ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 63. Вып. 3, 1999

УДК 533.72

© 1999 г. М.Ш. Шавалиев

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СМЕСЯХ ГАЗОВ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ БАРНЕТТА

Исследуются две задачи: о структуре слабой ударной волны и о распространении возмущений малой амплитуды в бинарной смеси одноатомных газов. В первой задаче получены вклады в гидродинамические величины во втором приближении по интенсивности волны. Во второй задаче рассматриваются акустические, тепловая и диффузионная моды и показано наличие отрицательной дисперсии акустической моды.

При изучении структуры ударной волны (УВ) в бинарной смеси вначале учитывался только один диссипативный механизм-диффузия [1], затем [2] были учтены все диссипативные механизмы и получено аналитическое решение задачи для молекулярных газов на основе уравнений Навье–Стокса.

В задаче о структуре слабой УВ распределение гидродинамических величин в волне строится в виде степенных рядов по малому параметру ε – интенсивности волны. В указанных выше работах были учтены первые нетривиальные члены в этих разложениях, что позволило, в частности, получить выражение для толщины УВ, основанное на максимальном наклоне профиля плотности. В последующие годы экспериментально [3] и путем численного решения гидродинамических уравнений метода Чепмена–Энскога [4] были изучены более тонкие свойства структуры УВ: асимметрия профилей гидродинамических величин, расстояние между их центрами и др. В случае слабой УВ члены первого порядка по ε в разложениях гидродинамических величин не только количественно, но и качественно неверно описывают эти свойства структуры волны. А влияние членов следующих порядков по ε на структуру УВ не изучены ни в однокомпонентных газах, ни в смесях газов.

В данной работе с помощью гидродинамических уравнений барнеттова приближения метода Чепмена–Энскога вычисляются члены второго порядка по ε в распределениях гидродинамических величин в слабой УВ. С их помощью выводятся и исследуются выражения для параметра асимметрии профилей плотности, скорости и температуры, расстояния между центрами этих профилей и поправка к толщине волны. Показано, что барнеттовы члены в уравнениях гидродинамики оказываются определяющими в выражении для параметра асимметрии. Рассматриваются только одноатомные газы и их смеси, так как только для них барнеттовы члены вычисляются полностью и имеют относительно простой вид.

Также исследуется распространение малых возмущений в бинарной смеси одноатомных газов на основе уравнений Барнетта для случая произвольного межмолекулярного взаимодействия. Наряду с акустическими модами рассматриваются и нераспространяющиеся моды (тепловая и диффузионная). Результаты приводятся как для начальной, так и для граничной задач.

Отдельно рассматривается случай смеси с резко различающимися массами молекул. Показано, что в такой смеси с малым содержанием легкого компонента имеет место отрицательная дисперсия (уменьшение скорости звука с ростом частоты) в отличие от положительной дисперсии в однокомпонентных газах и "нормальных" смесях, что дает теоретическое обоснование экспериментальному факту.

1. Структура слабой ударной волны. *Постановка задачи.* Законы сохранения массы смеси, массы одного из компонентов смеси (пусть для определенности это будет компонента из более легких молекул, $m_1 < m_2$, m_i – масса молекулы i-го сорта), импульса и полной энергии смеси в системе координат, движущейся вместе с волной в отрицательном направлении оси z, имеют вид

$$\rho u = C_0, \quad C_0 = \rho^- u^- \tag{1.1}$$

$$\rho u c_1 + i_1 = C_1, \quad C_1 = \rho_1^- u^- \tag{1.2}$$

$$p + \rho u^2 - \sigma = C_3, \quad C_3 = p^- + \rho^-(u^-)^2 \tag{1.3}$$

$$\rho u\left(\frac{1}{2}u^2 + c_p T\right) - u\sigma + q = C_4, \quad C_4 = \rho^- u^-\left(\frac{1}{2}(u^-)^2 + c_p^- T^-\right) \tag{1.4}$$

$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad c_p = c_1 c_{p1} + c_2 c_{p2}, \quad c_{pi} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R_i, \quad R_i = \frac{k_{\mathrm{Bo}}}{m_i}$$

Здесь c_i – массовая концентрация i-го компонента, c_p – удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении, в одноатомном газе $\gamma = 5/3$, k_{Bo} – постоянная Больцмана, u – гидродинамическая скорость. Давление p связано с концентрациями, плотностью ρ и температурой T через уравнение состояния смеси идеальных газов

$$p = (c_1 R_1 + c_2 R_2)\rho T \tag{1.5}$$

Верхними индексами минус и плюс отмечены величины в набегающем потоке и за волной.

Тензор вязких напряжений σ, диффузионный поток первого компонента смеси i_1 и тепловой поток q таковы [5]:

$$\sigma = \frac{4}{3}\mu\frac{du}{dz} + \sigma_B \tag{1.6}$$

$$i_1 = -\rho D\left[\frac{dc_1}{dz} + c_1 c_2\left(\frac{\alpha_p}{p}\frac{dp}{dz} + \frac{\alpha_T}{T}\frac{dT}{dz}\right) + i_{1B}\right] \tag{1.7}$$

$$q = -\varkappa\frac{dT}{dz} + (c_{p1} - c_{p2})T i_1 + \alpha_T\frac{p\rho}{n^2 m_1 m_2} i_1 + q_B \tag{1.8}$$

Здесь μ, D и $\varkappa$ – коэффициенты динамической вязкости, диффузии и теплопроводности, α_T – термодиффузионный фактор, $\alpha_p = (m_2 - m_1)n/\rho$.

