УДК 532.593:534.1

© 1999 г. Х.В. Оганесян, А.М. Тер-Крикоров

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ВИХРЕВОЙ НИТЬЮ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ

Изучаются внутренние волны, возникающие в идеальном равномерно стратифицированном газе под воздействием вертикальной вихревой нити. Для случая достаточно медленных движений, когда можно пренебречь акустическими колебаниями по сравнению с колебаниями плавучести, задача сводится к решению смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в частных производных. Находится стационарное решение и в линейном приближении доказывается его неустойчивость.

1. Основное дифференциальное уравнение. Пусть равномерно стратифицированный идеальный газ заполняет трехмерное пространство. Ось z цилиндрической системы координат r, θ, z направлена противоположно силе тяжести. Рассматривается движение газа, симметричное относительно оси z. Для достаточно медленных движений, когда изменения скорости звука a в жидкой частице малы по сравнению с a, уравнение неразрывности берется в том же виде, как для несжимаемой жидкости. В положении равновесия энтропия постоянна на горизонтальных плоскостях и возрастает с увеличением высоты. Для жидкой частицы, находящейся в момент времени t в точке с координатами (r, θ, z), однозначно определено расстояние $\zeta(r, t, z)$ этой частицы в положении равновесия до фиксированной горизонтальной плоскости. Функция $\zeta(r, t, z)$ сохраняется в частице. Величина $w = z - \zeta(r, t, z)$ задает отклонение по вертикали жидкой частицы от положения равновесия.

Рассматривается класс движений жидкости, для которого радиальная скорость $v_r = 0$, а вертикальное отклонение от положения равновесия и скорость звука зависит только от r и t. Так как энтропия в частице сохраняется, то $p = \alpha(\zeta(r, t, z))\rho^{\varkappa}$, где p – давление, ρ – плотность, $\varkappa = c_p/c_v$, функция $\alpha(\zeta)$ задает распределение энтропии в положении равновесия. Квадрат частоты Брента–Вяйсяля $N^2 = g\alpha'(\zeta)/\varkappa\alpha(\zeta)$ в равномерно стратифицированном газе имеет постоянное значение, g – ускорение силы тяжести.

При сделанных предположениях уравнения движения принимают вид [1]

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial t} = 0$$
$$p = \alpha(z - w(r,t))\rho^{\varkappa} \tag{1.1}$$

Преобразуем систему уравнений (1.1). В рассматриваемом случае рассуждения, приведенные ранее [2], упрощаются. Из третьего уравнения следует, что rv_θ – произвольная функция r. В частности, при $rv_\theta = \Gamma/(2\pi)$ получается вертикальная вихревая нить. Если воспользоваться четвертым уравнением, то первые два уравнения принимают вид

$$\frac{v_\theta^2}{r}=\frac{AN^2}{g}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial A}{\partial r},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+g=\frac{N^2 A}{g},\quad A=\frac{a^2}{\varkappa-1} \tag{1.2}$$

После исключения функции A из системы уравнений (1.2) и замены переменных

$$w=\frac{g}{N^2}W,\quad Nt=\tau,\quad u=-\frac{N^2}{g^2}\int\limits_{+\infty}^{r}\frac{v_\theta^2(x)}{x}dx \tag{1.3}$$

уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}+W+u\right)+\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.4}$$

Предполагается, что интеграл в формуле (1.3) сходится. Заметим, что уравнение (1.4) не зависит от вида функции v_θ. Стационарным решением уравнения (1.4) является $W_0=-u$.

2. Исследование линейной неустойчивости стационарного решения. Полагая в уравнении (1.4)

$$W=-u+e^u\omega(u,\tau)$$

и оставляя после подстановки только линейные члены относительно ω, получаем линейное уравнение для возмущений

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2}+\omega\right)+\omega=0 \tag{2.1}$$

В начальный момент $\tau=0$ задаются вертикальные отклонения и вертикальные скорости. Поскольку значению переменной $u=0$ соответствует $r=\infty$, а на бесконечности нет возмущений, то при $u=0$ функция ω обращается в нуль. Имеем

$$\omega(u,0)=\omega_0(u),\quad \frac{\partial\omega}{\partial\tau}(u,0)=\omega_1(u),\quad \omega(0,\tau)=0 \tag{2.2}$$

где $\omega_0(u)$, $\omega_1(u)$ – заданные функции.

