

УДК 532.526

© 1999 г. С.И. Чернышенко

НЕЛИНЕЙНОЕ РАЗВИТИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СРЫВА В ОСЕВОМ КОМПРЕССОРЕ ПРИ РАСХОДЕ, БЛИЗКОМ К КРИТИЧЕСКОМУ

В рамках модифицированной модели Мура–Грейтцера рассматривается развитие вращающегося срыва (ВС) при расходе, близком к критическому значению, при котором происходит зарождение ВС. Выводится уравнение Ландау для амплитуды первой моды. Теория приложена к описанию экспериментального лабораторного компрессора, использованного в Массачусетском технологическом институте для исследования ВС. Установлено, что рассмотренный компрессор нетипичен в том смысле, что характер возбуждения ВС в нем в некотором смысле промежуточный между жестким и мягким; точнее, незначительное изменение параметров компрессора, лежащее в пределах погрешности измерений, может привести к смене типа возбуждения.

Вращающийся срыв (ВС) представляет собой особый вид гидродинамической неустойчивости течения в компрессоре. Развитие этой неустойчивости приводит к возникновению режима течения, при котором обтекание группы лопаток ротора и (или) статора становится отрывным, причем на лопатках с одной стороны этой группы с течением времени отрыв исчезает, а с другой появляется, так что в целом область с отрывным характером обтекания лопаток вращается вокруг оси компрессора [1].

В результате появления активно стабилизированных компрессоров [2] было обнаружено, что, несмотря на большую сложность течения (сложная, меняющаяся во времени геометрия компрессора, существенно нестационарный в среднем и турбулентный характер течения в целом, наличие отрыва) зарождение ВС во многих случаях можно адекватно описать в рамках сравнительно простых моделей, основанных по существу на предельном переходе по числу лопаток, стремящемуся к бесконечности (обзор подобных моделей дан в [3]). Такие модели используют эмпирическую информацию о характеристиках компрессора в отсутствие ВС для предсказания момента его возникновения. Прямыми измерениями на компрессоре, ВС в котором был предотвращен с помощью системы активного управления, была получена необходимая эмпирическая информация, построена линейная теория устойчивости и вычислен критический расход, при котором возникает ВС, найдены фазовые скорости и инкременты нарастания нескольких мод [2].

Если расход в точности равен критическому, то согласно линейной теории амплитуда нейтрального возмущения будет оставаться постоянной. В действительности относительно слабые нелинейные эффекты будут приводить к медленному изменению амплитуды и поэтому должны быть учтены. Это справедливо и для значений расхода, столь мало отличающихся от критического, что скорость изменения амплитуды возмущений, вычисленная по линейной теории, оказывается одного порядка со скоростью ее изменения за счет слабых нелинейных эффектов. Изучение поведения системы в описанных условиях является предметом так называемой слабо-нелинейной теории устойчивости. Оказывается, что при довольно общих предположениях уравнение, описывающее изменение амплитуды возмущения, имеет универсальный вид независимо от природы рассматриваемой физической системы. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с кубической нелинейностью в правой части, называемое уравнением Ландау ([4], § 26) содержит всего два коэффициента, которые зависят от параметров конкретной физической системы. Основным результатом вычисления этих коэффициентов оказывается возможность определить, будет ли потеря устойчивости жесткой или мягкой, т.е. понять, будет ли амплитуда в установившемся режиме

малой или сразу конечной при значениях расхода, лишь немногим меньших критического (течения с расходом, большим критического, устойчивы) и соответственно будет ли иметь место гистерезис ВС при изменениях расхода.

Цель работы – получение общих формул для коэффициентов уравнения Ландау в рамках описанной ниже модифицированной модели Мура–Грейтцера [2,3] и приложение этих формул к случаю конкретного лабораторного компрессора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в компрессоре с короткими лопатками, длина которых много меньше радиуса роторов и статоров, с цилиндрическими втулкой и кожухом мало отличающихся диаметров. При этом можно пренебречь зависимостью параметров от расстояния до оси вращения и рассматривать двумерное течение, зависящее только от осевой и окружной координат.

Будем использовать модифицированную модель Мура–Грейтцера, которая состоит в следующем [2, 3]. Область течения разбивается на три части: входной канал, область, занятую неподвижными и движущимися лопатками, и выходной канал. Во входном и выходном каналах течение считается невязким и описывается уравнениями Эйлера. Течение в области лопаток описывается с помощью полуэмпирической модели, связывающей перепад давлений между выходом и входом в область лопаток с осевой компонентой скорости

$$p_{\text{out}} - p_{\text{in}}^* = \psi(\varphi) - s - r - v \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\sigma(\varphi) \frac{\partial s}{\partial t} = S(\varphi) - s \quad (1.2)$$

$$\tau(\varphi) \left(\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = R(\varphi) - r \quad (1.3)$$

Здесь $p_{\text{out}}(\theta, t)$ – статическое давление на выходе из области лопаток, $p_{\text{in}}^*(\theta, t)$ – давление торможения на входе в область лопаток, $\varphi(\theta, t)$ – осевая скорость на входе и выходе из нее (эти скорости одинаковы в силу закона сохранения массы), $\psi(\varphi)$ – идеализированная характеристика компрессора, разность статического давления на выходе и полного давления на входе в стационарном режиме в отсутствие потерь и ВС; s и r – потери полного давления в статорах и роторах, v и μ – постоянные параметры, характеризующие инерцию жидкости в роторах и во всей области, занятой лопатками, соответственно; σ и τ – характерные времена запаздывания потерь в статорах и роторах соответственно, t – время, θ – окружной угол. Все величины приведены к безразмерному виду с помощью не снижающего общности предположения, что средний радиус проточной части, окружная скорость лопаток роторов и плотность жидкости равны единице.

Функции $\psi(\varphi)$, $S(\varphi)$ и $R(\varphi)$ представляют собой характеристики компрессора, работающего в стационарном режиме. В последующем анализе они предполагаются заданными, так же как и значения постоянных v и μ . Кроме того, принимается, что $\sigma(\varphi)$ и $\tau(\varphi)$ прямо пропорциональны времени прохождения частицы жидкости сквозь межлопаточный канал, т.е. $\sigma(\varphi) = k_{\sigma}/\varphi$ и $\tau(\varphi) = k_{\tau}/\varphi$, причем постоянные $k_{\sigma} > 0$ и $k_{\tau} > 0$ (вообще говоря, различные) тоже предполагаются заданными.