Полные выражения барнеттовых вкладов σ_B, i_{1B}, q_B в случае смесей одноатомных газов получены ранее [5]. В рассматриваемом здесь приближении в них необходимо оставить только линейные по производным члены. Тогда

$$\sigma_B = \beta_1\frac{d^2 p}{dz^2} + \beta_2\frac{d^2 T}{dz^2} + \beta_3\frac{d^2 c_1}{dz^2}, \quad i_{1B} = \beta_4\frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$q_B^* = \beta_5\frac{d^2 u}{dz^2}, \quad \beta_1 = \frac{\mu}{p}\left(\tilde{\omega}_1\frac{\mu}{\rho} - \tilde{\omega}_2\alpha_p y_1 y_2 D\right), \quad \beta_2 = -\tilde{\omega}_3\frac{\mu\varkappa}{p}$$

$$q_B = q_B^* + (c_{p1} - c_{p2})T i_{1B} + \alpha_T\frac{p\rho}{n^2 m_1 m_2} i_{1B}, \quad y_i = \frac{n_i}{n}$$

$$\beta_3 = -\tilde{\omega}_2\frac{\rho^2}{n m_1 m_2}\mu D, \quad \beta_4 = \frac{c_1 c_2}{p}\left(\tilde{\omega}_{4,1}\frac{\rho^2 T}{3 c_2 p} y_1 y_2 \varkappa D\alpha_T + \tilde{\omega}_2\rho\mu D - \frac{5}{3}\alpha m_1 m_2 n^2 D^2\right),$$

$$\beta_5 = \tilde{\omega}_3\frac{T}{p}\varkappa\mu - \tilde{\omega}_5\frac{\rho T^2}{p^2}\varkappa^2 + y_1 y_2\alpha_p\alpha_T D\left[\frac{5}{2} y_1 y_2(\tilde{\omega}_{4,1} - \tilde{\omega}_{4,2})\frac{\rho^2 T}{np}\varkappa - \frac{5}{3}\frac{m_1 m_2 n^2}{\rho} D\right],$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{4}{3\mu^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i^2}{y_i}, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{4n}{3\rho\mu}\left(\frac{m_2\mu_1}{y_1} - \frac{m_1\mu_2}{y_2}\right),$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{8}{15\mu\varkappa}\sum_{i=1}^{2}\frac{\mu_i\varkappa_i^*}{y_i}$$

$$\tilde{\omega}_{4,j} = \frac{1}{3y_1y_2\alpha_T\varkappa D}\sum_{i=1}^{2} m_i\varkappa_i^* d_{i,1}^{(j)}, \quad \tilde{\omega}_5 \frac{4n}{15\rho\varkappa^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i\varkappa_i^{*2}}{y_i}$$

В случае однокомпонентного газа [7] имеем:
для максвелловских молекул

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\omega}_3 = \frac{8}{15}, \quad \tilde{\omega}_5 = \frac{4}{15}$$

для твердых сфер

$$\tilde{\omega}_1 = 1{,}014\cdot\frac{4}{3}, \quad \tilde{\omega}_3 = 0{,}806\cdot\frac{8}{15}, \quad \tilde{\omega}_5 = 1{,}014\cdot\frac{4}{15}$$

По аналогии со случаем однокомпонентного газа [6] введем безразмерные величины

$$\bar{\rho}_i = \frac{C_3}{C_0^2}\rho_i, \quad \bar{\rho} = \frac{C_3}{C_0^2}\rho, \quad \bar{u} = \frac{C_0}{C_3}u, \quad \bar{p} = \frac{1}{C_3}p$$

$$\bar{T} = \frac{RC_0^2}{C_3^2}T, \quad R = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{C_0}, \quad \bar{R}_i = \frac{R_i}{R} \tag{1.9}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu^-}, \quad \bar{\varkappa} = \frac{\varkappa}{R\mu^-}, \quad \bar{D} = \frac{C_0^2}{C_3\mu^-}D, \quad \bar{z} = \frac{C_0}{\mu^-}z$$

Для дальнейшего удобнее выбрать в качестве независимых гидродинамических величин скорость u, температуру T и концентрацию c_1. Плотность ρ и давление p определяются из уравнений (1.1) и (1.5):

$$\rho = \frac{1}{u}, \quad p = (c_1R_1 + c_2R_2)\frac{T}{u} \tag{1.10}$$

Тогда уравнения (1.2)–(1.4) могут быть записаны в виде (здесь и далее черта над безразмерными величинами опущена)

$$c_1 - D\frac{1}{u}\left[\left(1 + \alpha_p c_1 c_2\frac{R_1 - R_2}{c_1R_1 + c_2R_2}\right)\frac{dc_1}{dz} + c_1c_2\left(\frac{\alpha_p + \alpha_T}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{\alpha_p}{u}\frac{du}{dz}\right)\right] + \beta_4\frac{d^2u}{dz^2} = c_1^- \tag{1.11}$$

$$u + p - \frac{4}{3}\mu\frac{du}{dz} - \beta_1\frac{p}{u}\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\beta_2 + \beta_1\frac{p}{T}\right)\frac{d^2T}{dz^2} + \left(\beta_3 + \beta^1\frac{R_1 - R_2}{u}T\right)\frac{d^2c_1}{dz^2} = 1 \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{2}u^2 + c_pT - \frac{4}{3}\mu u\frac{du}{dz} - D\frac{1}{u}\left[(c_{p1} - c_{p2})T + \frac{\alpha_T p}{un^2m_1m_2}\right]$$

$$\left[\left(1 + \alpha_p c_1c_2\frac{R_1 - R_2}{c_1R_1 + c_2R_2}\right)\frac{dc_1}{dz} + c_1c_2\left(\frac{\alpha_p + \alpha_T}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{\alpha_p}{u}\frac{du}{dz}\right)\right] +$$

$$+\left[\beta_5 + \beta_4(c_{p1} - c_{p2})T + \beta_4\frac{\alpha_T p}{un^2m_1m_2} - \beta_1 p\right]\frac{d^2u}{dz^2} +$$

$$+\left(\beta_1\frac{p}{T} + \beta_2\right)u\frac{d^2T}{dz^2} + [\beta_1(R_1 - R_2)T + \beta_3 u]\frac{d^2c_1}{dz^2} = A, \quad A = \frac{C_0C_4}{C_3^2} \tag{1.13}$$

