоряжаясь произволом в выборе λ , обратим в нуль коэффициент A^p . Это приведет к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\alpha h - 2\lambda h^3)' = -2\beta \cos(\theta - \theta_1) \quad (2.3)$$

справедливому для любого зазора на участках непрерывности h . При наличии k сечений разрыва h условия, связывающие λ_{d-} и λ_{d+} во всех, кроме одного из них, получим, приравняв нулю множитель при Δp_d . Это даст

$$\alpha(h_- - h_+)_{d+} + 2[(\lambda h^3)_{d+} - (\lambda h^3)_{d-}] = 0 \quad (2.4)$$

В силу (2.4) выражение в скобках в уравнении (2.3) непрерывно в $(k-1)$ -м из k сечений разрыва h . При изменении x на единицу θ изменяется на 2π . Поэтому, проинтегрировав уравнение (2.3) от точки d_+ до точки d_- , отвечающей k -му скачку h , и учтя выполнение условия (2.4) в остальных сечениях разрыва h , найдем, что это же условие выполняется и на k -м скачке h . Благодаря выполнению условия (2.4) во всех точках скачка h выражение (2.2) для δJ не содержит ни одного из приращений Δp_d . Данное обстоятельство делает излишним задание p_d или p_0 в постановках ЗР и ИЗ.

Условий (2.4) в точках разрыва h для определения λ недостаточно. Недостающее условие получим, приравняв нулю коэффициент при Δq :

$$\int_0^1 \lambda dx = 0 \quad (2.5)$$

Уравнения и условия (2.3)–(2.5) формулируют сопряженную задачу для множителя λ .

Пусть функция $h(x)$ задана. Тогда, интегрируя уравнение (1.1) при произвольном $p(0) = p_0$ и подбирая расход q , можно решить прямую задачу теории смазки, удовлетворив условию периодичности давления из (1.2) $p(1) = p_0$ при циклическом обходе вала. В рассматриваемом случае несжимаемой смазки уравнение (1.1) содержит только p' и не содержит p . Поэтому найденное значение расхода q и все прочие результаты не зависят от выбора величины p_0 . Решив прямую задачу, найдем затем решение сопряженной. При этом в линейно зависящем от $\lambda_0 = \lambda(0)$ решении уравнения (2.3) λ_0 всегда можно подобрать таким, чтобы выполнилось условие (2.5). После этого для произвольного (необязательно оптимального) зазора выражение для δJ станет следующим:

$$\delta J = X_d \Delta x_d + \int_0^1 A^h \delta h dx \quad (2.6)$$

$$X_d = \left\{ \frac{\alpha}{6h_\pm} [3qh_\pm + h_\mp (h_\mp - 3h_\mp)] + \lambda_\pm f \right\} \frac{h_+ - h_-}{h_\mp^3}$$

$$f = h_+ h_- (h_+ + h_-) - (h_+^2 + h_+ h_- + h_-^2) q$$

$$A^h = AB/(6h^3), \quad A = 2h - 3q, \quad B = \alpha - 6\lambda h^2$$

Оба эквивалентных представления коэффициента X_d (с верхним или нижним набором индексов) получены из соответствующего коэффициента из (2.2) после исключения либо λ_- , либо λ_+ с использованием справедливого на скачках h условия (2.4).

В ЗР, в которой $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, анализ выражения (2.6) показывает, что в общем случае оптимальный зазор может состоять из участков трех типов. Это УКЭ1, где $h \equiv 1$, УКЭН, где $h \equiv H$, и УДЭ1. На УДЭ1 величина h определяется условием $A^h = 0$, или, что то же, $A = 0$, т.е. равенством

$$2h - 3q = 0 \quad (2.7)$$

В силу (1.4) на УКЭ1 допустимые δh неотрицательные, а на УКЭН допустимые δh неположительные. Так как в ЗР допустимое варьирование оптимального зазора может вести только к уменьшению C_N , то в ней $\delta J = \delta C_N$ неположительные, и условия оптимальности этих участков имеют вид неравенств

$$\lambda(3q - 2H) \geq 0 \text{ на УКЭН} \quad (2.8)$$

$$\lambda(3q - 2) \leq 0 \text{ на УКЭ1}$$

Разные участки могут в общем случае стыковаться с разрывом и без разрыва h . Для оптимальной "разрывной" стыковки в ЗР необходимо, чтобы в сечении скачка h обращался в нуль коэффициент при Δx_d из (2.6), т.е. $X_d = 0$. В ЗР, где $\alpha = 0$, это условие показывает, что разрывная стыковка УДЭ1 с любым из участков краевого экстремума возможна, только когда в сечении разрыва h

$$\lambda_{d-} = \lambda_{d+} = 0 \quad (2.9)$$

В силу (2.7) и (1.1), на УДЭ1

$$h = 3q/2, \quad p' = 1/(3h^2) \quad (2.10)$$

Следовательно, для несжимаемой смазки на УДЭ1 $h = \text{const}$, а p – линейная функция x . С учетом сказанного с помощью условий (2.5) и (2.7) – (2.9) можно показать, что в ЗР оптимальная функция $h(x)$ имеет два разрыва. Оба они расположены либо между УКЭН и УКЭ1 в случае, когда $H < h_R$, а УДЭ1 просто нет, либо между УДЭ1 и УКЭ1, когда $H > h_R$ (фиг. 1, б). Итак, для несжимаемой смазки оптимальный зазор в ЗР – ступенчатая функция с двумя ступеньками. Для $H > h_R$, когда в ЗР несущественно ограничение на h сверху, этот результат известен [6–9]. В то же время излишняя по постановке задачи фиксация p в одном из сечений скачка h может приводить к недоразумениям.

