

УДК 533.6.011

© 1999 г. В.А. Кукушкин

О ДВУМЕРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН СЖАТИЯ РИМАНА

Для качественного и количественного анализа течений газа, возникающих в результате взаимодействия волн сжатия Римана, используется класс решений уравнений газовой динамики, содержащий функциональный произвол. Исследуются два типа течений: согласованный тип, когда показатель адиабаты специальным образом согласован с начальной геометрией сжимаемого объема, и общий случай, когда такого согласования нет. Для согласованного взаимодействия неавтомодельных волн Римана установлено явление частичного коллапса (в точку сжимается только часть исходной массы газа); при этом асимптотические оценки для скорости, плотности, внутренней энергии и оптической толщины такие же, как для автомодельного сжатия. Доказано, что несогласованное взаимодействие автомодельных волн Римана не приводит к неограниченному безударному сжатию газа; в этом случае ударная волна возникает, когда максимальная плотность газа конечна. Полученные результаты позволяют говорить, что двумерные процессы неограниченного сжатия устойчивы по отношению к достаточно широкому классу возмущений.

Изучение свойств процессов неограниченного безударного сжатия связано, в частности, с вопросом о возможности их использования для создания условий, необходимых для возникновения термоядерной реакции [1].

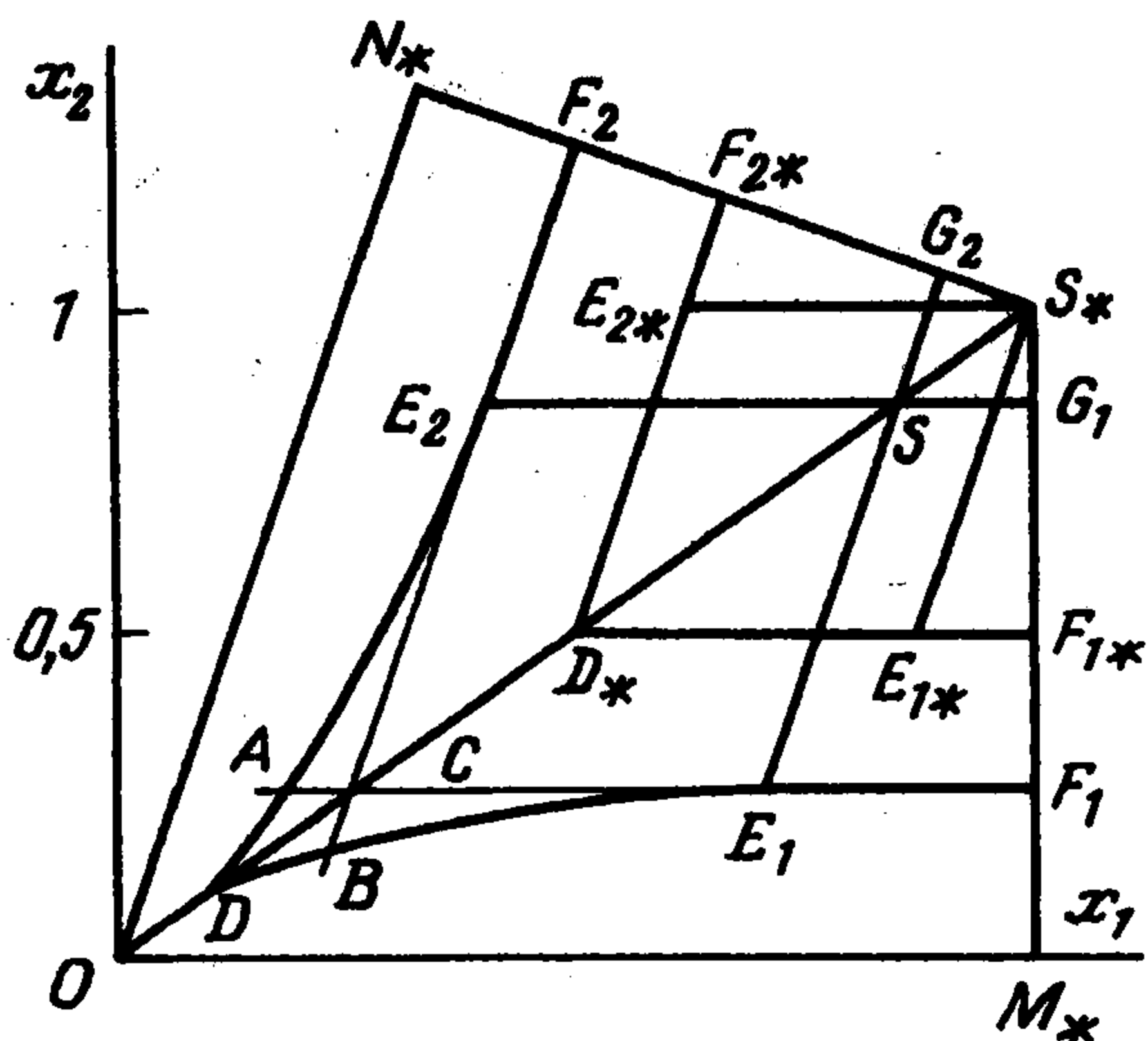
Простейший процесс неограниченного сжатия – автомодельное сжатие плоского слоя газа в плоскость – описывается автомодельной волной Римана [1]. Использование неавтомодельных волн Римана позволяет построить процесс сжатия плоского слоя, обеспечивающий неограниченный рост плотности газа только на поверхности сжимающего поршня. При этом затраты энергии на такое сжатие могут быть конечны [2].

Течение, получающееся в результате согласованного взаимодействия автомодельных волн Римана было построено аналитически [3]; для него известны оценки величин скорости, энергии, плотности [3] и оптической толщины [4]. Эта задача является частным случаем задачи о согласованном взаимодействии неавтомодельных волн Римана [5]. Для построения аналитического решения был использован класс точных решений уравнений газовой динамики – двойные волны [6]. Для неавтомодельного случая был исследован двухпараметрический класс законов управления сжимающим поршнем. Для рассмотренных течений приведены оценки роста скорости и плотности газа, совпадающие с оценками, полученными для автомодельного случая. Доказано, что часть исходного объема газа сжимается в некоторую поверхность [5].

Цель данной работы – изучение более широкого (по сравнению с ранее рассмотренным) класса течений.

Для несогласованного взаимодействия автомодельных волн Римана аналитически доказан факт возникновения ударной волны. Течение газа строится в классе решений с вырожденным годографом типа двойных автомодельных волн. Интегрирование уравнений газовой динамики сводится к нахождению решения одного уравнения с частными производными для одной функции двух переменных (уравнение двойных волн), которое решается численно методом характеристик.