Граничные условия к системе (1.11)–(1.13) имеют вид

$$c_1(\mp\infty)=c_1^{\mp},\quad u(\mp\infty)=u^{\mp},\quad T(\mp\infty)=T^{\mp}$$
$$\left.\left(\frac{dc_1}{dz}=\frac{du}{dz}=\frac{dT}{dz}\right)\right|_{z=\mp\infty}=0 \tag{1.14}$$

Величины за и перед УВ связаны соотношениями

$$c_1^+=c_1^-,\quad u^+=u^- -\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{\gamma M^2+1},\quad T^{\pm}=u^{\pm}(1-u^{\pm})$$

$$u^-=\frac{\gamma M^2}{\gamma M^2+1},\ M=u^-\left(\frac{\rho^-}{\gamma p^-}\right)^{1/2}$$

Интенсивность УВ будем характеризовать параметром [6]

$$\varepsilon=u^- -u^+=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{\gamma M^2+1}$$

С помощью соотношений

$$u=\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{1}{2}\varepsilon v,\ c_1=c_1^-+\varepsilon f$$
$$T=\frac{\gamma}{(\gamma+1)^2}+\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)}\varepsilon\tau-\frac{\varepsilon^2}{4} \tag{1.15}$$

введем новые переменные v,τ,f. Для них из (1.14) следуют граничные условия

$$z=\mp\infty: v=\pm 1,\ \ \tau=\mp 1,\ \ f=0,\ \ \frac{dv}{dz}=\frac{d\tau}{dz}=\frac{df}{dz}=0$$

Система уравнений (1.11)–(1.13) автономна, т.е. инвариантна относительно сдвига координаты $z\to z+z_0$. Поэтому можем ввести дополнительное условие, фиксирующее начало координат

$$v(0)=0 \tag{1.16}$$

Решение для слабых УВ. Для слабых УВ $\varepsilon\ll 1$. Решение системы (1.11)–(1.13) будем искать в виде степенных рядов по ε

$$v=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\ldots \tag{1.17}$$

и аналогично для τ, f.

Введем масштабное преобразование

$$z=\tilde{z}/\varepsilon \tag{1.18}$$

так как дифференцирование по z повышает порядок малости по ε на единицу, а также учтем, что

$$A=\frac{\gamma^2}{2(\gamma^2-1)}-\varepsilon^2\frac{\gamma+1}{8(\gamma-1)} \tag{1.19}$$

Подставим выражения (1.17)–(1.19) в уравнения (1.11)–(1.13) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Приближение ε^0 приводит к тождествам. В приближении ε получаем

$$f_0 = 0, \quad \tau_0 = -\upsilon_0 \tag{1.20}$$

но для определения явного вида υ_0 необходимо рассмотреть следующее приближение по ε, в котором получим

$$b d\upsilon_0 / d\tilde{z} = -(1-\upsilon_0^2) \tag{1.21}$$

$$b = \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\left[\frac{4}{3}\mu^- + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma}\varkappa^- + (\gamma+1)\alpha^2 D^-\right], \quad \alpha = \alpha_p^- + \frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha_T^-$$

$$f_1 = -\frac{\gamma+1}{2\gamma}\alpha y_1 y_2 D^- \frac{d\upsilon_0}{d\tilde{z}} \tag{1.22}$$

$$\tau_1 + \upsilon_1 = \frac{\gamma+1}{4\gamma}(1-\upsilon_0^2) + \left(\frac{4}{3}\mu^- - \frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha D^- - \frac{\gamma-1}{\gamma}\varkappa^-\right)\frac{d\upsilon_0}{d\tilde{z}} \tag{1.23}$$

Решением уравнения (1.21), удовлетворяющим условиям

$$\upsilon_0(\mp\infty) = \pm 1, \; \upsilon_0(0) = 0$$

является

$$\upsilon_0 = -\mathrm{th}(\tilde{z}/b) \tag{1.24}$$

Тогда из (1.22) следует, что

$$f_1 = \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma}\frac{D^-}{b}\alpha y_1 y_2 \mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\tilde{z}}{b}\right) \tag{1.25}$$

Таким образом, в полном согласии с известными результатами [2], изменение концентрации – величина второго порядка малости по ε и внутри УВ концентрация легкого компонента растет, достигая максимума в точке $z = 0$ (центре волны), а затем убывает до асимптотического значения. Из (1.25) также следует, что диффузионная скорость тяжелых молекул смеси везде больше диффузионной скорости легких молекул.

Для определения υ_1 и τ_1 надо перейти к третьему приближению по ε. В этом приближении необходимо учитывать барнеттовы члены в уравнениях и изменения навье-стоксовых коэффициентов переноса, вызванные изменениями температуры и давления

$$\mu = \mu^- + \varepsilon\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)}\tau_0\left(\frac{d\mu}{dT}\right)^- + \ldots \tag{1.26}$$

и такие же выражения для $\varkappa$, pD, α_T.