В качестве примера укажем на построенное в [9] "второе" решение ЗР. На самом же деле, его отличие от "первого" чисто условно и связано с тем, взято ли за масштаб p давление на входе или на выходе (в направлении вращения вала) из УКЭ1. Кстати, по крайней мере для несжимаемой смазки p естественнее относить к ρU^2 , а не к давлению в каком-либо "характерном" сечении, даже когда такое сечение есть (как в случае ползуна и радиального подшипника с незамкнутым основанием).

В ИЗ $\alpha = 1$, и обращение в нуль A^h возможно не только при $A = 0$, что по-прежнему приводит к (2.7) и к УДЭ1, но и при $B = 0$. Во втором случае

$$6\lambda h^2 = 1 \quad (2.11)$$

В соответствии с этим, в ИЗ наряду с УДЭ1 возможен УДЭ2. На нем h , в силу (2.3) и (2.11), определяется уравнением

$$h' = -3\beta \cos(\theta - \theta_1)$$

Аналогично (2.8) в ИЗ на УКЭН и УКЭ1 должны выполняться неравенства

$$(1 - 6\lambda N^2)(2N - 3q) \leq 0 \text{ на УКЭН} \quad (2.12)$$

$$(1 - 6\lambda)(2 - 3q) \geq 0 \text{ на УКЭ1}$$

Если λ_+ или λ_- из (2.11) подставить в формулу для X_d из (2.6) с $\alpha = 1$, то, как можно показать, $X_d = 0$ только при $h_{d+} = h_{d-}$. Это означает, что УДЭ2 стыкуется с другими участками непрерывным образом.

3. Решение ЗР дает наибольшее значение C_N подшипника и большую (но не наибольшую) величину C_M . При $C_N = 0$ есть две предельные формы зазора, связанные с ограничением на его высоту, $h \equiv H$ и $h \equiv 1$. В первом случае коэффициент C_M минимален ($C_M = 1/(6H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow \infty$), а во втором – максимален ($C_M = 1/6$). Как и в [11], построение решения ИЗ начнем с крайней ситуации, когда заданный $C_N = 0$. Последнее имеет место при любом $h \equiv \text{const}$, а C_M уменьшается с ростом высоты зазора. Поэтому для $C_N = 0$ в силу ограничения на h сверху решение ИЗ дается равенством

$$h(x) \equiv H \quad (3.1)$$

Тогда из (1.1) и (1.2) следует, что

$$p(x) \equiv p_0 \quad (3.2)$$

Чтобы решение (3.1) давало минимум C_M , должно выполняться соответствующее условие из (2.12). Поскольку согласно (1.1), (3.1) и (3.2) в рассматриваемом случае $h \equiv H - q$, то $2N - 3q = -q < 0$. Следовательно, необходимое условие оптимальности решения (3.1) – первое неравенство из (2.12) – выполнено, если

$$1 - 6\lambda N^2 \geq 0 \text{ при } 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

Определив $\lambda(x)$ из дифференцированного уравнения (2.3) с h из (3.1) и из условия (2.5), получим ($\theta_1 = 0$ достигается выбором начала отсчета θ)

$$\lambda(x) = \beta \sin(2\pi x)/(2\pi N^3)$$

т.е. λ – синусоида от x с интервалом изменения: $-|\beta| \leq 2\pi\lambda N^3 \leq |\beta|$. Отсюда и из (3.3) находится интервал значений β , в котором выполняется необходимое условие оптимальности – неравенство (3.3). Выбор конкретного значения β из указанного интервала, как и в [11], определяется требованием непрерывного перехода от $C_N = 0$ к $C_N > 0$. Для возможности такого перехода сколь угодно малый положительный коэффициент C_N реализуется введением в окрестности $x = x_0 = 0,75$ также малого УДЭ2. Следовательно, для $C_N = 0$ неравенство (3.3) при том же значении $x = 0,75$ должно становиться равенством. Поэтому $C_N = 0$ отвечает $|\beta| = \pi N/3$.

В отличие от работы [11], где для бесконечного ползуна построено полное аналитическое решение ИЗ, решение ИЗ для радиального подшипника строилось численно. При этом, однако, использовались многие полученные ранее результаты [11]. При численном решении ИЗ дифференциальные уравнения интегрируются последовательно по разным участкам с учетом непрерывности p , h и λ в точках их стыковки. Возможность построения в ИЗ непрерывных решений появляется из-за наличия УДЭ2, где p и h могут и возрастать, и убывать.