Физический смысл этой эмпирической модели прост. Уравнение (1.2) описывает запаздывание потерь в статорах при изменении осевой скорости. Запаздывание потерь в роторах описывается уравнением (1.3), в котором производные по θ появились в результате перехода от вращающейся вместе с роторами к неподвижной системе отсчета. По этой же причине производные по θ появляются и в уравнении (1.1), в котором члены с производными по θ и t описывают перепад давления, возникающий в результате ускорения жидкости при изменении осевой скорости.

Течения в трех областях сшиваются на границах между ними с помощью условий

непрерывности давления и осевой скорости. Кроме того, на выходе из области лопаток в результате спрямляющего действия лопаток последнего статора окружная компонента скорости становится равной нулю. Это условие тоже задается в качестве граничного для течения в выходном канале.

Для простоты предположим, что входной и выходной каналы простираются до бесконечности вверх и вниз по потоку. Далеко вверх по потоку заданы постоянные осевая и окружная компоненты скорости (окружная равна нулю) и давление. Далеко вниз по потоку достаточно потребовать выхода всех характеристик на постоянные значения.

Все параметры, естественно, должны быть периодическими функциями θ с периодом 2π .

Уравнения Эйлера с указанными граничными условиями на бесконечности, условиями сшивки и соотношениями (1.1)–(1.3) представляют собой замкнутую математическую модель, в рамках которой проводится весь последующий анализ. Заметим, что соотношения (1.1)–(1.3) и условие нулевой окружной компоненты скорости на выходе из области лопаток можно рассматривать как специфические условия на некотором разрыве в потоке идеальной жидкости.

Рассматриваемая система имеет стационарное решение, в котором $\varphi = \varphi_s = \text{const}$. Нестационарное решение в силу периодичности по θ можно представить в виде ряда Фурье

$$\varphi = \varphi_s + \sum_{n \neq 0} A_n(t) e^{in\theta}, \quad A_n(t) = \bar{A}_{-n}(t) \quad (1.4)$$

В линейном приближении все $A_n(t) = C_n \exp \lambda_n t$. При реальных характеристиках компрессора в (1.1)–(1.3) действительная часть всех λ_n отрицательна при φ_s , больших некоторого критического значения φ_c . При уменьшении φ_s сначала, при $\varphi_s = \varphi_c$, теряет устойчивость мода с $n = 1$, а затем и остальные моды в порядке возрастания n [2,3].

Перечисленные свойства означают, что рассматриваемая система удовлетворяет всем требованиям применимости общей теории Ландау ([4], § 26). Поэтому при расходах, близких к критическому, и малых амплитудах возмущений амплитуда первой моды удовлетворяет уравнению Ландау

$$d|A_1|/dt = \text{Re} \lambda_1 |A_1| + K |A_1|^3 \quad (1.5)$$

Задача состоит в выводе этого уравнения путем асимптотического анализа при $\varphi_s \rightarrow \varphi_c$, $A_n \rightarrow 0$ и приложении полученного результата к конкретному компрессору для определения характера возбуждения в нем ВС.

Подчеркнем, что рассматривается случай фиксированного расхода через компрессор при постоянной скорости движения лопаток ротора. Взаимодействие компрессора с другими частями двигателя или гидравлической цепи, на которую работает компрессор, может приводить к колебательным и гистерезисным явлениям других типов, например к помпажу и гистерезису помпажа.

2. Возмущения малой амплитуды. В соответствии с принятой постановкой задачи течение во входном канале описывается уравнениями Эйлера. Более того, так как далеко вверх по потоку заданы однородные граничные условия, т.е. равенство завихренности нулю, то это течение потенциальное. На входе в лопатки осевая скорость течения в соответствии с условием сшивки равна $\varphi(t, \theta)$. С такими граничными условиями уравнения потенциального течения легко решить методом разделения переменных, и с помощью интеграла Коши–Лагранжа выразить [2, 3] давление торможения на входе в лопатки через коэффициенты разложения φ в ряд Фурье (1.4) ($A'(t) = dA/dt$):

$$p_{in}^* = p_{-\infty}^* - \sum_{n \neq 0} A'_n(t) e^{in\theta} / |n| \quad (2.1)$$

Эта формула справедлива при любой амплитуде возмущений.

Течение в выходном канале также описывается уравнениями Эйлера, но это течение не является потенциальным. Однако так как на выходе из лопаток заданы как величина, так и направление скорости, что и требуется для однозначного определения решения уравнений Эйлера, давление на выходе из лопаток тоже можно выразить через коэффициенты Фурье функции φ . Соответствующая формула была получена в линейном приближении многими авторами (см. [3]), а с точностью до членов третьего порядка по амплитуде – в [5]. Более точно, эта формула имеет порядок точности ε^3 , если амплитуда возмущений имеет порядок ε , а характерное время ее изменения имеет порядок ε^{-2} . Именно такой порядок характерного времени вытекает из (1.5) при $\varphi_s - \varphi_c \sim \varepsilon^2$, т.е. при $\text{Re } \lambda_1 \sim \varepsilon^2$. После соответствующей перенормировки эта формула принимает вид

$$P_{\text{out}} - P_{+\infty} = \sum_{n \neq 0} \left(A'_n / |n| + \sum_{k+l=n} \pi_{kl}(V/\varphi_s) A_k A_l + \right. \\ \left. + \sum_{j+k+l=n} \pi_{jkl}(V/\varphi_s) A_j A_k A_l / \varphi_s + \dots \right) e^{in\theta} \quad (2.2)$$

Здесь V – безразмерная фазовая скорость распространения нейтрального возмущения по линейной теории. Были приведены [5] формулы для вычисления π_{kl} и π_{jkl} и графики нескольких из этих коэффициентов в рассматриваемом в настоящей статье случае нулевой окружной компоненты скорости на выходе из последнего статора ($k_1 = 0$ в принятых ранее обозначениях [5]).