Для согласованного взаимодействия неавтомодельных волн Римана исследован класс законов управления сжимающим поршнем, содержащий функциональный произвол. Для этой задачи известно аналитическое решение [5], однако асимптотические свойства этого



Фиг. 1

решения неочевидны. На основе качественного анализа уравнений движения частиц газа получены асимптотические оценки газодинамических величин и доказано существование областей исходного объема газа, сжимающихся в поверхность и в линию. Форма этих областей получена приближенно, путем численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Однородный идеальный газ в начальный момент времени $t = 0$ покоится внутри призмы с сечением OM^*SN^* (фиг. 1). Рассматривается уравнение состояния $p = Ap^\gamma$, $1 < \gamma < 3$. Без ограничения общности считаем, что скорость звука и плотность в невозмущенном газе равны единице. Отрезки OM^* и ON^* — начальное положение сжимающих поршней, которые в некоторый момент $t < 1$ принимают вид DE_1F_1 и DE_2F_2 . В трапециях $E_1F_1G_1S$ и $E_2F_2G_2S$ течения газа являются одномерными простыми волнами (неавтономными волнами Римана). Область взаимодействия одномерных течений обозначена DE_1SE_2 , здесь решение строится в классе двойных неавтономных волн. В четырехугольнике $SG_1S^*G_2$ находится невозмущенный газ. Длина стенок M^*S^* и N^*S^* равна единице, в последний момент времени звуковое возмущение приходит в точку S^* . Величину угла N^*OM^* обозначим 2α . В случае согласованного взаимодействия простых волн величина $\alpha = \alpha_0$, причем

$$\operatorname{ctg}\alpha_0 = h = \sqrt{\frac{\gamma+1}{3-\gamma}} \quad (1.1)$$

При этом в результате неавтономного сжатия в финальный момент $t^* = 1$ газ займет область $D^*E_1^*S^*E_2^*$. Точки E_1^* и E_2^* могут находиться как угодно близко к точке S^* . Для автономного случая область $D^*E_1^*S^*E_2^*$ стягивается в точку S^* .

2. Течения газа типа простых и двойных волн. Движение плоских частей поршня (отрезки E_1F_1 и E_2F_2) задается уравнениями

$$x_2 = f_1(t), \quad x_1 \sin 2\alpha - x_2 \cos 2\alpha = f_2(t).$$

Считаем, что скорости движения плоских частей поршня в начальный момент равны нулю, а затем они монотонно возрастают. Введем обозначения: u_1, u_2 — компоненты вектора скорости, c — скорость звука, $\Theta = \sigma c$, $\sigma = 2/(\gamma - 1)$, $(f_i')^{-1} = z_i$ — обратные функции для производных f_i' . Течение газа определяется следующими соотношениями [6]:

$$u_1'x_1 + u_2'x_2 - (\sigma^{-1}\Theta + u_1'x_1 + u_2'x_2)t + \Delta_i(\Theta), \quad u_i' = \frac{du_i}{d\Theta}$$

В области $E_1F_1G_1S$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \Theta - \sigma \quad (2.1)$$

В области $E_2F_2G_2S$

$$u_1 = (\Theta - \sigma)\cos\alpha, \quad u_2 = -(\Theta - \sigma)\sin\alpha \quad (2.2)$$

Функции $\Delta_i(\Theta)$ находятся из условия примыкания простой волны к поршню [5]

$$\Delta_i(\Theta) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\Theta - \sigma\right)y_i - f_i(y_i), \quad y_i = z_i(\Theta - \sigma)$$

В автомодельном случае функции $\Delta_i(\Theta)$ постоянные.

Для описания движения в области DE_1SE_2 необходимо решить уравнения неавтомодельных двойных волн для функций $\Theta = \Theta(u_1, u_2)$ и $\chi = \chi(u_1, u_2)$ [6]

$$\Theta\left((1-\Theta_2^2)\Theta_{11} + 2\Theta_1\Theta_2\Theta_{12} + (1-\Theta_1^2)\Theta_{22}\right) + (1-\sigma)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2) + 2\sigma = 0 \quad (2.3)$$

$$(1-\Theta_1^2)\chi_{22} + 2\Theta_1\Theta_2\chi_{12} + (1-\Theta_2^2)\chi_{11} = 0 \quad (2.4)$$

$$\left(\Theta_i = \frac{\partial\Theta}{\partial u_i}, \quad \Theta_{ij} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial u_i\partial u_j}, \quad \chi_i = \frac{\partial\chi}{\partial u_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{\partial^2\chi}{\partial u_i\partial u_j} \right)$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что для частиц газа, находящихся в области DE_1SF_2 , вектор скорости (u_1, u_2) принадлежит множеству $0 \leq u_1 < \infty, u_2 > -u_1 \operatorname{ctg} 2\alpha$. Неявные формулы

$$x_i = (u_i + \sigma^{-1}\Theta\Theta_i)t + \chi_i \quad (2.5)$$

задают течения газа в области двойной волны. Граничные условия для функций $\Theta = \Theta(u_1, u_2)$ и $\chi = \chi(u_1, u_2)$ соответствуют условию примыкания двойной волны к простым. Для взаимодействия двух одинаковых простых волн течение газа будет симметричным относительно прямой OS_* , в этом случае достаточно найти решение в области DE_1S . На отрезке E_1S выполняется условие примыкания двух волн разных рангов, на отрезке DS выполнено условие непротекания $u_1 = u_2 \operatorname{ctg} \alpha$.

3. Согласованный случай. Если величина угла α определяется соотношением (1.1), то решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\Theta = \sigma + hu_1 + u_2 \quad (3.1)$$

Общее решение уравнения (2.4) представим в форме [5]

$$\chi = \Psi_1(u_1) + \Psi_2(\eta), \quad \eta = u_1 + \delta u_2, \quad \delta = \sqrt{(\gamma+1)(3-\gamma)}/(\gamma-1)$$

Производные $\Psi_1'(u_1)$ и $\Psi_2'(\eta)$ определяются из условия примыкания двойной волны к простым [5]

$$\Psi_1'(u_1) = -\kappa \left\{ (1+hu_1)z_2(\kappa u_1) - f_2[z_2(\kappa u_1)] \right\}$$

$$\Psi_2'(\eta) = -\frac{1}{\delta} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{\eta}{\delta} \right) z_1\left(\frac{\eta}{\delta}\right) - f_1\left[z_1\left(\frac{\eta}{\delta}\right)\right] \right\}, \quad \kappa = \frac{\sigma}{\delta}$$

Таким образом, течение газа в области DE_1EE_2 задается формулами

$$x_1 = r_*h + (u_1 + \sigma^{-1}(\sigma + hu_1 + u_2)h)\tau + g_1(u_1) + \delta^{-1}g_2(\eta) \quad (3.2)$$

$$x_2 = r_* + \left(1 + \frac{h}{\sigma}u_1 + \frac{\gamma+1}{2}u_2 \right)\tau + g_2(\eta)$$

$$g_1(u_1) = \Psi_1'(u_1) - r_*h - \frac{t_* - r_*}{\delta} + \left(h + \frac{3}{3-\gamma}u_1 \right)t_*$$

$$g_2(\eta) = \delta\Psi_2'(\eta) - r_* + \left(1 + \frac{h}{\sigma}\eta \right)t_*$$

Здесь $\tau = t - t_*$, r_* — длина отрезков M_*F_{1*} и N_*F_{2*} (фиг. 1). Параметр r_* задает положение прямолинейных частей поршня (отрезки E_1F_1 и E_2F_2) в финальный момент времени t_* .