Здесь приведены только необходимые для дальнейшего поправки, учтено, что $D \sim p^{-1}$ и концентрации можно считать постоянными.

Структура уравнений такая же, как и уравнений предыдущего приближения: дифференциальное уравнение первого порядка для υ_1 и соотношения, определяющие f_2 и $\tau_2 + \upsilon_2$. Уравнение для υ_1 имеет вид

$$\frac{d\upsilon_1}{d\tilde{z}} - 2\upsilon_0\upsilon_1 = \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^3}\frac{G}{b^2}\frac{d^2\upsilon_0}{d\tilde{z}^2} \tag{1.27}$$

Для дальнейшего удобно разбить коэффициент G на три части

$$G = G_1 + G_2 + G_3 \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
G_1 = &-\frac{16}{9}\mu^2 - \frac{(3\gamma+1)(\gamma-1)^3}{\gamma^2}\varkappa^2 - \frac{4}{3}(\gamma-1)(3-\gamma)\mu\varkappa - \\
&-\frac{4}{3}\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma}y_1y_2\left(\alpha_p^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha_T^2 + \frac{3\gamma^2+\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)}\alpha_p\alpha_T\right)\mu D - \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\Big[(\gamma^3 + \\
&+2\gamma^2-1)\alpha_p^2 + (\gamma^2+2\gamma-3)\alpha_T^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma^2}(2\gamma^3+7\gamma^2+3\gamma-1)\alpha_p\alpha_T\Big]y_1y_2\varkappa D - \\
&-(\gamma+1)^2\left[\frac{\gamma+1}{\gamma} + y_1y_2\left(\frac{\gamma^2+\gamma+1}{\gamma}\alpha_p^2 + \frac{2(\gamma-1)(\gamma^2+1)}{\gamma^2}\alpha_T^2 + \right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{2\gamma^3+\gamma^2+\gamma-1}{\gamma^2}\alpha_p\alpha_T\right)\right]y_1y_2\alpha^2D^2
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
G_2 = &\frac{\gamma^2-1}{4}b\left[\left(\frac{d\mu}{dT}\right)^- \frac{4}{3} + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma}\left(\frac{d\varkappa}{dT}\right)^- + y_1y_2\alpha_T\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha+\alpha_p\right)\left(\frac{dD}{dT}\right)^- + \right. \\
&\left.+2\frac{\gamma-1}{\gamma}y_1y_2\alpha D^-\left(\frac{d\alpha_T}{dT}\right)^-\right]
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$G_3 = \tilde{\omega}_1\left(\gamma + \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^3}{\gamma^2}\right)\mu^2 - \tilde{\omega}_3\frac{(\gamma+1)^2(\gamma-1)}{\gamma}\left(1+\frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^3}\right)\mu\varkappa + \tilde{\omega}_5\gamma^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\varkappa^2 \tag{1.31}$$

где G_1 – вклад от основных (навье-стоксовых) членов в гидродинамических уравнениях с невозмущенными значениями кинетических коэффициентов, G_2 – дополнительный вклад от них из-за изменений кинетических коэффициентов, G_3 – вклад от барнеттовых членов.

Решением уравнения (1.27), удовлетворяющим граничным условиям

$$v_0(\mp\infty) = 0, \quad v_1(0) = 0$$

является

$$v_1(\tilde{z}) = \frac{8\gamma}{(\gamma+1)^2}\frac{G}{b^2}\frac{\ln(\operatorname{ch}\tilde{z})}{\operatorname{ch}^2\tilde{z}} \tag{1.32}$$

Ширина УВ Λ определяется по максимальному наклону профиля плотности смеси с помощью соотношения

$$\Lambda^{-1} = (\rho^+ - \rho^-)^{-1}\left|\frac{d\rho}{dz}\right|_{\max} \tag{1.33}$$

Члены разложения плотности по степеням ε получаются из (1.10)

$$\begin{gathered}
\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma} + \varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\varphi_1 + \ldots \\
\varphi_0 = -\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{v_0}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}v_0 - v_1\right)
\end{gathered} \tag{1.34}$$

Тогда Λ^{-1} также можно написать в виде ряда по ε:

$$\Lambda^{-1} = \varepsilon\Lambda_1^{-1} + \varepsilon^2\Lambda_2^{-1} + \ldots \tag{1.35}$$

(разложение начинается с первой степени ε, так как при $\varepsilon = 0$ УВ исчезает, т.е. $\Lambda \to \infty$).

В главном приближении по ε из (1.33)–(1.35) получаем известную формулу для ширины УВ [2]

$$\Lambda_1^{-1} = \varepsilon(\rho^+ - \rho^-)^{-1}\left|\frac{d\varphi_0}{dz}\right|_{z=0} = \frac{\varepsilon}{2b} \tag{1.36}$$

Вычислим поправку к Λ_1, возникающую при учете φ_1 в разложении плотности (1.34). Точка $z = z^*$, в которой профиль плотности имеет максимальный наклон, определяется из условия

$$\frac{d^2}{dz^2}(\varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\varphi_1) = 0$$

Приближенное решение этого уравнения имеет вид

$$z^* = \varepsilon\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} - \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\frac{G}{b^2}\right) + O(\varepsilon^2)$$

Тогда

$$\Lambda^{-1} = (\rho^+ - \rho^-)^{-1}\left|\frac{d(\varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\varphi_1)}{dz}\right|_{z=z^*} = \frac{\varepsilon}{2b} + O(\varepsilon^3) \tag{1.37}$$

Таким образом, второе приближение не вносит вклада в ширину УВ. По-видимому, этим объясняется тот факт, что формула (1.36) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными и результатами численных расчетов вплоть до значения числа Маха $M \approx 1{,}8$ (для которого $\varepsilon \approx 0{,}437$) [8]. Полученная в [9] отличная от нуля поправка $\sim\varepsilon^2$ объясняется тем, что в [9] за точку максимального наклона профиля плотности принята точка $z = 0$, вместо z^*.