Формулы (1.1)–(1.3), (2.1) и (2.2) образуют систему, достаточную как для исследования линейной устойчивости, так и для вывода уравнения (1.5), описывающего нелинейное поведение амплитуды при расходе, близком к критическому. Линейная устойчивость рассматриваемой системы была изучена ранее [2].

Представив коэффициенты Фурье в виде $A_n = \varepsilon e^{\lambda_n t}$, $\varepsilon \ll 1$, и удерживая в (1.1)–(1.3), (2.1) и (2.2) линейные по ε члены, получим кубическое характеристическое уравнение относительно λ_n

$$D_n(\lambda_n, \varphi_s) = -\left(\frac{2}{|n|} + \mu\right)\lambda_n + \psi'(\varphi_s) - in\nu - \frac{S'(\varphi_s)}{1 + \sigma(\varphi_s)\lambda_n} - \frac{R'(\varphi_s)}{1 + \tau(\varphi_s)(\lambda_n + in)} = 0 \quad (2.3)$$

Для нейтральных возмущений $\lambda_n = -inV$, где V – фазовая скорость нейтральной волны. При обычно выполняющихся условиях $\mu > \nu > 0$, $S' < 0$, $R' < 0$ из (2.3) следует $0 < V < 1$. Для реалистичных параметров модели два корня (2.3) всегда имеют отрицательную действительную часть, и существует такое критическое значение расхода φ_c , при котором действительная часть третьего корня обращается в нуль, причем стационарное решение неустойчиво при расходах, меньших критического.

3. Слабо-нелинейная теория устойчивости. Рассмотрим случай, когда при уменьшении φ_s первой теряет устойчивость мода с $n = 1$. Перейдем в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью V нейтральной волны, положив

$$y = \theta - Vt, \quad \varphi = \varphi_s + \sum_{n \neq 0} B_n(t) e^{iny}$$

При этом $B_n = A_n e^{inVt}$, и так как $dA_1/dt = \lambda_1(\varphi_s)A_1$, а $\lambda_1(\varphi_c) = -iV$, то

$$dB_1/dt = (\lambda_1(\varphi_s) - \lambda_1(\varphi_c))B_1 + \dots \quad (3.1)$$

Пусть теперь не только амплитуда возмущения имеет порядок $\varepsilon \ll 1$, но и значение расхода настолько близко к критическому, что $\varphi_s - \varphi_c \sim \varepsilon^2$. Тогда правая часть (3.1) будет иметь порядок ε^3 . Следовательно, в рассматриваемом случае для того, чтобы правильно описать эволюцию амплитуды возмущения, необходимо удерживать не

только линейные, но и квадратичные и кубичные члены. При этом в уравнение для B_1 входят коэффициенты B_n с $n \neq 1$. Хотя, как следует из общих соображений [4], в уравнение Ландау (1.5) квадратичные члены не входят, их необходимо учитывать в промежуточных выкладках наряду с членами третьего порядка. Промежуточные выкладки очень громоздки и не представляют самостоятельного интереса, а потому здесь опущены. Их общая схема такова: представить s и r в (1.2)–(1.3) их рядами Фурье и выразить затем коэффициенты этих рядов через B_n , удерживая члены до третьего порядка включительно. Затем подставить полученные выражения в (1.1), собрать члены при одинаковых степенях $e^{i\theta}$ и удержать главные члены по ε . Окончательный результат для $n = 1$ и $n = 2$ можно записать следующим образом:

$$\left(2 + \mu - \frac{\tau R'}{(1 + i(1 - V)\tau)^2} - \frac{\sigma S'}{(1 - iV\sigma)^2}\right) \frac{dB_1}{dt} = D'_{1\varphi}(-iV, \varphi_c)(\varphi_s - \varphi_c)B_1 +$$

$$+(\psi'''/2 - \Pi_3 - W_1)B_{-1}B_1^2 + (\psi'' - \Pi_2 - W_2)B_{-1}B_2$$

$$B_2 = -B_1^2(\psi''/2 - \pi_{1,1} - W_3)/D_2(-2iV, \varphi_c)$$
(3.2)

Здесь

$$\Pi_2 = \pi_{-1,2} + \pi_{2,-1}, \quad \Pi_3 = \pi_{-1,1,1} + \pi_{1,-1,1} + \pi_{1,1,-1}$$

$$W_k = L_k[V\sigma, S] + L_k[(V - 1)\tau, R], \quad k = 1, 2, 3$$

$$L_1[\gamma, Q(\varphi)] = \frac{1}{1 - i\gamma} \left[\frac{Q'''(\varphi)}{2} - \frac{i\gamma Q''(\varphi)}{(1 - 2i\gamma)\varphi} - \left(\frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2} - \frac{i\gamma}{(1 - i\gamma)(1 - 2i\gamma)} \right) \frac{Q'(\varphi)}{\varphi^2} \right]$$

$$L_2[\gamma, Q(\varphi)] = \frac{1}{1 - i\gamma} \left[Q''(\varphi) + \left(\frac{i\gamma}{1 + i\gamma} - \frac{2i\gamma}{1 - 2i\gamma} \right) \frac{Q'(\varphi)}{\varphi} \right]$$

$$L_3[\gamma, Q(\varphi)] = \frac{1}{1 - 2i\gamma} \left[\frac{Q''(\varphi)}{2} - \frac{i\gamma Q'(\varphi)}{(1 - i\gamma)\varphi} \right]$$

причем τ, σ, R, S, ψ и их производные вычисляются при $\varphi = \varphi_c$. Напомним, что τ и σ имеют вид const/φ .