Законы движения плоских частей поршня (функции f_1 и f_2) определяют функции g_1 и g_2 . Рассматриваются волны Римана, в которых градиентная катастрофа возникает только в финальный момент времени, тогда в области интерференции одномерных течений до финального момента градиентной катастрофы не происходит [5]. Кроме того, плотность газа на поверхности поршня в финальный момент должна быть бесконечна. Если эти ограничения выполнены, то g_1 и g_2 не возрастают на промежутке $[0, +\infty)$, $g_2(0) = 1 - r_*$, $g_1(0) = h(1 - r_*)$, $g_1(\infty) = g_2(\infty) = 0$. Для случая автомодельного сжатия $g_1 = g_2 = 0$, $r_* = 1$. Траектории частиц определяются из уравнения

$$dx_i/d\tau = u_i(x_1, x_2, \tau), \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

Формулы (3.2) неявно определяют функции $u_i(x_1, x_2, \tau)$, отсутствие градиентной катастрофы обеспечивает разрешимость уравнений (3.2) относительно компонент скорости [5]. Рассматриваемый класс решений содержит функциональный произвол, функции g_1 и g_2 .

4. Согласованное взаимодействие неавтомодельных волн Римана. Из монотонности функций g_1 и g_2 следует, что функции $x_i(u_1, u_2, \tau)$, $i = 1, 2$, заданные формулами (3.2), при фиксированном τ , убывают по u_1 и u_2 (свойство монотонного убывания).

Утверждение 1. Рассмотрим подвижную область, ограниченную условием

$$x_2 \leq f_1(\tau) \quad (4.1)$$

Частицы газа, находившиеся в области (4.1) в некоторый момент времени $\tau_1 \in [-1, 0)$, при $\tau > \tau_1$ будут оставаться в этой области.

Доказательство. Возьмем частицу газа, находящуюся в области (4.1). Координаты и скорость выбранной частицы обозначим $(x_1(\tau), x_2(\tau))$ и $(u_1(\tau), u_2(\tau))$, соответственно. Координата x_2 точки E_1 равна $f_1(\tau)$, скорость частицы газа, находящейся в точке E_1 , равна $(0, f_1'(\tau))$. Предположим, что в некоторый момент времени $\tau < 0$ частица $(x_1(\tau), x_2(\tau))$ выходит из объема (4.1), т.е.

$$x_2(\tau) = f_1(\tau) \quad (4.2)$$

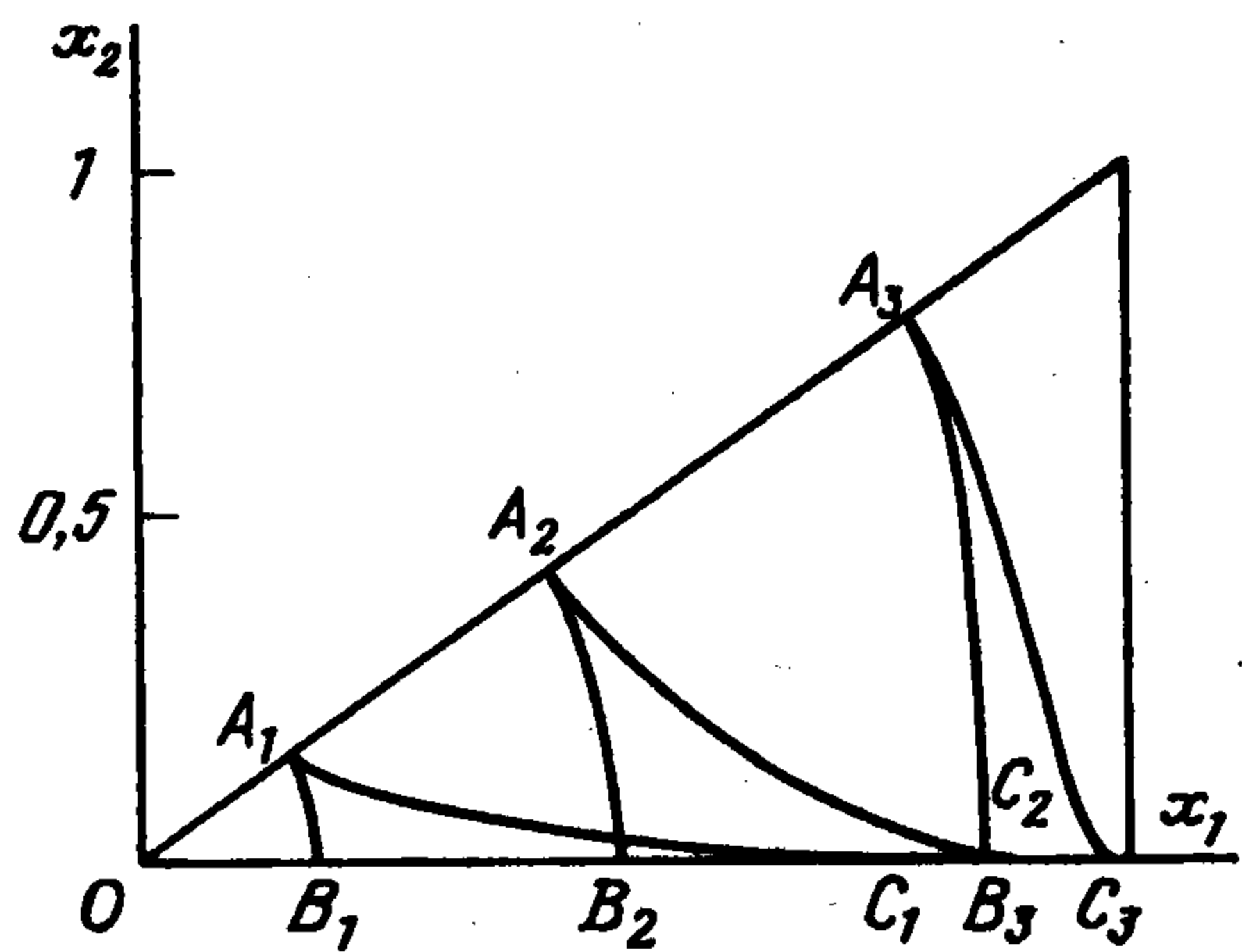
$$u_2(\tau) > f_1(\tau), \quad u_1(\tau) \geq 0 \quad (4.3)$$

Для соотношения скоростей, заданного формулой (4.3), из свойства монотонного убывания следует, что $x_2(\tau) < f_1(\tau)$; это противоречит предположению (4.2). Следовательно, точка должна оставаться в области (4.1).