Согласно уравнениям и граничным условиям при заданных H и C_N определяемыми параметрами задачи являются q , β , $\lambda(0)$ и C_M . Решение не зависит от безразмерного комплекса γ в силу принятого способа масштабирования и от величины p_0 (для несжимаемой смазки) – из-за присутствия в уравнении (1.1) для p только производной p' . Тем не менее, при расчетах приходится задавать какое-то значение p_0 , например, $p_0 = 0$. Каждому же из оставшихся четырех параметров отвечает одно из условий,

которые должны быть удовлетворены при решении ИЗ. Так, выбор β используется для получения заданного C_N . За счет подбора q обеспечивается периодичность давления. Наконец, величина $\lambda_0 = \lambda(0_+)$ берется такой, чтобы удовлетворилось условие (2.5). Используемые при этом уравнения в согласии с результатами разд. 1 и 2 имеют вид

$$h \equiv H, \quad p' = \frac{H-q}{H^3}, \quad \lambda' - \frac{\beta}{H^3} \cos(2\pi x) = 0 \quad \text{на УКЭН}$$

$$h = \frac{3q}{2}, \quad p' = \frac{1}{3h^2}, \quad \lambda' - \frac{\beta}{h^3} \cos(2\pi x) = 0 \quad \text{на УДЭ1}$$

$$h' = -3\beta \cos(2\pi x), \quad p' = \frac{h-q}{h^3}, \quad \lambda = \frac{1}{6h^2} \quad \text{на УДЭ2}$$

$$h \equiv 1, \quad p' = 1-q, \quad \lambda' - \beta \cos(2\pi x) = 0 \quad \text{на УКЭ1}$$

На каждом из участков краевого экстремума должно выполняться свое условие оптимальности в форме неравенств (2.12). Расчет начинается в "начальном" сечении $x = 0$ и после прохода всех возможных участков заканчивается при $x = 1$. Согласно выполненным расчетам в сечении $x = 0$ располагается УКЭН, а если его нет, – УДЭ1. При нарушении условия оптимальности для текущего участка осуществляется переход к УДЭ2, затем к УКЭ1, потом снова к УДЭ2 и, наконец, к УДЭ1 или к УКЭН. Тем самым завершается полный оборот по периметру вала. В зависимости от значений C_N и H те или иные участки могут отсутствовать. Как уже отмечалось, УДЭ2 отсутствует лишь при $C_N = C_{NR}$, когда он вырождается в скачок h .

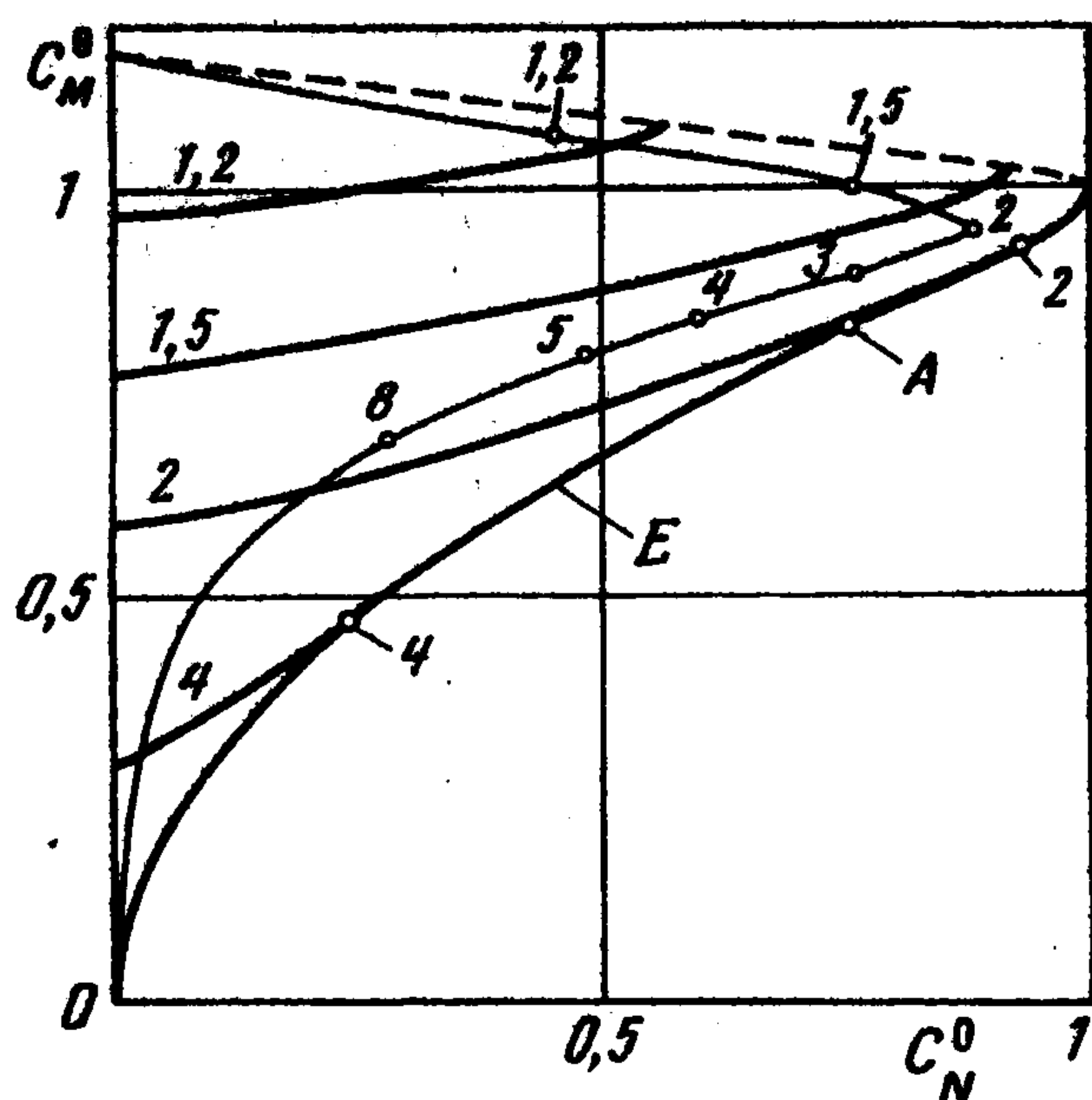
В ИЗ особая роль принадлежит решению ЗР уже потому, что отвечающая ЗР величина $C_N = C_{NR}$ – максимальное значение C_N , задаваемое в ИЗ. Решение ЗР, особенно простое в случае несжимаемой смазки, получалось из решения ИЗ предельным переходом при $\beta \rightarrow -\infty$. Указанный переход осуществляется при $C_N \rightarrow C_{NR}$ за счет непрерывного уменьшения длины и одновременного роста наклона (по модулю) УДЭ2. Так, при $\beta = -10^3$ результаты расчета дают