Исключив B_2 из этих уравнений, получим уравнение относительно B_1 , имеющее вид

$$dB_1/dt = a(\varphi_s - \varphi_c)B_1 + bB_1^2 B_{-1}$$

Коэффициенты a и b легко вычисляются из предыдущей формулы и не приведены здесь для краткости. Разумеется, как и следовало ожидать из вида (3.1), $a = d\lambda_1/d\varphi$ при $\varphi = \varphi_c$. Главная мода имеет в действительности вид $B_1 e^{iy} + B_{-1} e^{-iy}$, причем $B_{-1} = \bar{B}_1$. Пусть $B_1 = |B_1| e^{iY}$, т.е. $|B_1|$ и Y — действительные амплитуда и фаза. Тогда

$$d|B_1|/dt = (\text{Re } a)(\varphi_s - \varphi_c)|B_1| + (\text{Re } b)|B_1|^3$$
(3.3)

$$dY/dt = (\text{Im } a)(\varphi_s - \varphi_c) + (\text{Im } b)|B_1|^2$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Ландау (1.5), поскольку $|B_1| = |A_1|$. Из второго следует, что в невращающейся системе отсчета точки стационарной фазы двигаются со скоростью

$$V - dY/dt = V - (\text{Im } a)(\varphi_s - \varphi_c) - (\text{Im } b)|B_1|^2$$
(3.4)

Так как в реальных компрессорах всегда $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} d\lambda_1/d\varphi < 0$, т.е. неустойчивость наступает при уменьшении расхода, то, как следует из полученного уравнения (3.3), возбуждение ВС носит жесткий характер при $\operatorname{Re} b > 0$ и мягкий при $\operatorname{Re} b < 0$.

4. Численные расчеты и проверка правильности полученных формул. Так как промежуточные выкладки оказались весьма громоздки, требуется независимая проверка результата. Эта проверка была проведена следующими способами. Выкладки, проведенные вручную, были затем повторены с помощью системы компьютерных аналитических вычислений. Результаты совпали. Затем были проведены численные расчеты в системе отсчета t, θ , чтобы избежать по возможности параллелизма с аналитическими вычислениями, проведенными в системе t, y . Искомые функции s, r и φ были представлены их разложениями в ряды Фурье ((1.4) и аналогично для r и s), в которых удерживались лишь члены с $|n| < 3$. Действительно, как видно из (3.2), для проверки результатов слабо-нелинейной теории достаточно учесть лишь эти моды. Однако при интерпретации численных результатов надо конечно иметь в виду, что при большой амплитуде возмущений требуется учитывать и моды с более высокими номерами. Кроме того, с целью дополнительного упрощения в численных расчетах не учитывалась нелинейность отклика выходного канала компрессора на изменения осевой скорости, т.е. коэффициенты π_{kl} и π_{jkl} в (2.2) были положены равными нулю. Впрочем, как оказалось, для конкретного примера, рассматриваемого ниже, учет нелинейности в выходном канале не приводит к существенным изменениям результата.

Необходимо еще отметить, что в то время как φ_s (нулевой коэффициент Фурье для функции φ) постоянен, нулевые коэффициенты Фурье для r и s зависят от времени, что было учтено как при аналитических выкладках, так и в численных расчетах.

Результаты как численных расчетов, так и аналитических формул можно представить в виде зависимости амплитуды $|A_1| = |B_1|$ в стационарном по амплитуде режиме от средней осевой скорости φ_s . Аналитический результат дает эту зависимость, если в (3.3) положить $d|B_1|/dt = 0$. В результате получаются прямая $|B_1| = 0$ и парабола $\varphi_s = \varphi_c - (\operatorname{Re} b / \operatorname{Re} a) |B_1|^2$. В случае если некий режим со стационарной амплитудой устойчив, его можно получить путем прямого численного моделирования. Для этого система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная из (1.1)–(1.3) путем подстановки рядов Фурье для неизвестных функций и отбрасывания коэффициентов с $|n| > 2$, решалась при заданном φ_s численно до выхода на установление по амплитуде.

В случае если стационарный по амплитуде режим неустойчив, рассчитать его описанным прямым методом нельзя. Вместо этого вычисления были организованы следующим образом. Задавая амплитудой всех мод в начальный момент времени, можно произвести расчет до некоторого момента $t = T$. Амплитуда $|A_1|_{t=T}$ первой моды в момент T будет функцией φ_s и начальных условий, в том числе и амплитуды $|A_1|_{t=0}$. В искомом стационарном режиме должно быть $\Delta|A_1| = |A_1|_{t=T} - |A_1|_{t=0} = 0$. Решая численно (например методом хорд) уравнение $\Delta|A_1|(\varphi_s) = 0$ относительно неизвестного φ_s , можно найти значение φ_s , отвечающее данному $|A_1|$. Описанный подход носит приближенный характер, так как результат расчета зависит от начальных условий для других мод и для фазы первой моды. Заметим, однако, что в условиях применимости слабо-нелинейной теории устойчивости моды с $|n| = 1$ связаны приближенно соотношениями, соответствующими нейтральному линейному решению, т.е. решению линеаризованной задачи при $\varphi_s = \varphi_c$, а все остальные моды имеют существенно меньшую величину. Оказалось, что если задавать начальные условия с учетом сказанного, то результаты расчетов очень слабо зависят от имеющегося произвола в выборе начальных условий (в расчетах было принято $T = 50$).

Подчеркнем, что все результаты и выводы настоящей работы вытекают из полученного аналитического решения. Численный расчет служит контролем правильности результатов, полученных аналитически, и источником иллюстративного материала (см. фигуры ниже). Поэтому приближенный характер результатов расчета неустойчивых стационарных режимов не имеет существенного значения. По этой же причине здесь не приводится более подробное описание численных расчетов.

Оказалось, что результаты, полученные разными способами, а именно: аналитические, полученные вручную и с помощью компьютерной системы аналитических вычислений, численные, полученные прямым методом и численные, полученные приближенным методом для заданных амплитуд, находятся в полном соответствии (это можно видеть из графиков, приводимых в разд. 6).

5. Модель компрессора МТИ. Параметры инерции μ и ν , параметры запаздывания потерь $k_\tau = \tau\phi$ и $k_\sigma = \sigma\phi$, и квазистационарные характеристики $\psi(\phi)$, $R(\phi)$ и $S(\phi)$. Используемые в дальнейшем характеристики были получены из данных, приведенных в [2], следующим образом.