Утверждение 2. В финальный момент времени ($\tau_* = 0$) криволинейная часть поршня (линия DE_1) совпадает с отрезком D_*E_{1*} , лежащем на прямой $x_2 = r_*$.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что криволинейная часть поршня находится в области (4.1); в частности, в финальный момент времени для точек линии DE_1 выполняется условие $x_2 \leq r_*$, r_* — координата x_2 точки E_{1*} . Докажем, что при $\tau = \tau_*$ для точек линии DE_1 выполняется равенство $x_2 = r_*$. Предположим противное, т.е. что для части линии DE_1 выполняется строгое неравенство $x_2 < r_*$. Из формул (3.2) следует, что скорость этих частиц бесконечна; значит, величина плотности также бесконечна. Таким образом, в некотором конечном объеме, прилегающем к поршню, в финальный момент плотность будет бесконечна, что невозможно при конечной массе газа. Следовательно, последнее предположение не верно, поршень совпадает с отрезком D_*E_{1*} .

На фиг. 1 изображены сжимающие поршни в некоторый момент $\tau_1 \in (-1; \tau_*)$. Прямые AF_1 и BF_2 проведены, соответственно, через отрезки E_1F_1 и E_2F_2 . Из утверждения 1 следует, что для частиц газа, находящихся в области DAE_1 , при $\tau \in [\tau_1, \tau_*]$ выполняется неравенство $x_2(\tau) \leq f_1(\tau)$. В частности, согласно утверждению $2x_2(\tau_*) = f_1(\tau_*) = r_*$. Таким образом, в финальный момент эта часть газа сожмется в отрезок $D^*E_1^*$. Аналогично, область DBE_2 сожмется в отрезок $D^*E_2^*$. Тогда область $DACB$ – пересечение областей DAE_1 и DBE_2 – сожмется в точку D^* . Форма областей, сжимающихся в точку и в отрезки, находилась приближенно путем численного интегрирования уравнений движения частиц (3.3). Результаты расчетов для $r_* = r_i$ ($r_i = 0,3; 0,6; 0,9$) представлены на фиг. 2. Области $A_iB_iC_i$ сжимаются в отрезок $D^*E_1^*$, области OA_iB_i – в точку D^* .



Фиг. 2

Степень кумуляции скорости. В дальнейшем будем рассматривать случай взаимодействия одинаковых волн Римана. Картина течения газа будет симметрична относительно прямой OS^* , для частиц газа, находящихся в области DE_1S , вектор скорости (u_1, u_2) принадлежит множеству, определяемому неравенствами

$$0 \leq u_1 < \infty, \quad u_2 > hu_1 \quad (4.4)$$

Найдем асимптотику роста скорости точки D при $\tau \rightarrow 0$. Для точки, движущейся вдоль оси симметрии $x_1 = hx_2$, компоненты вектора скорости связаны соотношением $u_1 = hu_2$. Тогда

$$x_2 = r_* + (1 + h^2u_2)\tau + g_2(au_2), \quad a = \delta + h \quad (4.5)$$

Дифференцируем (4.5) по времени, разрешаем относительно $d\tau/du_2$, в результате получаем линейное уравнение

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{h^2}{(1-h^2)u_2 - 1} \tau + \frac{ag'_2(au_2)}{(1-h^2)u_2 - 1}$$

которое интегрируется в квадратурах

$$\tau = (I(u_2) - k) \left(u_2 + 1 + \frac{1}{\beta} \right)^{1/\beta} \quad (4.6)$$

$$I(u_2) = -a \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{u_2} \int_0^{u_2} g'_2(au_2) \left(u_2 + 1 + \frac{1}{\beta} \right)^{-1-1/\beta} du_2 \quad (4.7)$$

$$\left(k = -\tau_0 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{-1/\beta}, \quad \beta = \frac{2-2\gamma}{\gamma+1} \right)$$

(τ_0 – момент начала движения частицы). Интеграл $I(u_2) \leq k$, так как иначе функция τ станет положительной.

Докажем, что $\lim_{u_2 \rightarrow \infty} I(u_2) < k_D$, где k_D – значение постоянной k для частицы, находящейся в точке D . Так как область $DACB$ (фиг. 1) сжимается в точку D^* , скорость точки C растет неограниченно. Имеем $\lim_{u_2 \rightarrow \infty} I(u_2) \leq k_C$, где k_C – значение постоянной k для точки C . Точка D начинает движение раньше точки C , тогда из

определения постоянной k следует $k_D > k_C$. Таким образом, справедлива оценка $0 < \lim_{u_2 \rightarrow \infty} I(u_2) \leq k_C < k_D$; следовательно, первый множитель в правой части формулы (4.6) не обращается в нуль при $u_2 \rightarrow \infty$. Тогда согласно (4.6)

$$\tau(u) = O\left(u^{\frac{1}{\beta}}\right), \quad u = O((- \tau)^\beta) \quad (4.8)$$

где u – величина скорости точки D , т.е. степень кумуляции, так же как при авто-модельном сжатии, равна β .

Оценка оптической толщины в направлении линии симметрии. Введем функцию

$$H(\tau, C(\tau), E(\tau, \varphi)) = l_{CE}(\tau) = \int_{CE} \rho ds, \quad C(\tau)$$

– закон движения некоторой точки в области $DE_1F_1S \cdot F_2E_2$. Закон движения оптического центра ($C(\tau)$) может не соответствовать траектории некоторой частицы газа. Угол φ задает направление отрезка CE , точка E лежит на границе области, занимаемой газом. Тогда оптическая толщина (ОТ) определяется как $l(\tau) = \max_{C(\tau)} \min_{\varphi} H$.