Для случая однокомпонентных газов рассмотрим асимметрию профилей гидродинамических величин и расстояния между их центрами.

Для количественной характеристики степени асимметричности профилей гидродинамических величин в УВ используется параметр асимметрии профиля плотности (the asymmetry quotient) [3]

$$Q_\rho = \left(\int_{-\infty}^{z_\rho^*}\rho_*(z)dz\right)\left(\int_{z_\rho^*}^{\infty}[1-\rho_*(z)]dz\right)^{-1}, \quad \rho_*(z) = \frac{\rho(z)-\rho^-}{\rho^+-\rho^-} \tag{1.38}$$

где z_ρ^* – центр профиля плотности, т.е.

$$\rho_*(z_\rho^*) = \tfrac{1}{2} \tag{1.39}$$

Приближенное решение уравнения (1.39) есть

$$z_\rho^* = \varepsilon\frac{\gamma+1}{2\gamma}b + O(\varepsilon^2) \tag{1.40}$$

Подставляя выражение (1.40) в (1.38), получаем

$$Q_\rho = \left[1 - \varepsilon\frac{8\gamma}{(\gamma+1)^2}\frac{G}{b^2}\left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right)\right]\left[1 + \varepsilon\frac{8\gamma}{(\gamma+1)^2}\frac{G}{b^2}\left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right)\right]^{-1} \tag{1.41}$$

В первом приближении профили плотности, температуры и скорости описываются гиперболическим тангенсом. Они строго антисимметричны. Здесь $Q_i = 1 (i = \rho, u, T)$. В следующем приближении профили становятся асимметричными. Из (1.41) следует, что $Q_\rho > 1$, если $G < 0$ и $Q_\rho < 1$, если $G > 0$.

Необходимо установить знак коэффициента G. Коэффициенты G_1, G_2, G_3 можно привести к виду

$$G_1 = -\frac{(\gamma-1)^3}{\gamma}\left(\varkappa - \frac{2}{3}\mu\right)^2 - \left(1 - \frac{(\gamma-1)^3}{4\gamma}\right)\left(\frac{4}{3}\mu\right)^2 < 0$$

$$G_2 = \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\left(\frac{4}{3}\mu + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma}\varkappa\right)\left(\frac{4}{3}\frac{d\mu}{dT} + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma}\frac{d\varkappa}{dT}\right) > 0 \qquad (1.42)$$

$$G_3 = \tilde{\omega}_1\frac{\gamma^3 + (\gamma-1)(\gamma+1)^3}{\gamma^2}\mu^2 - \tilde{\omega}_3\frac{(\gamma+1)^2(\gamma-1)}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^3}\right)\mu\varkappa + \tilde{\omega}_5\gamma^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\varkappa^2$$

Можно убедиться, что вклад в G от навье-стоксовых членов $(G_1 + G_2) < 0$. Это легко показать для степенных потенциалов межмолекулярного взаимодействия, для которых $\varkappa \sim \mu \sim T^s$. Крайними случаями здесь являются максвелловские молекулы ($s = 1$) и твердые упругие сферы ($s = 1/2$). Учитывая, что $\varkappa = 15\,\mu/4$, $\gamma = 5/3$, из (1.29), (1.30) и (1.31) получаем

$$G_1 = -2{,}4948\,\mu^2,\quad G_2 = 0{,}1215\,s\mu^2,\quad G_3 = 27{,}2438\,\mu^2$$

Имеем

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 24{,}8705\,\mu^2 > 0$$

для максвелловских молекул (для твердых сфер величина G еще больше).

Эксперименты [3] и численные решения уравнений Барнетта [4] указывают на то, что $Q_\rho < 1$ при $M \lesssim 1{,}8$. В то же время численное решение уравнений Навье–Стокса [4] приводит к качественно неверному результату $Q_\rho > 1$ в этой области чисел Маха.

Таким образом, только при учете барнеттовых членов в уравнениях гидродинамики удается получить качественно правильные значения параметра асимметрии профиля плотности в слабой УВ.

Вычисление центра z_T^* и параметра асимметрии Q_T профиля температуры $T_*(z)$ аналогично вычислению z_ρ^* и Q_ρ. Оно приводит к результатам

$$Q_T = Q_\rho,\quad z_T^* = -\varepsilon B + 0(\varepsilon^2),\quad B = \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{4}{3}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{b} \qquad (1.43)$$

Из (1.40) и (1.43) следует, что $z_\rho^* > 0$ и $z_T^* < 0$, т.е. профиль температуры опережает профиль плотности. Этот результат физически прозрачен. Молекулы, имеющие большие скорости, проникают в область перед фронтом УВ. Вклад таких молекул в плотность незначителен в силу их малочисленности, но вклад в температуру конечен в силу их больших энергий. Отмеченный выше эффект имеет место и в УВ умеренной интенсивности.

Для профиля скорости вычисление приводит к результату: $z_u^* = 0$. Профиль скорости лежит между профилями температуры и плотности.

Заметим, что в первом приближении центры профилей гидродинамических величин совпадают.