Немодифицированная модель Мура–Грейтцера (это модель (1.1)–(1.3) при $\sigma = \tau = 0$) дает следующее выражение для частоты возмущенного движения: $nV = n\nu/(2/n + \mu)$ ($= \omega r/U$ в обозначениях [2]). Значения nV для $n = 1, 2, 3$ приведены на фиг. 19 в [2]. Непосредственные измерения по графику с последующей обработкой методом наименьших квадратов дают $\nu = 0,67$ и $\mu = 1,27$ с погрешностью не более 5%.

Подобным же образом, проводя непосредственные измерения значений ψ и $S + R$ при различных ϕ по графику на фиг. 15 в [2] и применяя метод наименьших квадратов, удается получить аппроксимации для ψ ($= \psi_{iscn}$ в обозначениях [2]) и $S + R$ ($= (\psi - \psi_{iscn})$ в обозначениях [2]). Используя затем соотношение $R = 3S$, указанное в [2], получаем

$$\begin{aligned} \psi(\phi) &= 4,5 - 13,5\phi + 20,5\phi^2 - 12,8\phi^3 \\ S(\phi) &= 1,45 - 5,93\phi + 8,04\phi^2 - 3,44\phi^3, \quad R(\phi) = 4,36 - 17,8\phi + 24,1\phi^2 - 10,3\phi^3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Эти формулы тоже имеют погрешность около 5%, что было проверено наблюдениями за результатами варьирования коэффициентов в этих формулах.

Коэффициенты запаздывания потерь были в соответствии с рекомендациями [2] взяты в полтора раза большими средних времен протекания жидкости по межлопаточным каналам. Время протекания для каждого канала равно $l \cos \alpha / \phi$, где l – хорда, а α – угол наклона лопатки из табл. 1 той же работы. Результаты осредняются отдельно по статорам и роторам. Напомним, что в качестве масштаба длины используется радиус роторов, равный согласно той же таблице 305 мм. Таким образом, находим

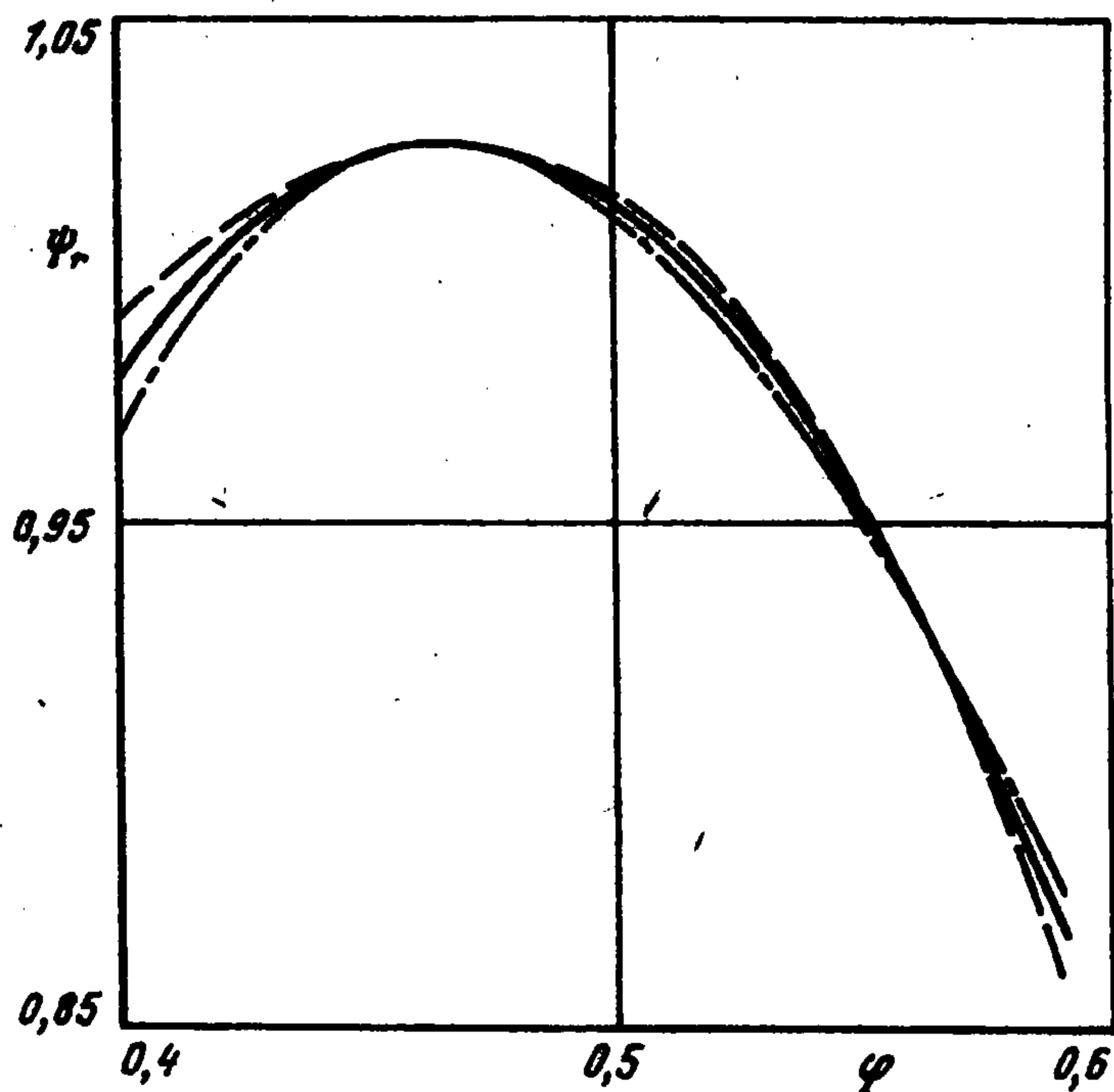
$$\begin{aligned} k_\sigma &= 1,5 \times ((20 + 81) \cos 8,1^\circ + 31 \cos 11^\circ + 31 \cos 12^\circ + 31 \cos 5,5^\circ) / (5 \times 305) \approx 1,5 \times 0,126 = 0,189 \\ k_\tau &= 1,5 \times (45 \cos 42,8^\circ + 45 \cos 43,5^\circ + 51 \cos 44,6^\circ) / (3 \times 305) \approx 1,5 \times 0,111 = 0,1665 \end{aligned}$$

Формулы (5.1) и значения постоянных были проверены расчетом собственных значений задачи о линейной устойчивости и сравнением их с графиками на фиг. 20 в [2]. Полученное совпадение подтвердило, что параметры рассматриваемого компрессора правильно аппроксимируются приведенными формулами. Кроме того, эти формулы и значения параметров согласуются также с формулами, полученными непосредственно от авторов [2] при посредничестве д-ра М. Барнетта (автор благодарен за предоставленную информацию), хотя в [2] использована другая (не полиномиальная) аппроксимация для ψ , S и R .