Аналитически определить величину ОТ не удалось, были получены оценки величины H для различных направлений φ . ОТ вдоль отрезка DS имеет вид

$$l_{DS}(\tau) = \int_{DS} \rho ds = \int_{x_{2D}}^{x_{2S}} \rho(x_1(x_2), x_2, \tau) b dx_2 = b \int_{u_D}^0 \rho(u_1(u_2), u_2) \frac{dx_2}{du_2} du_2, \quad b = \sqrt{1+h^2}$$

Согласно (4.5)

$$\frac{dx_2}{du_2} = h^2 \tau + ag'_2(au_2), \quad \rho(u_2 h, u_2) = (1+h^2 u_2)^\sigma$$

и получаем

$$\frac{1}{b} l_{DS}(\tau) = I_1 + I_2$$

$$I_1 = - \int_0^u (1+h^2 u_2)^\sigma h^2 \tau du_2 = h^2 \tau \int_0^u (1+h^2 u_2)^\sigma du_2$$

$$I_2 = - \int_0^u (1+h^2 u_2)^\sigma ag'_2(au_2) du_2$$

Здесь u – значение u_2 для точки D в момент τ . Учитывая, что $\tau(u) = O(u^{1/\beta})$, получаем оценку

$$\int_0^u (1+h^2 u_2)^\sigma du_2 = O(u^{\sigma+1}), \quad u \rightarrow \infty$$

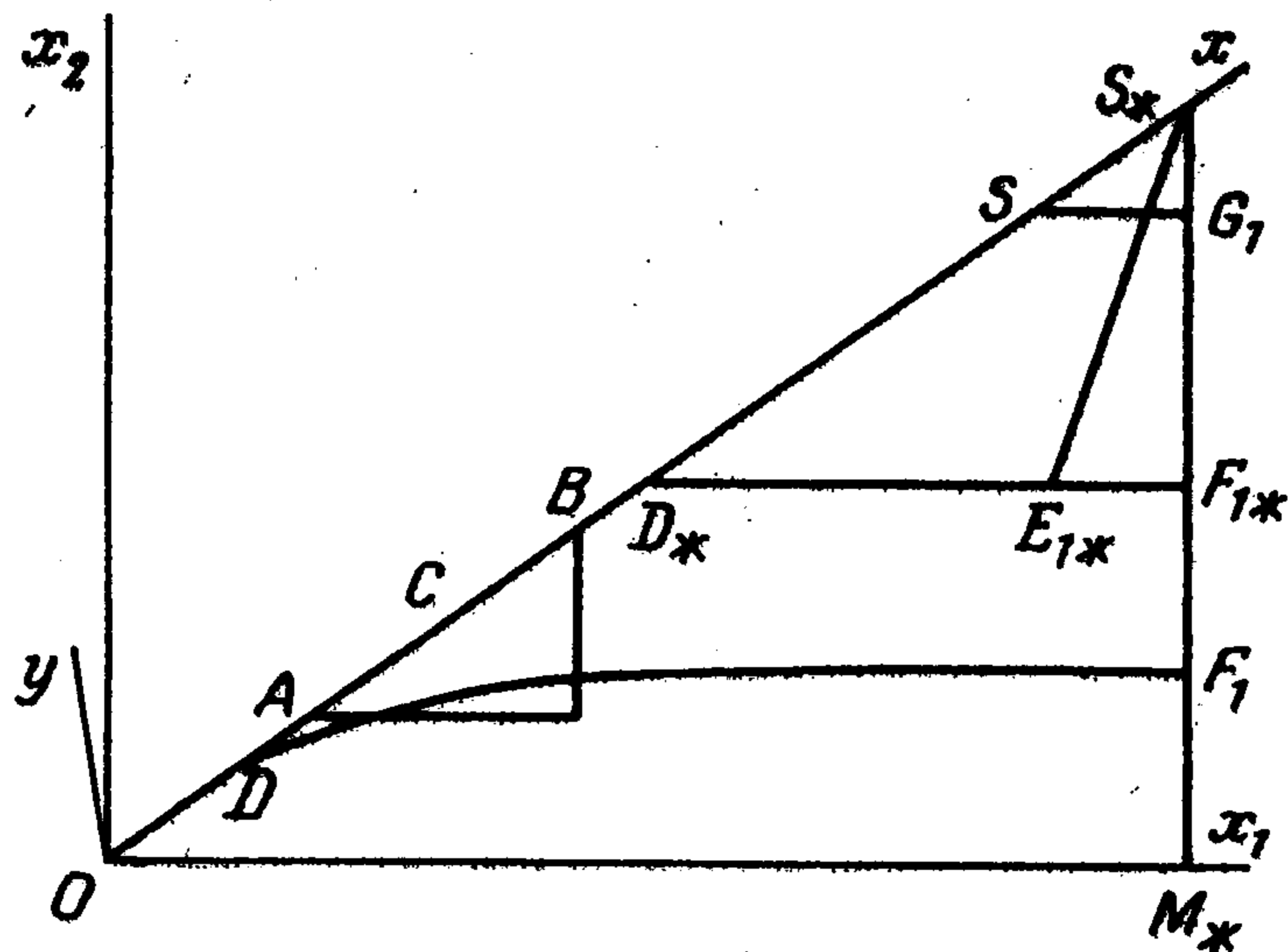
Таким образом, интеграл I_1 является величиной $O(u^{-1/\beta})$ при $u \rightarrow \infty$ и величиной $O(\tau^{-1})$ при $\tau \rightarrow \infty$. Из сходимости интеграла (4.7) следует, что порядок роста величины I_2 меньше, чем $O(u^{-1/\beta})$. Таким образом,

$$\frac{1}{b} l_{DS}(\tau) = I_1 + I_2 = O\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Такая же асимптотика роста ОТ была получена для автомодельного случая [4]. Указанная оценка сохраняется для ОТ вдоль любого отрезка AB , взятого на линии симметрии, если для скоростей точек A и B справедлива оценка (4.8).

Оценка оптической толщины в направлении, отличном от направления линии симметрии.

Утверждение 3. В некоторый момент времени $\tau_1 < 0$ на отрезке DS выберем частицу газа, координаты и скорость которой обозначим соответственно (x, y) и (u, v) . Для координат и скорости некоторой выбранной в области DE_1S частицы введем обозначения (x_1, x_2) и (u_1, u_2) . Тогда 1) если $x_1(\tau_1) < x(\tau_1)$, то для $\tau > \tau_1$ имеем $x_1(\tau) < x(\tau)$; 2) если $y(\tau_1) < x_2(\tau_1)$, то для $\tau > \tau_1$ имеем $y(\tau) < x_2(\tau)$.



Фиг. 3

Доказательство. Предположим, что в некоторый момент τ

$$x_1(\tau) = x(\tau) \quad (4.9)$$

Это означает, что $u_1(\tau) \geq u(\tau)$. Из (4.4) следует, что $u_2 > u_1/h \geq u/h = v$. Тогда согласно свойству монотонного убывания $x_1(\tau) < x(\tau)$, что противоречит предположению (4.9). Первая часть утверждения доказана. Доказательство второй части аналогично.