$$q_R \approx 1,2086, \quad h_R \approx 1,813, \quad C_{NR} \approx 0,01345, \quad C_{XR} = 0 \quad (3.4)$$

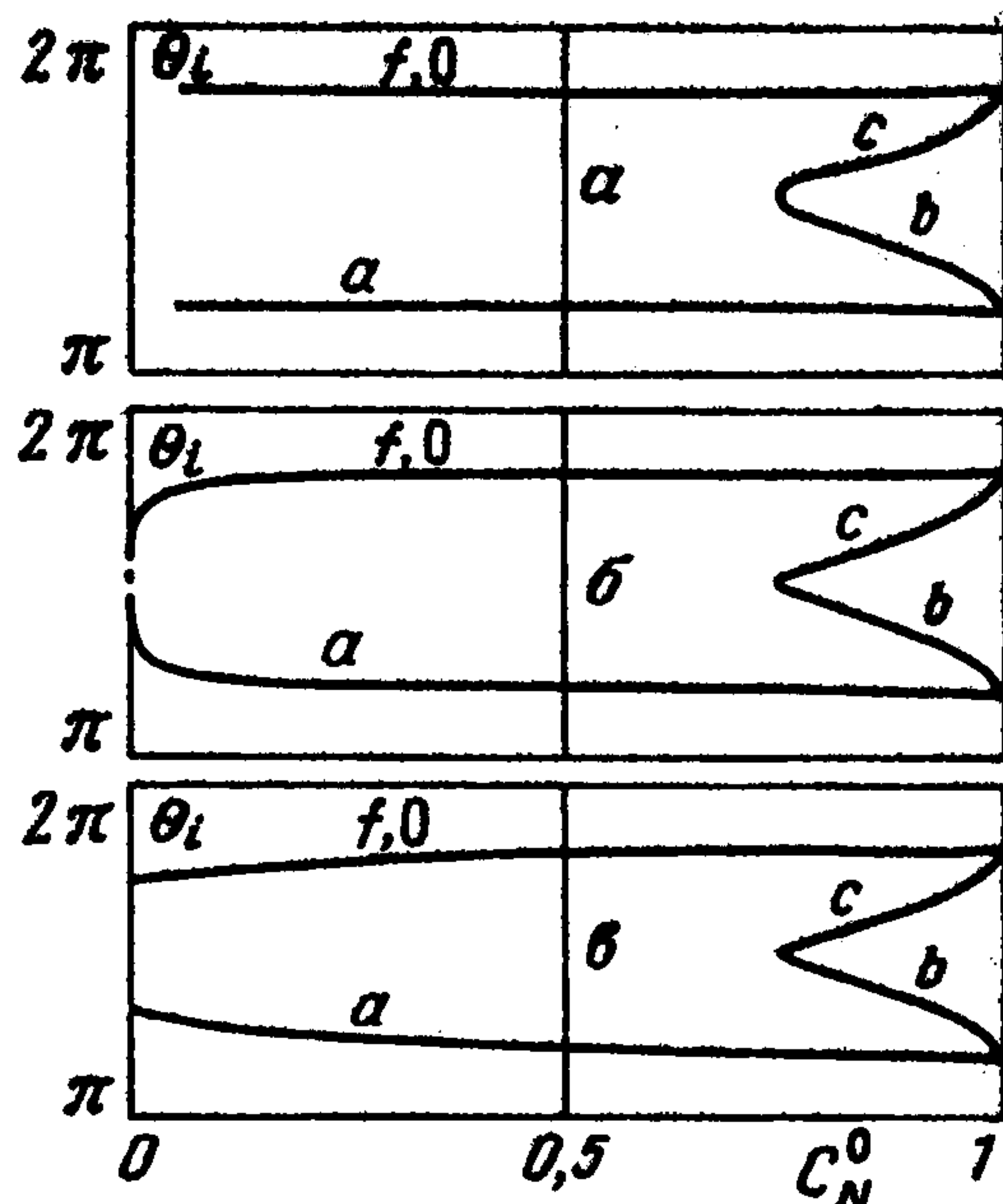
$$\theta_1 = 0, \quad C_{MR} \approx 0,1441, \quad \theta_{d_1} \approx -0,8276\pi, \quad \theta_{d_2} \approx -0,1724\pi$$

Эти значения близки к результатам работ [6–9]. ЗР имеет смысл при любых ограничениях на h , в том числе, при столь "жестких", что $H < h_R$. В таких случаях входной УДЭ1 оптимального зазора с $h = h_R$ заменяется также горизонтальным УКЭН с $h = H < h_R$.