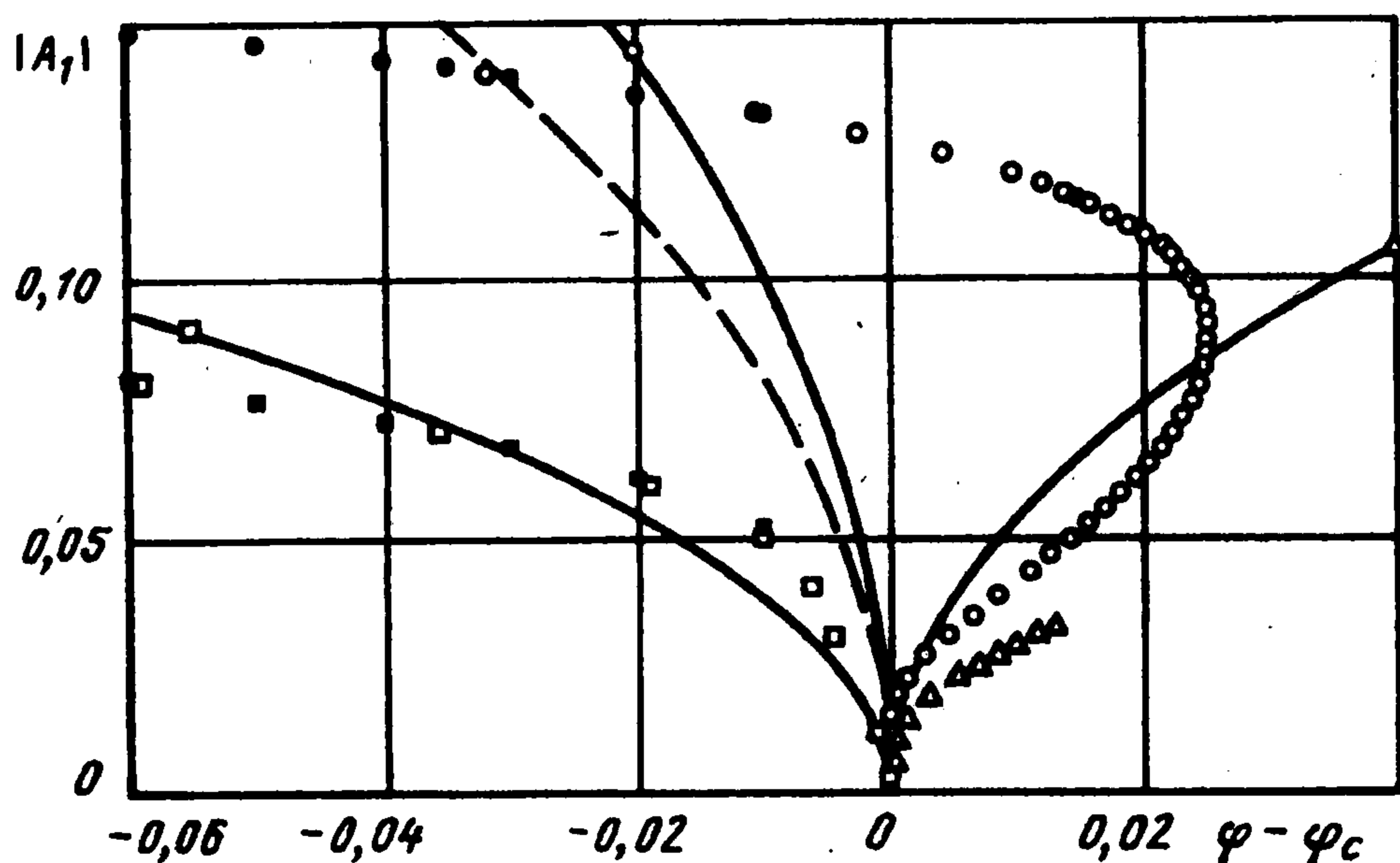
В следующем разделе под компрессором МТИ будем понимать компрессор с характеристиками, указанными выше, т.е. (5.1) и $k_\sigma = 0,189$, $k_\tau = 0,1665$, $\nu = 0,67$ и $\mu = 1,27$.

6. Анализ конкретного компрессора. Для компрессора МТИ расчет по линейной теории дает $\phi_c = 0,459$ и $V = 0,329$. Из (3.2) получаются следующие значения для коэффициентов уравнения (3.3): $a = -4,53 + 0,769i$; $b = -7,11 - 63,1i$.

Если отказаться от учета нелинейности в выходном канале компрессора, т.е. положить $\pi_{kl} = 0$ и $\pi_{jkl} = 0$, то первый коэффициент не меняется, а значение второго изменится незначительно: $b = -4,41 - 61,6i$. Это означает, что для компрессора МТИ нелинейность в выходном канале не играет существенной роли. Это обстоятельство используется при дальнейшем анализе, так как численные расчеты были проведены без учета этой нелинейности.