Применяя для решения задачи (2.1), (2.2) преобразование Лапласа по времени, получаем для трансформанты Лапласа $\omega^*(u,p)$ задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, решение которой имеет вид

$$\omega^*=\frac{1}{1+p^2}\int\limits_0^u(p\omega_0(v)+\omega_1(v))\exp\left(-\frac{u-v}{1+p^2}\right)dv$$

Переходя к оригиналам и применяя теорию вычетов, получаем

$$\begin{gathered}\omega(u,\tau)=-\int\limits_0^u\left(\frac{\partial^2 G(u-v,\tau)}{\partial u\partial t}\omega_0(v)+\frac{\partial G(u-v,\tau)}{\partial u}\omega_1(v)\right)dv\\ G(u,\tau)=-\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{C(i)}\exp\left(p\tau-\frac{u}{1+p^2}\right)dp\right)\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $C(i)$ – окружность радиуса меньше единицы с центром в точке i.

Из формул (2.3) следует, что поведение функции $\omega(u,\tau)$ определяется поведением функции Грина $G(u,\tau)$. Раскладывая функцию $1/(1+p^2)$ на элементарные дроби, делая замену переменной интегрирования $\zeta = p - i$ и полагая

$$\beta = \sqrt{2u\tau e}^{-i\pi/4}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{u}{2\tau}}e^{-i\pi/4} \tag{2.4}$$

представим функцию $G(u, \tau)$ в виде

$$G(u,\tau) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\alpha e^{i\pi - u/4}\left(\int\limits_{C(0)} \Phi_1(\zeta,\beta)\Phi_2(\zeta,\alpha)d\zeta\right)$$

$$\Phi_1(\zeta,\beta) = \exp\left(\frac{\beta}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right), \quad \Phi_2(\zeta,\alpha) = \exp\left(\frac{u\alpha\zeta/(2i)}{4(1+\alpha\zeta/(2i))}\right)$$

Воспользовавшись производящими функциями для полиномов Лагерра и функций Бесселя, получаем

$$G(u,\tau) = \operatorname{Im}(2ie^{i\tau - u/4}\alpha J_1(\beta)) + \operatorname{Im}\left(e^{i\tau - u/4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(2i)^{n-2}}J_n(\beta)\left(L_{n-1}\left(\frac{u}{4}\right) - L_{n-2}\left(\frac{u}{4}\right)\right)\right)$$

Функцию Грина можно записать в вещественном виде, используя функции Кельвина $\mathrm{ber}_n(x)$ и $\mathrm{bei}_n(x)$. Если время t фиксировано, а $u \to 0$, то, воспользовавшись тем, что при $\beta \to 0$ справедливо асимптотическое равенство $J_1(\beta) \approx \beta/2$, получаем, что $G(u, \tau) \approx \sin\tau$.

Если параметр $u\tau \to \infty$, то, воспользовавшись асимптотической формулой для $J_1(z)$, получаем

$$J_1(\sqrt{2u\tau e}^{-i\pi/4}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi i}(2u\tau)^{1/4}}\exp\left(\sqrt{u\tau} - i\frac{3\pi}{8} + i\sqrt{u\tau}\right)$$

Подставляя это выражение в формулу для $G(u, \tau)$, получаем главный член асимптотического представления в виде

$$G(u,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(u\tau)^{3/4}}\exp\left(\sqrt{u\tau} - \frac{u}{4}\right)\cos\left(\tau + \sqrt{u\tau} - \frac{5\pi}{8}\right)$$

Из этой формулы следует, что при $u\tau \to \infty$ амплитуда колебаний стремится к бесконечности, что свидетельствует о неустойчивости состояния равновесия жидкости со стационарной вихревой нитью. При малых значениях частоты Брента–Вяйсяля и на больших расстояниях от вихревой нити неустойчивость развивается медленно, и только на достаточно больших временах простые гармонические колебания сменяются колебаниями с растущей амплитудой. Представляет интерес исследование устойчивости равновесия в нелинейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Крикоров А.М.* Вихри и внутренние волны в стратифицированной жидкости // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 599–606.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 560 с.

Долгопрудный, Моск. обл.

Поступила в редакцию
15.I.1998