Введем систему координат Oxy , в которой ось Ox направлена вдоль прямой OS . В некоторый момент времени выберем две частицы газа A и B на оси Ox так, чтобы их координаты подчинялись условию

$$x_D < x_A < x_B \quad (4.10)$$

и для скорости точки B была справедлива оценка (4.8) (фиг. 3). Далее будем рассматривать объем газа, ограниченный прямыми OS , $x_2 = x_{2A}(\tau)$ и $x_1 = x_{1B}(\tau)$, $x_{2A}(\tau)$ — координата x_2 точки A , $x_{1B}(\tau)$ — координата x_1 точки B . Указанную область обозначим $\Omega(\tau)$. Из утверждения 3 следует, что масса газа, заключенного в объеме $\Omega(\tau)$, не убывает. Эта масса газа в произвольный момент времени может быть определена по формуле

$$m = \int_{\Omega(\tau)} \rho(x, y, \tau) dx dy = \int_{x_A}^{x_B} \left(\int_{Y(x)}^0 \rho(x, y, \tau) dy \right) dx = \int_{x_A}^{x_B} l(x, \tau) dx \quad (4.11)$$

(от двойного интеграла перешли к повторному). Здесь $l(x, \tau)$ — ОТ в направлении прямой Oy . По теореме о среднем последнее звено в цепочке равенств (4.11) равно $rl(\xi, \tau)$, $x_A \leq \xi \leq x_B$, $r = x_B - x_A$. Следовательно, $l(\xi, \tau) = m/r$. Из (4.5) и (4.10) следует оценка величины r :

$$r \leq (r_* - x_{2D})h = hu_2\tau \left(\frac{1}{u_2\tau} + h^2 + \frac{g'_2(au_2)}{u_2\tau} \right) \quad (4.12)$$

u_2 — компонента u_2 вектора скорости точки D в момент времени τ . Согласно (4.8) для величины $u_2\tau$ справедливы оценки $O(u_2^{1+1/\beta})$ при $u_2 \rightarrow \infty$ и $O((- \tau)^{-h^2})$ при $\tau \rightarrow 0$. Из сходимости интеграла (4.7) следует, что $\lim_{u_2 \rightarrow \infty} g'_2(au_2)/(u_2\tau) = 0$. Тогда из (4.5) сле-

дует, что асимптотика величины r определяется множителем $u_2\tau = O((- \tau)^{-h^2})$. Для величины ОТ получаем оценку

$$l(\xi, \tau) = m/r = O((- \tau)^{-h^2}) \quad (4.13)$$

В качестве оптического центра возьмем точку $C = (\xi, 0)$ (в системе Oxy). Тогда

$$l_{DS} > l_{CD} \geq l_{DA}, \quad l_{DS} > l_{CS} \geq l_{BS}$$

отсюда следует справедливость оценок

$$\frac{c_1}{\tau} < l_{CD} < \frac{c_2}{\tau}, \quad \frac{c_3}{\tau} < l_{CS} < \frac{c_4}{\tau}$$

где $c_i (i = 1, \dots, 4)$ – положительные постоянные. При этом ОТ в направлении прямой Oy не меньше величины $l(\xi, \tau)$, для которой справедлива оценка (4.13). Аналогичные результаты были получены для автомодельного случая [4].

Оценка затрат энергии. Работа подвижного поршня идет на приращение величин кинетической E_k и внутренней E_i энергии газа. По определению

$$E_k = \int_V \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \rho dV$$

а для рассматриваемого уравнения состояния

$$E_i = E_{i1} \int_V p dV + E_{i2}, \quad E_{i1}, E_{i2} = \text{const}$$

Обозначим длину вектора скорости через u . Справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$r = c^\sigma = O(u^\sigma), \quad p = Ar^\gamma = O(u^{\sigma+2}), \quad u \rightarrow \infty$$

Следовательно, подынтегральные выражения в формулах для потенциальной и кинетической энергии при $u \rightarrow \infty$ имеют одинаковый порядок: $O(u^{\sigma+2})$. Поэтому для оценки затрат энергии достаточно оценить значение кинетической энергии. С этой целью оценим величины скорости в окрестности точки D на фиг. 1.

Утверждение 4. Возьмем частицу газа на линии симметрии, для скорости которой выполняется оценка (4.8); обозначим выбранную частицу A . Рассмотрим подвижную область

$$x_2 < x_1/h, \quad x_1 < x_{1A} \quad (4.14)$$

Существуют положительные постоянные k_1, k_2 , такие, что для любой точки области (4.14), при любом τ имеем $k_1 u > u_D > k_2 u$, u_D и u – величина скорости точки D и точек из области (4.14) соответственно.

Доказательство. Предположим противное: для любых постоянных k_1, k_2 существуют момент τ и точка из области (4.14), такие, что $k_1 u \leq u_D$ или $u_D \leq k_2 u$. Для скорости точек A и D справедлива оценка (4.8); следовательно, существует постоянная $k > 0$, для которой $u_D < k u_A$, для моментов времени, близких к финальному. Возьмем $k_1 = kb, k_2 < (3 - \gamma)/2$.

Предположим, что в указанном объеме существует частица, для которой $k_1 u \leq u_D$. Тогда $k_1 u_2 (u_1^2 / u_2^2 + 1)^{1/2} < u_{2D} b < k u_{2A} b$, и следовательно, $u_2 < u_{2A}$, $u_{1A} = u_{2A} h > u_2 h > u_1$. Из свойства монотонного убывания следует $x_2 > x_{2A}$. Это противоречит второй части утверждения 3.

Предположим, что существует частица, для которой $u_D \leq k_2 u$, т.е. $(u_{1D}^2 + u_{2D}^2)^{1/2} < k_2 (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$. Тогда $u_{2D} < u_{2D} b (u_1^2 / u_2^2 + 1)^{-1/2} < k_2 u_2$. Кроме того, $u_1 > 0$. Из формул (3.2) и

(4.5) и свойства монотонного убывания следует, что $x_2 < x_{2D}$, что противоречит второй части утверждения 3.

Тогда для кинетической энергии газа, заключенного в объеме (4.14) существует следующая оценка:

$$E_k \in \left[\frac{mu_{\min}^2}{2}, \frac{mu_{\max}^2}{2} \right], \quad m = \int_V \rho dV$$

где m – масса газа, заключенного в объеме (4.14), u_{\min} и u_{\max} – минимальная и максимальная величины скорости в этом объеме. Из утверждения 4 следует, что в области (4.14) для полной энергии газа справедлива оценка

$$c_1 u_D^2 < E < c_2 u_D^2, \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0$$

Учитывая оценку (4.8) величины скорости точки D , получаем $c_1 (-\tau)^{2\beta} < E < c_2 (-\tau)^{2\beta}$. Учет остального объема газа не изменяет приведенную оценку, так как скорость в этой части меньше, чем скорость точки D .

Для автомодельного сжатия была получена оценка $E = O((-\tau)^{2\beta})$ [3].