2. Распространение возмущений малой амплитуды в смесях газов. *Начальная задача.* В качестве макроскопических величин, описывающих состояние бинарной газовой смеси, возьмем массовую концентрацию одного из компонентов смеси $c_1 = \rho_1/\rho$, гидродинамическую скорость u, давление p и температуру T. Пусть в покоящейся и находящейся в термодинамическом равновесии смеси созданы малые флуктуации макроскопических величин

$$c_1 = c_{10} + c_1', \quad u = 0 + u', \quad p = p_0 + p', \quad T = T_0 + T' \tag{2.1}$$

Флуктуации плотности определяются через них с помощью уравнения состояния

$$\rho' = \frac{\rho_0}{p_0} p' - \frac{\rho_0}{T_0} T' - \frac{\rho_0^2 T_0}{p_0}(R_1 - R_2) c_1' \tag{2.2}$$

Подставляя выражения (2.1), (2.2) в одномерные уравнения Барнетта [5] и линеаризуя, получаем

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{T_0}\frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\rho_0 T_0}{p_0}\frac{\partial c_1'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial c_1'}{\partial t} - D\left[\frac{\partial^2 c_1'}{\partial z^2} + c_{10}c_{20}\left(\frac{\alpha_p}{p_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \frac{\alpha_T}{T_0}\frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}\right)\right] + \frac{\beta_4}{\rho_0}\frac{\partial^3 u'}{\partial z^3} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \beta_1 \frac{\partial^3 p'}{\partial z^3} - \beta_2 \frac{\partial^3 T'}{\partial z^3} - \beta_3 \frac{\partial^3 c_1'}{\partial z^3} = 0$$

$$\begin{gathered}\frac{3}{2}\frac{p_0}{T_0}\frac{\partial T'}{\partial t} + p_0 \frac{\partial u'}{\partial z} - \varkappa \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} - \frac{5}{2}\frac{p_0 \rho_0^2 \alpha}{n_0^2 m_1 m_2} D\left[\frac{\partial^2 c_1'}{\partial z^2} + \right.\\ \left. + c_{10}c_{20}\left(\frac{\alpha_p}{p_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \frac{\alpha_T}{T_0}\frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}\right)\right] - \left(\beta_5 + \beta_4 \frac{5}{2}\frac{p_0 \rho_0 \alpha}{n_0^2 m_1 m_2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) ищем в виде плоских волн

$$\Gamma'(t, z) = \hat{\Gamma} \exp(ikz - i\omega t), \quad \Gamma' = (c_1', u', p', T') \tag{2.4}$$

где k – волновое число, ω – частота. Подставляя выражения (2.4) в (2.3), получим систему линейных, однородных алгебрических уравнений для амплитуд $\hat{\Gamma}$

$$\begin{gathered}i\omega \frac{\rho_0 T_0}{p_0}(R_1 - R_2)\hat{c}_1 + ik\hat{u} - i\omega \frac{1}{p_0}\hat{p} + i\omega \frac{1}{T_0}\hat{T} = 0\\
(-i\omega + k^2 D)\hat{c}_1 - ik^3 \beta_4 \frac{1}{\rho_0}\hat{u} + k^2 c_{10}c_{20} D\left(\frac{\alpha_p}{p_0}\hat{p} + \frac{\alpha_T}{T_0}\hat{T}\right) = 0\\
ik^3 \beta_3 \hat{c}_1 - \left(i\omega\rho_0 - k^2 \frac{4}{3}\mu\right)\hat{u} + i(k + k^3 \beta_1)\hat{p} + ik^3 \beta_2 \hat{T} = 0\\
k^2 \frac{5}{2}\frac{p_0 \rho_0^2 \alpha}{n_0^2 m_1 m_2} D\hat{c}_1 + \left[ikp_0 + ik^3\left(\beta_5 + \beta_4 \frac{5}{2}\frac{p_0 \rho_0 \alpha}{n_0^2 m_1 m_2}\right)\right]\hat{u} +\\
+ k^2 \frac{5}{2}\frac{\rho_0^2 \alpha}{n_0^2 m_1 m_2} c_{10}c_{20} D\hat{p} - \left[i\omega \frac{3}{2}\frac{p_0}{T_0} - k^2\left(\varkappa + \frac{5}{2} y_{10} y_{20} \frac{\alpha p_0}{T_0} D\right)\right]\hat{T} = 0\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $\alpha = \alpha_p + 2\alpha_T/5$, для простоты записи нулевые индексы опущены.

Для существования нетривиальных решений системы (2.5) необходимо, чтобы определитель из ее коэффициентов был равен нулю. Раскрывая определитель, получим дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 - ka_0^2 - i\omega k^2 b_*)[\omega^2 - i\omega k^2(\chi + D^*)] - \omega^2 k^4\left[\left(\frac{2}{3}\chi + \frac{5}{3}y_1y_2\alpha^2 D\right)\left(\frac{4}{3}\nu + \chi - D^*\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{3}(1 + y_1y_2\alpha_p^2)\chi D\right] + k^6\frac{5}{3}\chi D\left[\frac{3}{5}a_0^2 - i\omega(1 + y_1y_2\alpha_p^2)\frac{4}{3}\nu\right] + \qquad (2.6)$$
$$+\omega k^4\frac{2}{3}\frac{T}{\rho}\left[\frac{5}{2}\frac{p}{T}\beta_1 + \beta_2 + (R_1 - R_2)(4\alpha_p + \alpha_T)\beta_4 + \frac{1}{T}\beta_5\right] = 0$$

Здесь

$$b_* = \frac{16}{15}b = \frac{4}{3}\nu + \frac{2}{3}\chi + \frac{5}{3}y_1y_2\alpha^2 D, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \chi = \frac{\varkappa}{\rho c_p}$$
$$a_0 = \left(\frac{5}{3}\frac{p}{\rho}\right)^{1/2}, \quad D^* = D\left(1 + \frac{2}{5}y_1y_2\alpha_T^2\right) \qquad (2.7)$$

ν, χ – коэфициенты кинематической вязкости и температуропроводности, a_0 – адиабатическая скорость звука, коэффициент b_* входит в формулу Кирхгофа–Стокса в качестве множителя (ранее в уравнении (1.21) он приведен в безразмерном виде). При получении уравнения (2.6) отброшены члены порядка Kn^3, так как рассматривается барнеттово приближение.