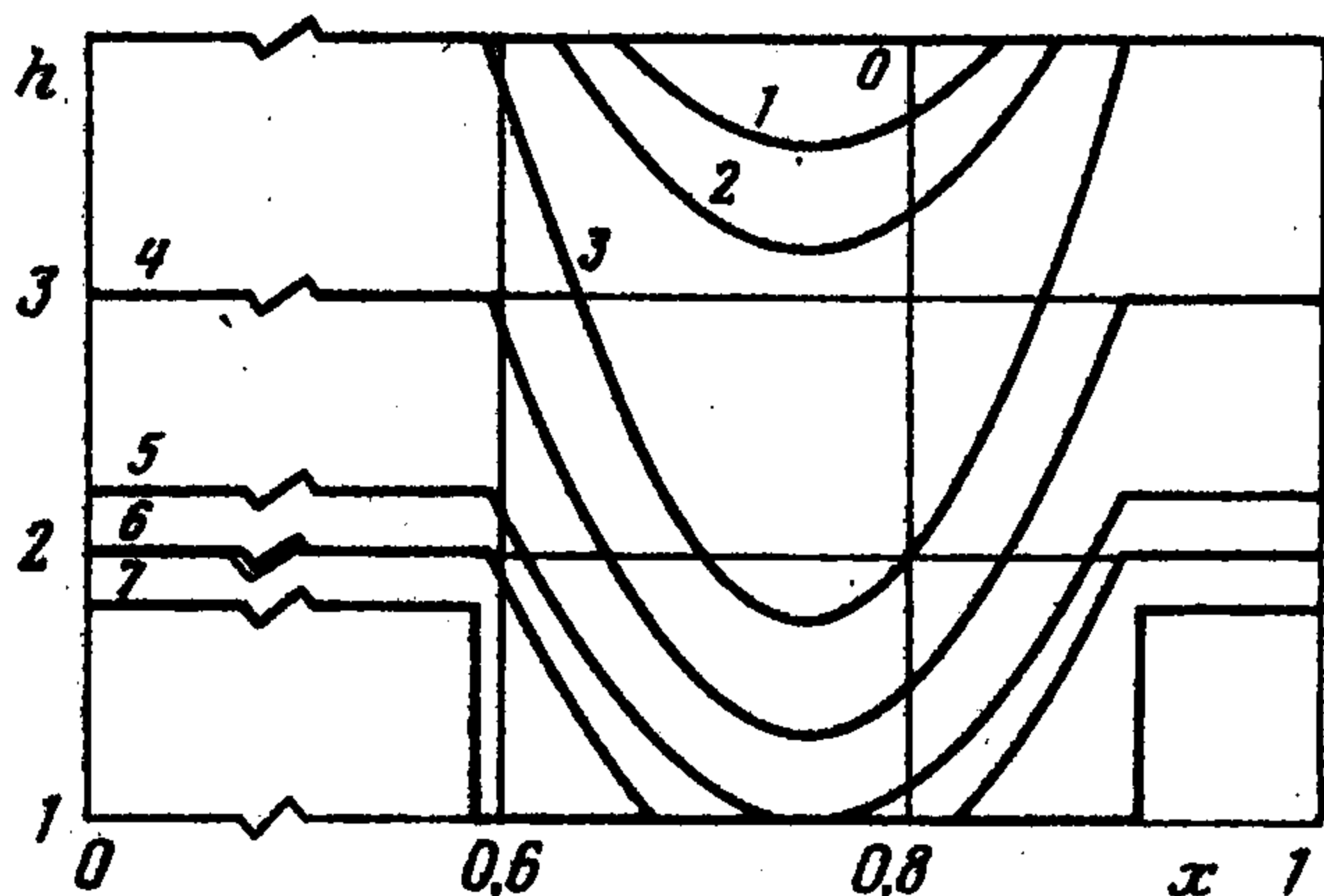
4. Характеристики оптимальных радиальных подшипников, построенных описанным выше способом, даны на фиг. 2. На ней отложены $C_N^0 = C_N / C_{NR}$ и $C_M^0 = C_M / C_{MR}$ с C_{NR} и C_{MR} из (3.4). Так как $C_N \leq C_{NR}$, то $0 \leq C_N^0 \leq 1$. В то же время C_M^0 может превышать единицу, ибо максимальное значение $C_M = 1/6 \approx 0,167$ получается для зазора с $h \equiv 1$, что отвечает ИЗ с $H = 1$. Это дает максимальную величину $C_M^0 \approx 1,161$. На фиг. 2 цифры около кривых или точек – значения H . Все кривые, отвечающие $H \geq h_R = 1,813$, при некотором $C_N^0 \leq 1$ приходят на "оггибающую" E , которая отвечает ИЗ при отсутствии ограничения на h сверху (формально при $H = \infty$, хотя для $C_N^0 > 0$ максимальные значения h вне малой окрестности "начала координат" невелики). Две такие кривые даны для $H = 4$ и $H = 2$. Точки их прихода на оггибающую E помечены цифрами 4 и 2. Выше этих точек соответствующие оптимальные зазоры УКЭН не содержат, т.е. заданные ограничения на h сверху несущественны.