Фиг. 1



Фиг. 2

Оказалось, что действительная часть b отрицательна. Это означает, что вращающийся срыв (ВС) возбуждается мягко. Однако можно также заметить, что $|Reb|$ заметно, примерно в десять раз, меньше, чем $|b|$. Для решения вопроса о том, в какой мере полученный результат о мягком характере возбуждения ВС устойчив по отношению к вариациям характеристик компрессора (это важно, так как они могут быть определены только приближенно), функция $\psi(\varphi)$ была слегка изменена таким образом, чтобы получить компрессоры с ярко выраженными мягким и жестким характерами возбуждения, но сохранить значение критического расхода и фазовую скорость нейтрального возмущения. Для "мягкого" компрессора

$$\psi(\varphi) = 6,858 - 27,99\varphi + 50,05\varphi^2 - 32,80\varphi^3 \quad (6.1)$$

а для "жесткого"

$$\psi(\varphi) = 2,142 + 0,987\varphi - 9,0505\varphi^2 + 7,200\varphi^3 \quad (6.2)$$

Действительное различие между характеристиками этих компрессоров невелико, что можно видеть на фиг. 1, так что введенные в рассмотрение характеристики хотя и не соответствуют компрессору МТИ, но остаются вполне реалистичными образцами характеристик реальных компрессоров. На фиг. 1 показаны графики функции $\psi_r = \psi - S - R$. Сплошная линия соответствует компрессору МТИ (5.1), а штрихпунктирная – компрессору с мягким (6.1) и жестким (штриховая – (6.2)) характером возбуждения. Без учета нелинейности в выходном канале для "мягкого" компрессора получается $a = -3,59 + 0,828i$, $b = -24,6 - 39,5i$, а для "жесткого" $a = -5,48 + 0,709i$, $b = 19,4 - 88,7i$.

Численные эксперименты показали, что ВС в "мягком" и "жестком" компрессорах возбуждается соответственно мягким и жестким образом согласно предсказаниям, полученным из уравнения Ландау. Однако для компрессора МТИ первые численные расчеты обнаружили жесткий характер возбуждения вопреки предсказаниям теории. Сложившуюся ситуацию иллюстрирует фиг. 2, где различные кривые изображают стационарные по амплитуде режимы для различных компрессоров, т.е. полученные из уравнений (3.3) при $dB_1/dt = 0$ или численно, как описано в разд. 4. Кроме того, ось абсцисс, отвечающая нулевой амплитуде, также изображает режим со стационарной амплитудой. Штриховая линия соответствует решению уравнения (3.3) для компрессора МТИ при учете нелинейности в выходном канале, все остальные данные – без учета этой нелинейности, то есть при $\pi_{kl} = \pi_{jkl} = 0$. Сплошные линии – результаты расчета по уравнениям (3.3), светлые символы – прямое численное моделирование, темные символы – приближенный численный расчет для заданной амплитуды, кружки – компрессор МТИ (5.1), квадраты – компрессор с мягким возбуждением (6.1), треугольники – компрессор с жестким возбуждением (6.2).

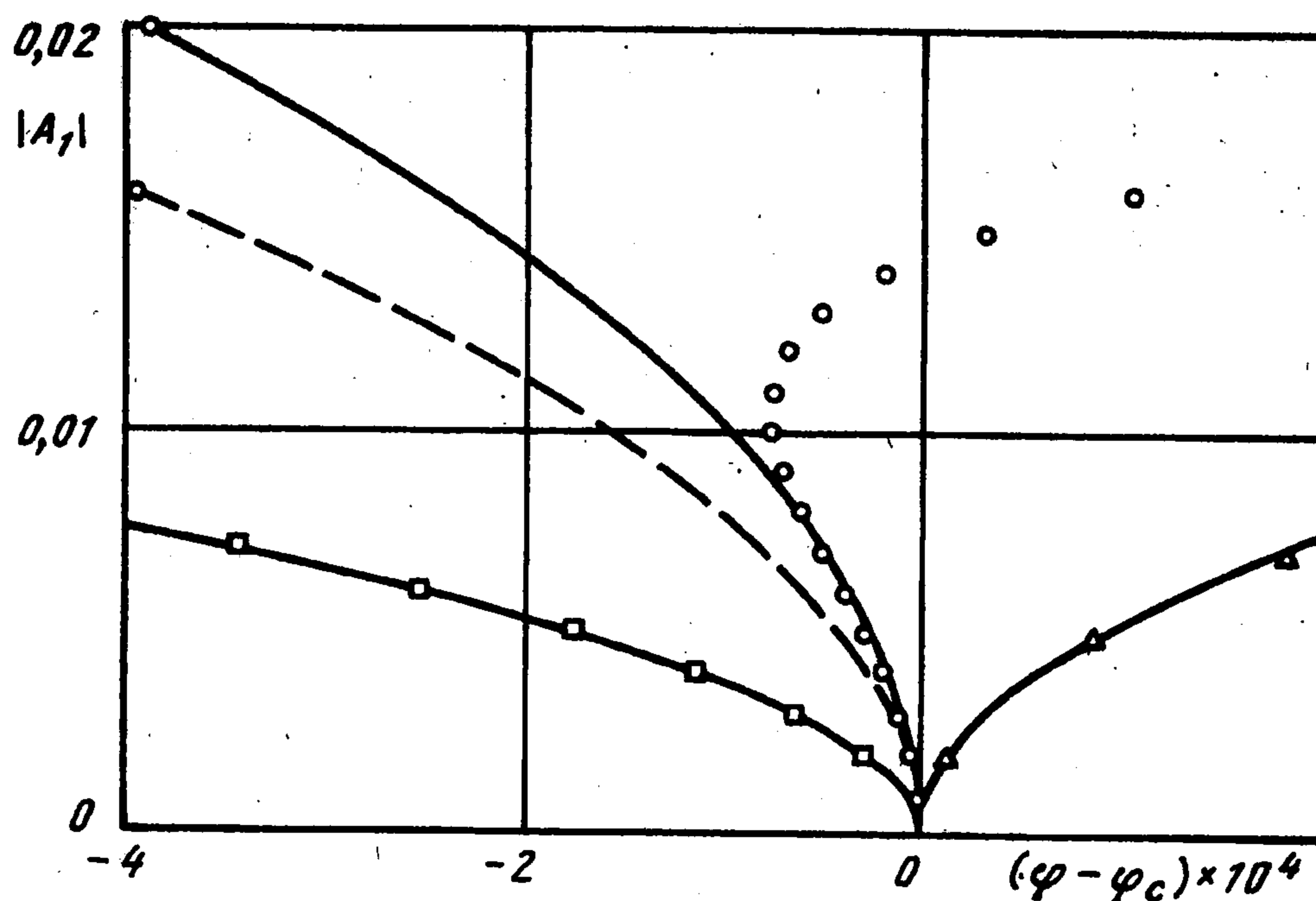
На практике для каждого значения φ_s может реализоваться только какой-либо из соответствующих устойчивых режимов. Режим с нулевой амплитудой устойчив при $\varphi_s > \varphi_c$. Устойчивость других режимов того же компрессора при том же φ_s можно получить по простому правилу общей теории бифуркаций: при увеличении амплитуды устойчивые и неустойчивые ветви будут чередоваться. Так, например, для случая компрессора МТИ с характеристикой, полученной численно (кружки на фиг. 2) промежуточная ветвь неустойчива, а ветвь с наибольшими значениями амплитуды устойчива. Соответственно поведение компрессора при медленных изменениях φ_s , т.е. расхода через него, можно описать следующим образом (если игнорировать детали, видимые только на фиг. 3). При достаточно больших φ_s имеется только один режим. ВС отсутствует, и этот режим устойчив. Как только φ_s уменьшается до значений, меньших φ_c , этот режим теряет устойчивость, а амплитуда растет и достигает конечной величины, отвечающей верхней ветви кривой для амплитуды и остается на этой ветви при дальнейшем уменьшении расхода. Если теперь увеличивать φ_s до значений, больших φ_c , то компрессор будет оставаться на верхней, устойчивой ветви характеристики вплоть до ее исчезновения, т.е. до значения φ , при котором график амплитуды имеет вертикальную касательную. При дальнейшем увеличении φ_s ВС внезапно исчезнет и амплитуда в стационарном режиме будет равной нулю. Таким образом, жесткое возбуждение ВС сопровождается гистерезисом. При мягком же возбуждении, отвечающем "мягкому" компрессору или предсказаниям слабо-нелинейной теории для компрессора МТИ, при переходе φ_s через φ_c амплитуда меняется непрерывно, как $\sqrt{\varphi_c - \varphi_s}$, и гистерезиса нет.