5. Несогласованное взаимодействие автомодельных волн Римана. Картина течения газа будет симметричной относительно прямой OS_* , поэтому далее рассматривается только одна половина призмы – OS_*M_* . Течение в автомодельной волне Римана (трапеция $E_1F_1G_1S$, фиг. 1) определяется формулами

$$\Theta_R = \sigma + u_2, \quad x_2 = r_* + (u_2 + \sigma^{-1} \Theta_R) \tau$$

В области DE_1S течение газа является двойной автомодельной волной, в которой координаты частиц и компоненты вектора скорости связаны соотношениями

$$x_i = (u_i + \sigma^{-1} \Theta \Theta_i) \tau + g_i, \quad g_1 = r_* \text{ctg} \alpha, \quad g_2 = r_* \quad (5.1)$$

Функция $\Theta(u_1, u_2)$ находится из уравнения (2.3). Присоединению двойной волны к простой, в которой $u_1 = 0$, соответствует условие

$$\Theta(0, u_2) = \Theta_R(u_2) \quad (5.2)$$

Симметрия относительно прямой $x_1 = x_2 \text{ctg} \alpha$ (прямая OS_*) приводит к выполнению условия непротекания $u_1 = u_2 \text{ctg} \alpha$ на этой прямой. Из формул (5.1) получаем, что условию непротекания на прямой OS_* соответствует второе граничное условие

$$\Theta_1(u_2 \text{ctg} \alpha, u_2) = \Theta_2(u_2 \text{ctg} \alpha, u_2) \text{ctg} \alpha \quad (5.3)$$

Уравнение двойных волн необходимо решить на множестве

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \text{ctg} \alpha, \quad 0 \leq u_2 < \infty \quad (5.4)$$

Кроме того, для численного решения уравнения (2.3) необходимо определить значение $\Theta_1(0, u_2)$. Из (5.2) следует, что

$$\Theta_2(0, u_2) = 1, \quad \Theta_{22}(0, u_2) = 0 \quad (5.5)$$

Подставив эти значения в уравнение (2.3) и введя обозначения

$$x = \Theta(0, u_2) = \sigma + u_2, \quad y(x) = \Theta_1^2(0, u_2)$$

получим следующее уравнение, выполняющееся на прямой $u_1 = 0$ (имеется в виду прямая в плоскости годографа, Ou_1u_2):

$$x dy / dx + (1 - \sigma) y = -(1 + \sigma)$$

решив которое, получаем

$$\Theta_1(0, u_2) = [k(\sigma + u_2)^{\sigma-1} + h^2]^{1/2}, \quad k = \text{const} \quad (5.6)$$

Подставив в условие (5.3) $u_1 = u_2 = 0$, получим $\Theta_1(0, 0) = \Theta_2(0, 0) \text{ctg } \alpha = \text{ctg } \alpha$. Из этого равенства находим

$$k = \sigma^{1-\sigma} (\text{ctg}^2 \alpha - h^2)$$

Из (5.2) следует, что $\Theta_2(0, u_2) = 1$. Подставив это значение в уравнение направления характеристик

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{\Theta_1 \Theta_2 \pm \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 - 1}}{1 - \Theta_1^2}$$

убеждаемся, что прямая $u_1 = 0$ – характеристика (по крайней мере, отрезок этой прямой, на котором $\Theta_1 \geq 0$).

Рассмотрим случай $\alpha < \alpha_0$. Необходимо решить уравнение (2.3), удовлетворяющее граничным условиям (5.2), (5.3) и (5.6). Таким образом, поставлена смешанная задача с граничными условиями на характеристической прямой $u_1 = 0$ и дополнительным условием вдоль прямой, не являющейся характеристикой. Эта задача решалась численно методом характеристик [4].

Если $\alpha > \alpha_0$, то $k < 0$, при некотором значении $u_2 = u_c$ производная $\Theta_1(0, u_c)$ становится равной нулю. Подставляя значения $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 1$ в уравнения направления характеристик, убеждаемся, что направления характеристик двух семейств в этой точке совпадают, т.е. при $\alpha > \alpha_0$ уравнение (2.3) не является гиперболическим во всей области (5.4). Линию вырождения, задаваемую соотношением $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 = 1$, удастся найти только численно, решая уравнение (2.3) методом характеристик.

Ударная волна на границе простой и двойной волн. В момент образования ударной волны якобиан преобразования (5.1) становится равным нулю. Рассмотрим выражение

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{(t-1)} \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)} = \left(1 + \frac{\Theta_1^2 + \Theta_2 \Theta_{11}}{\sigma}\right) \left(1 + \frac{\Theta_2^2 + \Theta_1 \Theta_{22}}{\sigma}\right) - \left(\frac{\Theta_1 \Theta_2 + \Theta_1 \Theta_{12}}{\sigma}\right)^2$$

Линии примыкания двойной волны к простой соответствует прямая $u_1 = 0$ в плоскости годографа, вдоль которой

$$J(0, u_2) = \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \left(1 + \frac{\Theta_1^2 + \Theta_1 \Theta_{11}}{\sigma}\right) - \left(\frac{\Theta_1 \Theta_2 + \Theta_1 \Theta_{12}}{\sigma}\right)^2 \quad (5.7)$$

$$\Theta_{12}(0, u_2) = k(\sigma - 1) \Theta^{\sigma-2} (2\Theta_1)^{-1}$$

Найдем производную $\Theta_{11}(0, u_2)$. Дифференцируя уравнение (2.3) по переменной u_1 , получаем

$$\begin{aligned} & \Theta_1((1 - \Theta_2^2)\Theta_{11} + 2\Theta_1\Theta_2\Theta_{12} + (1 - \Theta_1^2)\Theta_{22}) + \\ & + \Theta[(1 - \Theta_2^2)\Theta_{111} + 2\Theta_1\Theta_{12}\Theta_{12} + 2\Theta_1\Theta_2\Theta_{112} - 2\Theta_1\Theta_{11}\Theta_{22} + \\ & + (1 - \Theta_1^2)\Theta_{122}] + (1 - \sigma)(2\Theta_1\Theta_{11} + 2\Theta_2\Theta_{12}) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Введем обозначения

$$x = \Theta(0, u_2), \quad y(x) = \Theta_{11}(0, u_2), \quad y'(x) = \Theta_{112}(0, u_2)$$

$$a(x) = \Theta_1(0, u_2), \quad a'(x) = \Theta_{12}(0, u_2), \quad a''(x) = \Theta_{122}(0, u_2)$$

Учитывая, что для прямой u_1 выполняются равенства (5.5), уравнение (5.8) записываем в виде

$$y' = \frac{\sigma - 1}{x} \left(y - \frac{a'}{a} \right) - \frac{aa'}{x} - (a')^2 - \frac{(1 - a^2)a''}{2a} \quad (5.9)$$