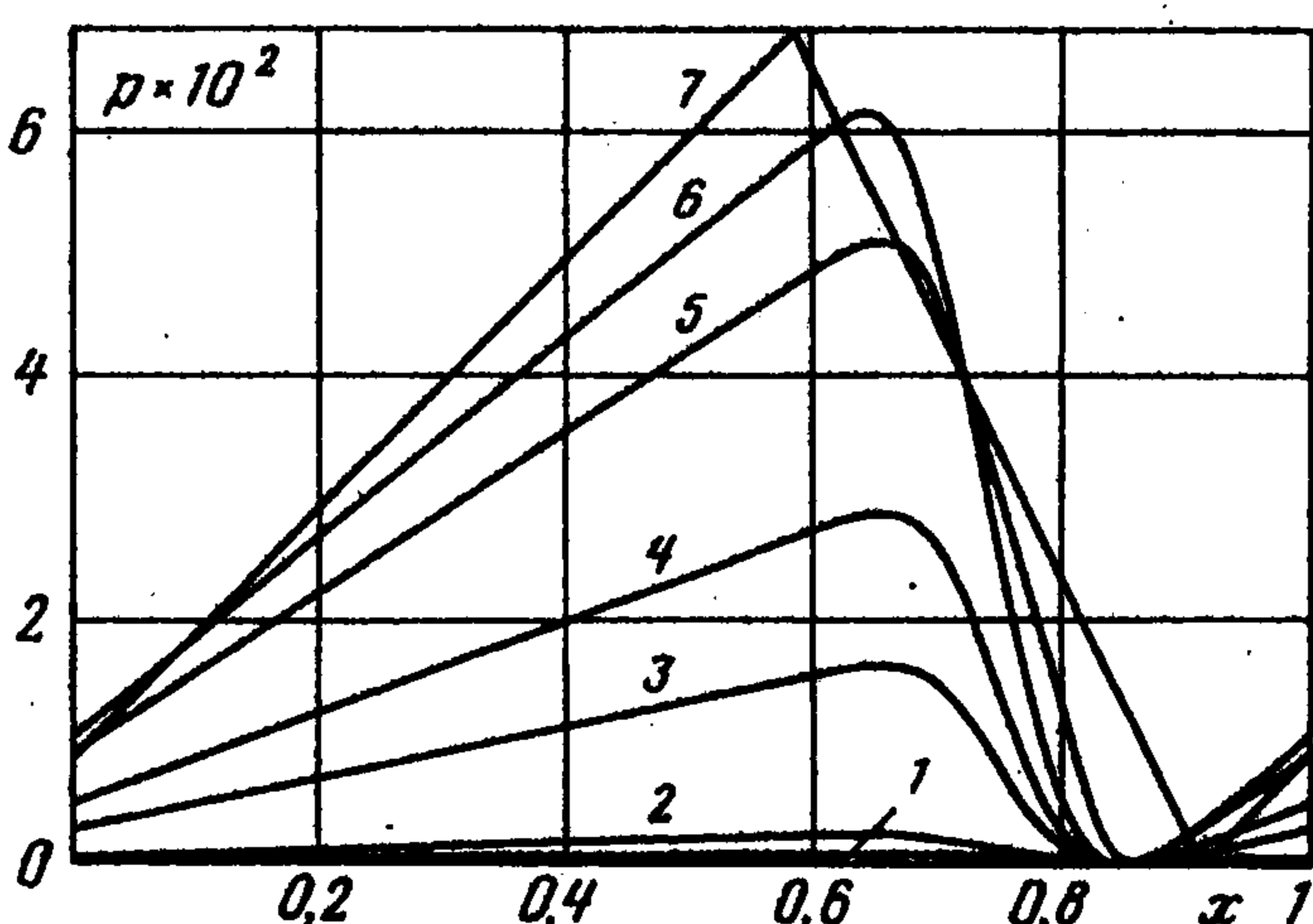
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Ниже точки A на кривой E оптимальные зазоры не содержат УКЭ/1. Точке A отвечает $C_N^0 \approx 0,75$. Следовательно, при $C_N^0 < 0,75$ для решения ИЗ несущественно ограничение на h снизу. Аналогично [11] можно показать, что эта часть огибающей дается "автомодельным" решением, для которого $C_N^0 = k(C_M^0)^2$. Согласно расчетам $k = 1,094$.

Другой тип решений отвечает $H < h_R \approx 1,813$. Соответствующие кривые на огибающую E не приходят, а заканчиваются при $C_M^0 > 1$. На фиг. 2 даны две из них ($H = 1,5$ и $H = 1,2$). Их правые точки отвечают ЗР с дополнительным ограничением $h \leq H < h_R$. Решение такой ЗР дает ступенчатый зазор с $h \equiv 1$ при $x_{d1} < x < x_{d2}$ и с $h \equiv H$ для других x , причем $x_{d1} \rightarrow 0,5$, а $x_{d2} \rightarrow 1$ при $H \rightarrow 1$. Этим решениям отвечают точки штриховой кривой.