Уравнение (2.6) является алгебрическим уравнением четвертого порядка относительно ω, если k рассматривается как заданная величина (начальная задача). Корни уравнения будем искать в виде разложения по k. Фактически разложение проводится по безразмерным величинам $\nu k/a_0$, $\chi k/a_0$, Dk/a_0. Учитывая, что $\nu \sim \chi \sim D \sim \bar{l}\bar{v}$, $k = 2\pi/\lambda$ ($\bar{l}$ – средняя длина свободного пробега молекул, $\bar{v}$ – тепловая скорость молекул, $\bar{v} \sim a_0$, λ – длина волны), получаем что эти величины пропорциональны числу Кнудсена $\mathrm{Kn} = \bar{l}/\lambda$.

В результате получим два чисто мнимых корня

$$\omega_{1,2} = -ik^2\theta + O(k^4) \qquad (2.8)$$
$$\theta = \frac{1}{2}(\chi + D^*) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\chi + D^*)^2 - 4\chi D}$$

Другая пара корней имеет вид

$$\omega_{3,4} = \pm a_0 k - i\frac{1}{2}b_* k^2 \mp \frac{h_1 - h_2}{2a_0}k^3 + O(k^4) \qquad (2.9)$$
$$h_1 = \frac{4}{9}\nu^2 + \frac{7}{9}\chi^2 - \frac{4}{9}\nu\chi + y_1y_2\alpha D\left[-\frac{10}{9}\alpha\nu + \frac{5}{9}\left(\alpha + \frac{12}{5}\alpha_T\right)\chi + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{3}\alpha\left(1 + \frac{5}{12}y_1y_2\left(\alpha^2 + \frac{24}{25}\alpha_T^2\right)\right)D\right]$$
$$h_2 = \frac{5}{3}\tilde{\omega}_1\nu^2 + \frac{25}{6}\tilde{\omega}_5\chi^2 - \frac{10}{3}\tilde{\omega}_3\nu\chi - \frac{5}{3}\tilde{\omega}_2 y_1y_2\alpha_p\nu D + c_1c_2\left(\frac{25}{9}\alpha_p + \frac{20}{9}\alpha_T\right)\alpha_p D^2$$

Здесь через h_1 и h_2 обозначены вклады, происходящие от навье-стоксового и барнеттового приближений.

Каждому корню соответствует определенная мода. Выясним физический смысл этих мод. Подставим в систему (2.5) первый корень $\omega_1 \approx -ik^2\chi/2$, в котором пренебрегли малым членом, пропорциональным α_T. Решая систему (2.5) относительно амплитуд $\hat{\Gamma}$, получим, что

$$\hat{u} \sim \hat{p} \sim \hat{c}_1 \sim \mathrm{Kn}\,\hat{T} \ll \hat{T}$$

Эта мода – затухание флуктуации температуры из-за теплопроводности при $u = 0$ и постоянных p, c_1 (тепловая мода). Аналогично, второй корень $\omega_2 \approx -ik^2D/2$ приводит к соотношению

$$\hat{u} \sim \hat{p} \sim \hat{T} \sim \mathrm{Kn}\,c_1 \ll c_1$$

Здесь происходит затухание флуктуаций концентраций из-за диффузии при $u = 0$ и постоянных p, T (диффузионная мода). Эти моды слабо связаны между собой через термодиффузию. При подстановке в (2.5) ω_3 и ω_4 получаем, что движение среды представляет собой две звуковые волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Число независимых мод движений, имеющих разный физический смысл, совпадает с числом законов сохранения (гидродинамических уравнений).

Граничная задача. Для сравнения с результатами экспериментов по измерению скорости и коэффициента поглощения звука, в которых частота ω – заданная действительная величина, необходимо решить дисперсионное уравнение (2.6) относительно волнового числа k (граничная задача). Порядок уравнения (2.6) по k выше, чем по ω, появляются дополнительные корни. Численное решение дисперсионного уравнения в случае однокомпонентного газа [10] показывает, что волна, соответствующая этим корням, является сильно затухающей. Между коэффициентами затухания акустической, тепловой и дополнительной волн (I-, II- и III-волны в терминологии [10]) в области низких частот имеет место соотношение $\mathrm{Im}k_1 \ll \mathrm{Im}k_2 \ll \mathrm{Im}k_3$. Кроме того, III-волна обладает нефизическими свойствами: $\mathrm{Im}k_3 \gg \mathrm{Re}k_3$ в отличие от I-волны ($\mathrm{Im}k_1 \ll \mathrm{Re}k_1$) и II-волны ($\mathrm{Im}k_2 = \mathrm{Re}k_2$), при высоких частотах $\mathrm{Re}k_3$ меняет знак (что означает изменение направления распространения волны на обратное). Было выражено сомнение в ее реальности [10].