Более детальное исследование показало, что в действительности предсказания теории и численные расчеты для компрессора МТИ находятся в полном согласии, однако поведение компрессора оказывается более сложным. При увеличении $|A_1|$ от нуля кривая зависимости амплитуды ВС в компрессоре МТИ от расхода (кружки на фиг. 2 и 3) сначала отклоняется влево, точно следуя теории, затем сильно вправо и только затем вновь влево. Дело здесь в том, что уравнение Ландау применимо только при малых амплитудах и небольших отклонениях φ_s от φ_c . На фиг. 3 показана в увеличенном масштабе часть графиков фиг. 2 вблизи критической точки. Эти графики демонстрируют, что численные результаты (точки) хорошо согласуются с решением уравнений (3.3) (сплошные кривые) при приближении к критической точке для всех трех компрессоров. Компрессор МТИ отличается относительной малостью второго коэффициента в уравнении Ландау. Поэтому при увеличении амплитуды возмущения нелинейные члены более высокого порядка, не учитываемые в этом уравнении, приводят не только к количественным, но и к качественным изменениям в поведении компрессора. Из фиг. 2 и 3 можно видеть, что и для других рассмотренных компрессоров с ростом $|A_1|$ кривые тоже отклоняются вправо от предсказаний теории, но не настолько сильно, чтобы изменить жесткий или мягкий характер возбуждения срыва.

Так как сравнительно небольшое изменение характеристики компрессора МТИ (см. фиг. 1) может сделать тип возбуждения ВС вполне определенным, следует заключить, что относительная малость второго коэффициента в уравнении Ландау для этого компрессора – случайное обстоятельство, не типичное для большинства других компрессоров.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях $\text{Im}b < 0$. В соответствии с выражением (3.4) это означает, что с увеличением амплитуды фазовая скорость волны увеличивается.

7. Заключение. Коэффициенты в уравнении Ландау для амплитуды первой неустойчивой моды вращающегося срыва (ВС) можно выразить явными формулами



Фиг. 3

через характеристики компрессора, описываемого модифицированной моделью Мура-Грейтцера. Правильность формул подтверждена численными расчетами. Полученные формулы позволяют предсказать, будет ли возбуждение ВС жестким или мягким, т.е. будет ли иметь место гистерезис ВС при медленных (квазистационарных) изменениях расхода через компрессор. Приложение полученных формул к лабораторному компрессору, используемому в Массачусетском технологическом институте для изучения ВС, показало, что этот компрессор нетипичен в том смысле, что сравнительно небольшое изменение характеристики может превратить его в компрессор с жестким или мягким возбуждением ВС.

Не исключено, что такая особенность приводит к более широкому, чем обычно, диапазону амплитуд возмущений, в котором оказывается пригодной линейная теория, что, возможно, является преимуществом для осуществления активного управления компрессором. Кроме того, слабость нелинейных эффектов может быть ответственна за отсутствие альтернативного [6], связанного с развитием локализованного возмущения, сценария перехода к ВС в этом компрессоре.

Автор благодарит Г.Ю. Степанова за многочисленные комментарии к первоначальному тексту статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01291) и в рамках Федеральной целевой программы "Интеграция" (К0604) в Учебно-научном центре "Аэромеханика и газовая динамика".

ЛИТЕРАТУРА

1. Еришов В.Н. Неустойчивые режимы турбомашин. М.: Машиностроение, 1966. 180 с.
2. Haynes J.M., Hendricks G.J., and Epstein A.H. Active stabilization of rotating stall in a three-stage axial compressor // ASME Journal of Turbomachinery. 1994. V. 116. P. 226-239.
3. Longley J.P. A review of nonsteady flow models for compressor stability // ASME Journal of Turbomachinery. 1994. V. 116. P. 202-215.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
5. Теверовский М.А., Чернышенко С.И. Вихревое течение в выходном канале осевого компрессора в режиме вращающегося срыва // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 58-70.
6. Day I.J. Stall inception in axial flow compressors // ASME J. of Turbomachinery. 1993. V. 115. P. 1-9.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1998