Для сравнения оптимальных зазоров с неоптимальными был выбран хорошо известный "эксцентриситетный" радиальный подшипник [1]. Внешние обводы его зазора образованы окружностью с центром, отличным от центра вала (фиг. 1, в). Пусть вал имеет радиус R , эксцентриситет подшипника (смещение центров цилиндров) $e \ll R$, а ось смещения повернута на угол θ_0 . Если l и H – минимальная и максимальная высоты зазора, то

$$h(\theta) = 1 + e[1 + \cos(\theta - \theta_0)], \quad e = (H - 1)/2$$

На фиг. 2 результаты для таких подшипников даны тонкой сплошной кривой. Цифры около точек на ней – значения H . Как видно из фиг. 2, преимущество

оптимальных зазоров с уменьшением C_N^0 увеличивается. Коэффициенты C_M^0 оптимальных и неоптимальных подшипников сравнивались при одинаковых C_N^0 и H . Часть результатов сравнения дана ниже

H	1,2	1,5	2	3	4	5	8	10	20
C_N^0	0,44	0,76	0,88	0,76	0,60	0,48	0,28	0,21	0,08
C_M^0	1,08	1,0	0,95	0,89	0,85	0,80	0,70	0,65	0,49
$\delta C_M^0(\%)$	3,4	4,1	5,6	8	14	20	38	48	79

Здесь δC_M^0 – превышение (в процентах) коэффициента C_M^0 неоптимального подшипника над аналогичным коэффициентом оптимального. Максимальная высота оптимального зазора, удовлетворяя условию $h \leq H$, при $H > 2$ была меньше H . Видно, что δC_M^0 монотонно увеличивается с ростом H . При значениях H , для которых несущая способность эксцентриситетного подшипника близка к своему максимуму ($C_N^0 \approx 0,88$), $\delta C_M^0 = 5,6\%$ и быстро растет с уменьшением C_N^0 , достигая 48 и 79% для $C_N^0 = 0,21$ и 0,08, соответственно.

Оптимальные подшипники имеют зазор простой геометрии, состоящий либо из двух круговых участков постоянной высоты, соединенных двумя участками переменной высоты, либо (при малых C_N) из одного кругового и одного участка переменной высоты. Координаты границ участков разных типов θ_i ($x_i = \theta_i/2\pi$, а $i = 0, a, b, c$ и f) даны на фиг. 3. Схема зазоров, которая поясняет принятые на фиг. 3 и далее обозначения, приведена на фиг. 1, а. На ней участок от 0 до a – УДЭ1 (или УКЭН), от a до b – сужающийся УДЭ2, от b до c – УКЭ1 и от c до f – расширяющийся УДЭ2. Согласно фиг. 1, а $\theta_c - \theta_b$ – угловая протяженность УКЭ1, а $\theta_b - \theta_a$ и $\theta_f - \theta_c$ – угловые протяженности двух УДЭ2.

Фиг. 3, а соответствует огибающей E фиг. 2, фиг. 3, б – $H = 4$, а фиг. 3, в – $H = 1,2$. Соответствующие кривые разных фигур различаются незначительно. Наибольшее различие в них при $C_N^0 \rightarrow 0$, когда становится существенным ограничение на h сверху. Из функций $\theta_i = \theta_i(C_N^0, H)$ сильно зависят от C_N^0 те, которые определяют протяженности УДЭ2 и УКЭ1. Протяженность и расположение УДЭ1 практически постоянны. Середина участка (УКЭ1 или УДЭ2), на котором высота зазора h минимальна, всегда находится при $\theta = 3\pi/2$, а координаты его конца и начала при больших C_N^0 близки к значениям из ЗР: $\theta_a \approx 1,17\pi$ и $\theta_f \approx 1,83\pi$. При $0,75 < C_N^0 \leq 1$ минимальная высота оптимального зазора равна единице, а при $0 < C_N^0 < 0,75$ она превышает единицу, стремясь к H при $C_N^0 \rightarrow 0$.

Фиг. 4 для $H = 4$ показывает эволюцию оптимальных зазоров при переходе от $C_N = 0$ до $C_N = C_{NR}$. Кривые 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 отвечают $C_N^0 = 0, 0,012, 0,035, 0,238, 0,421, 0,748, 0,901$ и 1. Сначала нижнее ограничение не влияет на форму зазора (при $0 < C_N^0 < 0,75$). Кривые 3 и 4 отвечают "автомодельному" решению, для которого несущественны ни нижнее, ни верхнее ограничения на высоту зазора. Если $h(x)$ на них отнести к своей минимальной или максимальной величине, то они совпадут. При $0,75 < C_N^0 < 1$ на форму оптимального зазора влияет только ограничение на h снизу (кривые 5 и 6). Наконец, кривая 7 отвечает ЗР. На фиг. 5 даны распределения давления $p(x)$ для зазоров, построенных на фиг. 4. Наибольшее давление реализуется в ЗР, обеспечивая и наибольшую подъемную силу. Для всех решений ИЗ точка минимума давления всегда находится на расширяющемся в направлении вращения

q	$x_a \times 10^3$	$x_b \times 10^3$	$x_c \times 10^3$	$x_f \times 10^3$	$h_a = h_f$	h_{\min}	$C_N \times 10^2$	$C_M \times 10$
1,21	586	586	914	914	1,81	1,00	1,345	1,441
1,30	592	648	852	908	1,94	1,00	1,282	1,359
1,34	593	670	830	907	2,00	1,00	1,230	1,323
1,35	593	676	824	907	2,03	1,00	1,211	1,310
1,40	594	697	803	906	2,10	1,00	1,144	1,269
1,50	594	742	758	906	2,25	1,00	1,006	1,189
1,60	594	—	—	906	2,40	1,06	0,880	1,110
2,00	594	—	—	906	3,00	1,33	0,566	0,892
1,43	594	719	781	906	2,00	1,00	1,077	1,241
1,47	595	—	—	905	2,00	1,01	1,000	1,203
1,5	595	—	—	905	2,00	1,03	0,940	1,176
1,6	598	—	—	902	2,00	1,14	0,750	1,090
1,8	610	—	—	890	2,00	1,40	0,380	0,943
2,0	—	—	—	—	2,00	2,00	0	0,830

вала УДЭ2 (или его части), а не в точке начала УДЭ1, как в ЗР. Аналогично точка максимума давления всегда находится на сужающемся УДЭ2. На фиг. 5 давление для каждого зазора отсчитывается от своего минимального значения.