В математическом отношении значительно проще обратить разложения (2.8) и (2.9), чем находить решения уравнения (2.6) в виде рядов по ω. Кроме того, при этом избавляемся от нефизических корней. Тогда из (2.9) имеем

$$k_{3,4} = \pm\frac{1}{a_0}\omega \pm i\frac{b_*}{2a_0^3}\omega^2 \mp \frac{d}{2a_0^5}\omega^3 + O(\omega^4) \tag{2.10}$$

$$d = \frac{4}{3}\nu^2 - \frac{1}{3}\chi^2 + \frac{20}{9}\nu\chi + y_1y_2\alpha D\left[\frac{50}{9}\alpha\nu + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{3}\alpha - \frac{4}{3}\alpha_T\right)\chi - \frac{5}{3}\alpha D\left(1 - y_1y_2\left(\frac{5}{4}\alpha^2 - \frac{2}{5}\alpha_T^2\right)\right)\right] + h_2$$

для акустических мод. Для тепловой и диффузионной мод из (2.8) получаем

$$k_{1,2} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\theta}} + O(\omega^{3/2}) \tag{2.11}$$

Из (2.10) для фазовой скорости звука v_{ph} и коэффициента поглощения на длине волны S получаем

$$\frac{a_0}{v_{\mathrm{ph}}} = \mathrm{Re}\left(\frac{a_0k}{\omega}\right) = \pm\left(1 - \frac{d}{2a_0^4}\omega^2 + \ldots\right) \tag{2.12}$$

$$S = \mathrm{Im}\left(\frac{a_0k}{\omega}\right) = \pm\frac{b\omega}{2a_0^2} + \ldots \tag{2.13}$$

Из (2.12) следует, что имеет место дисперсия звука, дисперсионный коэффициент $d \sim \mathrm{Kn}^2$ и содержит как навье-стоксовы вклады, так и барнеттовы вклады, причем они одного порядка по величине. Анализ выражения для d показывает, что в общем случае $d > 0$. Следовательно, скорость звука возрастает с ростом частоты (положительная дисперсия). Коэффициент затухания определяется только навье-стоксовыми членами, в следующий член дает вклад и супербарнеттово приближение.

Иная ситуация возникает в смеси с большой разницей в массах молекул ($m_2 \gg m_1$). В смеси гелий – ксенон с 80% содержанием ксенона экспериментально показано существование отрицательной дисперсии. Здесь можно принять, что $\sqrt{m_1 / m_2} \sim y_1 \ll 1$. Тогда из общих формул [5, 7] можно получить

$$\mu_1 \approx \mu_{11}, \quad \mu_2 \approx \frac{y_2}{y_1} \frac{k_{Bo}T}{2A_{12}} \frac{1}{\sqrt{m_2}\Omega_{12}^{(1,1)}} \ll \mu_1$$

$$\varkappa_1 \approx \varkappa_{11}, \quad \varkappa_2 \approx \frac{y_2}{y_1} \varkappa_{22} \frac{\Omega_2^{(2,2)}}{5\Omega_{12}^{(1,1)}} \sim \varkappa_1$$

$$D = \frac{3}{16} \frac{k_{Bo}T}{m_2 n} \frac{1}{\Omega_{12}^{(1,1)}}$$

Следовательно,

$$\nu \sim \chi \sim \sqrt{m_2 m_1} D \ll D$$

В результате наибольшим в дисперсионном коэффициенте является слагаемое с D^2. Как показывают оценки, барнеттовы вклады малы. Тогда имеем

$$d \approx -\frac{5}{3} \frac{y_2}{y_1} D^2 < 0$$

что приводит к отрицательной дисперсии.

Обратим внимание еще на один факт. Область применимости решения в виде ряда по ω ограничена частотой $\omega^* \sim (m_1/m_2)\tau^{-1}$ (τ^{-1} – частота столкновений легких молекул), при которой второй член в (2.12) становится порядка первого. Граничная частота ω^* совпадает с известной оценкой обратного времени релаксации температур компонентов смеси. В области частот $\omega \geqslant \omega^*$ необходимо использовать уравнения двухтемпературной газодинамики или уравнения двухскоростной и двухтемпературной газодинамики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01244).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cowling T.G.* The influence of diffusion on the propagation of shock waves // Phil. Mag. 1942. V. 33. № 216. P. 61–68.
2. *Дьяков С.П.* Ударные волны в бинарных смесях // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. Вып. 3. С. 283–287.
3. *Alsmeyer H.* Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. Pt. 3. P. 497–513.
4. *Simon C.T., Foch J.D., Jr.* Numerical integration of the burnett equations for shock structure in a maxwell gas // Rarefied Gas Dynamics / Ed. L. Potter. N.Y.: AIAA, V. 1. 1977. P. 493–500.

5. *Шавалиев М.Ш.* Явления переноса в барнеттовском приближении в многокомпонентных газовых смесях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 126–137.
6. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложение в газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
7. *Chapman S., Cowling T.* The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. Cambridge: Univ. Press, 1952. 431 c. = *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
8. *Руев Г.А., Фомин В.М., Шавалиев М.Ш.* Структура ударных волн в смесях газов с сильно различающимися массами молекул // ПМТФ. 1989. № 4. С. 26–33.
9. *Wang Chang C.S.* On the theory of the thickness of weak shock waves // Studies in Statistical Mechanics / Ed. De J. Boer, G.E. Uhlenbeck. Amsterdam: North Holland, 1970. V. 5. P. 27–42.
10. *Greenspan M.* Transmission of sound waves in gases at very low pressures // Physical Acoustics. V. 2. Pt A. Prop. gases, liquids and solutions. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. P. 1–45. = *Гринспан М.* Распространение звуковых волн в газах при очень низких давлениях // Физическая акустика. Т. 2. Ч. А. Свойства газов, жидкостей и растворов / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1968. С. 11–60.

Москва

Поступила в редакцию
14.I.1998