Геометрические и силовые характеристики зазоров, дающих решения ИЗ, для которых несущественно ограничение на h сверху, собраны в верхней части таблицы, в которой h_{\min} — минимальная высота зазора ($h_{\min} \geq 1$). Первая ее строка отвечает ЗР. Следующие пять строк относятся к зазорам, для которых существенно ограничение на h снизу. Еще две строки (седьмая и восьмая без координат концов УКЭ1 x_b и x_c) отвечают автомодельному решению, для которого ограничение на h снизу несущественно. В нижней части таблицы собраны данные, полученные для $H = 2$, т.е. результаты, для которых существенно ограничение на h сверху. Они являются продолжением данных, представленных в третьей строке таблицы. В решении, отвечающем ее девятой строке, существенны ограничения на h и снизу, и сверху. Далее до предельного случая $h \equiv H$ с $C_N = 0$, представленного ее последней строкой, ограничение на h снизу несущественно.

В заключение вернемся к вопросу о задании давления в одном из "характерных" сечений радиального подшипника. Как установлено выше, для радиального подшипника с замкнутым основанием подобная фиксация давления излишня и в ЗР, и в ИЗ. Хотя в [6–9] при решении ЗР давление в одном из сечений считалось фиксированным, это не приводило и не могло привести к каким-либо ошибкам (обнаруженное в [9] "второе" оптимальное решение, как отмечалось выше, — результат недоразумения). Сказанное, разумеется, не исключает технических решений с подачей смазки (например, для поддержания уровня давления, исключающего кавитацию) через "питающие канавки" в основании подшипника в тех или иных сечениях зазора. При такой подаче, однако, давление в них лучше не задавать априори, а брать из решения соответствующей вариационной задачи.

Введение любых дополнительных ограничений, сужая множество возможных решений, не улучшает оптимизируемой характеристики, делая ее, как правило, хуже, чем в исходной задаче. Такая ситуация будет иметь место, например, при задании "погонной" (приходящейся на единицу длины вала) массы смазки в зазоре — m . Поскольку в прямых задачах расчета течения в замкнутых радиальных подшипниках данная возможность рассматривается [1], решение вариационных задач с фиксированным m представляет определенный интерес. Пусть ν — постоянный множитель Лагранжа, вводящий в функционал Лагранжа J интегральное представление для m , а m_0 — значение m , получающееся в исходной вариационной задаче. Тогда, не вдаваясь в подробности, можно показать, что наилучшее значение оптимизируемого функцио-

нала, отвечающее $m = m_0$, получится при $v = 0$. Отметим, наконец, что решения, полученные для радиального подшипника бесконечной протяженности в направлении его оси, интересны не только в теоретическом отношении. Их применение вполне оправдано в радиальных подшипниках конечной длины с затрудненным (в идеале – нулевым) осевым растеканием смазки. Последнее можно обеспечить использованием боковых шайб и уплотнений [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01825 и 96-15-96158).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. *Лучин Г.А., Пешти Ю.В., Снопов А.И.* Газовые опоры турбомашин. М.: Машиностроение, 1989. 238 с.
3. *San Andres L.* Thermodynamic analysis of fluid film bearings for cryogenic applications // J. Propulsion and Power. 1995. V. 11. № 5. P. 964–972.
4. *Rayleigh Lord.* Notes on the theory of lubrication // Phil. Mag. 1918. V. 35. № 1. P. 1–12.
5. *Hamrock B.J., Anderson W.J.* Rayleigh Step Journal Bearing. Pt II – Incompressible Fluid // Trans. ASME. SER. F. J. Lubr. Technol. 1969. V. 91. № 4. P. 641–650. = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1969. Т. 91. № 4. С. 53–62.
6. *Maday C.J.* The maximum principle approach to the optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 3. P. 482–489 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1970. Т. 92. № 3. С. 111–119.
7. *Rohde S.M.* A Demonstrably optimum one dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 2. P. 188–192 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 2. С. 89–93.
8. *McAllister G.T., Rohde S.M.* Optimum design of one-dimentional journal bearings // J. Optimiz. Theory Appl. 1983. V. 41. № 4. P. 599–617.
9. *Болдырев Ю.Я., Слесарев М.Е.* Одномерный радиальный газовый подшипник с максимальной несущей способностью // Машиноведение. 1987. № 4. С. 97–103.
10. *Rohde S.M.* The optimum slider bearing in terms of friction // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 3. P. 275–279 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 3. С. 82–87.
11. *Крайко А.Н.* Изопериметрическая задача о профилировании оптимального зазора бесконечного плоского ползуна // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 222–233.

Москва

Поступила в редакцию

25.V.1998