Решение в элементарных функциях удалось найти только для некоторых значений показателя адиабаты, в остальных случаях это линейное дифференциальное уравнение решалось численно. Для $\gamma = 5/3$ общее решение имеет вид

$$\Theta_{11}(0, u_2) = -\frac{\Theta_R}{16(k\Theta_R^2 + 2)} \times \begin{cases} f, & \alpha < \alpha_0 \\ g, & \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

$$f = (17\sqrt{2k^3}\Theta_R \operatorname{arctg}(\sqrt{k/2}\Theta_R) - 32\Theta_R l)(k\Theta_R^2 + 2) + 2k(k\Theta_R^2 + 4)$$

$$g = -(17\sqrt{-2k^3}\Theta_R \operatorname{arcth}(\sqrt{-k/2}\Theta_R) + 32\Theta_R l)(k\Theta_R^2 + 2) - 2k(k\Theta_R^2 + 4), \quad l = \text{const}$$

Постоянную l найдем из условия (5.3), дифференцируя которое вдоль прямой $u_2 = u_1 \operatorname{tg} \alpha$, получим соотношения, выполняющиеся на этой прямой,

$$\frac{d\Theta_n}{du_1} = \Theta_{1n} + \operatorname{tg} \alpha \Theta_{n2}, \quad n = 1, 2; \quad \frac{d\Theta_2}{du_1} = \operatorname{tg} \alpha \frac{d\Theta_1}{du_1}$$

Отсюда находим значение производной $\Theta_{11}(0, 0) = (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)\Theta_{12}(0, 0)$. Подставив полученное значение производной $\Theta_{11}(0, u_2)$ в выражение (5.7), убеждаемся, что если угол $\alpha \neq \alpha_0$, то существует некоторое значение $u \in (0, +\infty)$, при котором $J(0, u) = 0$. Таким образом, ударная волна появляется, когда скорости частиц газа и их плотность конечны. Когда $\alpha > \alpha_0$, ударная волна образуется до линии параболического вырождения уравнения двойных волн. Величина скорости, при которой возникает сильный разрыв, меньше соответствующей величины для $\alpha < \alpha_0$. С точки зрения получения больших локальных плотностей интереснее рассматривать случай $\alpha < \alpha_0$. Численное решение уравнения (5.9) для разных значений α и γ приводит к таким же выводам.

Результаты численных расчетов. После нахождения функции Θ течение газа в области двойной волны определяется по формулам (5.1). Теперь надо указать закон движения поршня, обеспечивающий такое сжатие. Эта задача сводится к интегрированию системы

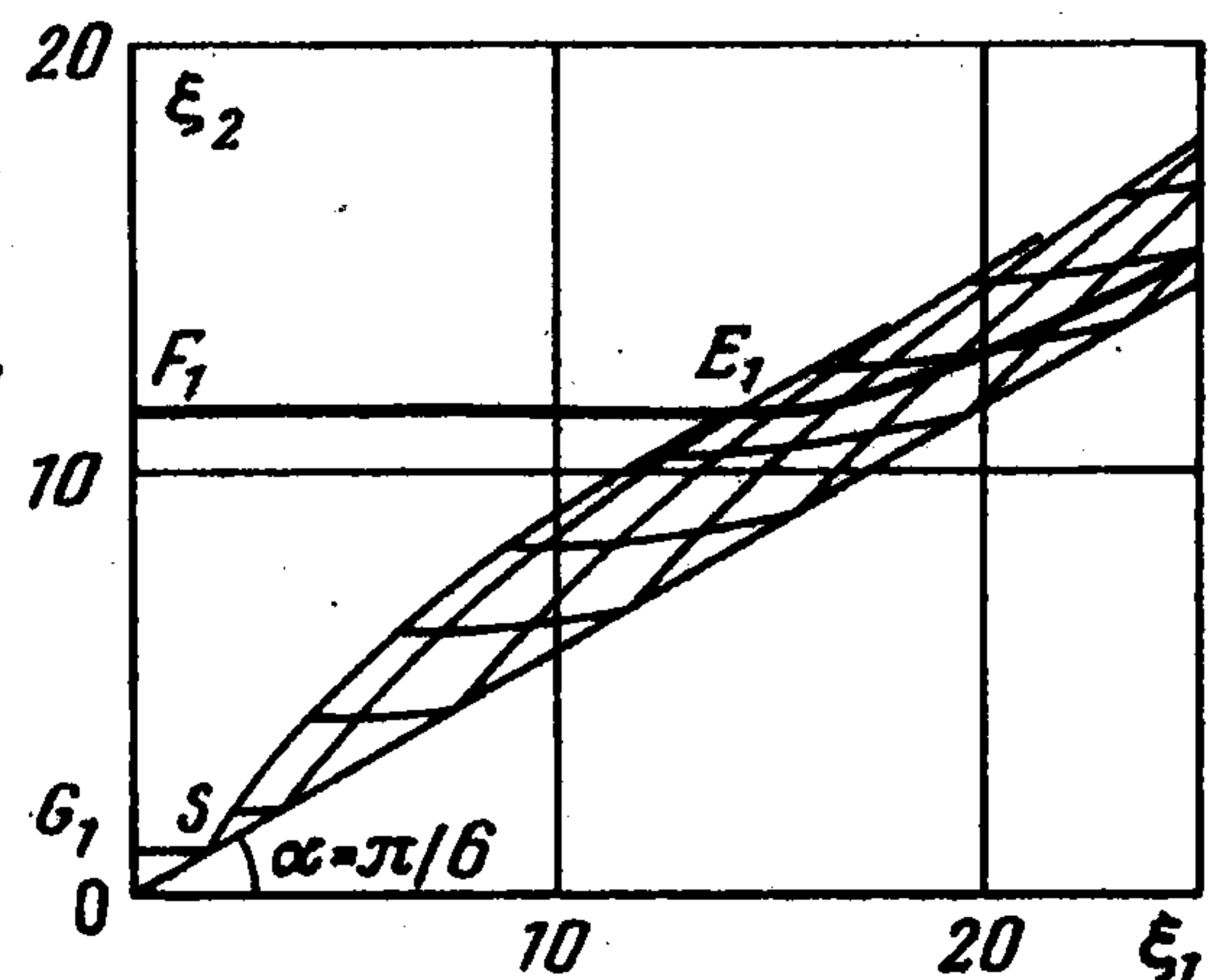
$$dx_1 / dt = u_1, \quad dx_2 / dt = u_2$$

Компоненты вектора скорости определяются из (5.1). Начальные условия соответствуют условию примыкания двойной волны к простой в момент $t = t_0$ в точке $E_1 F_1$ (фиг. 1).

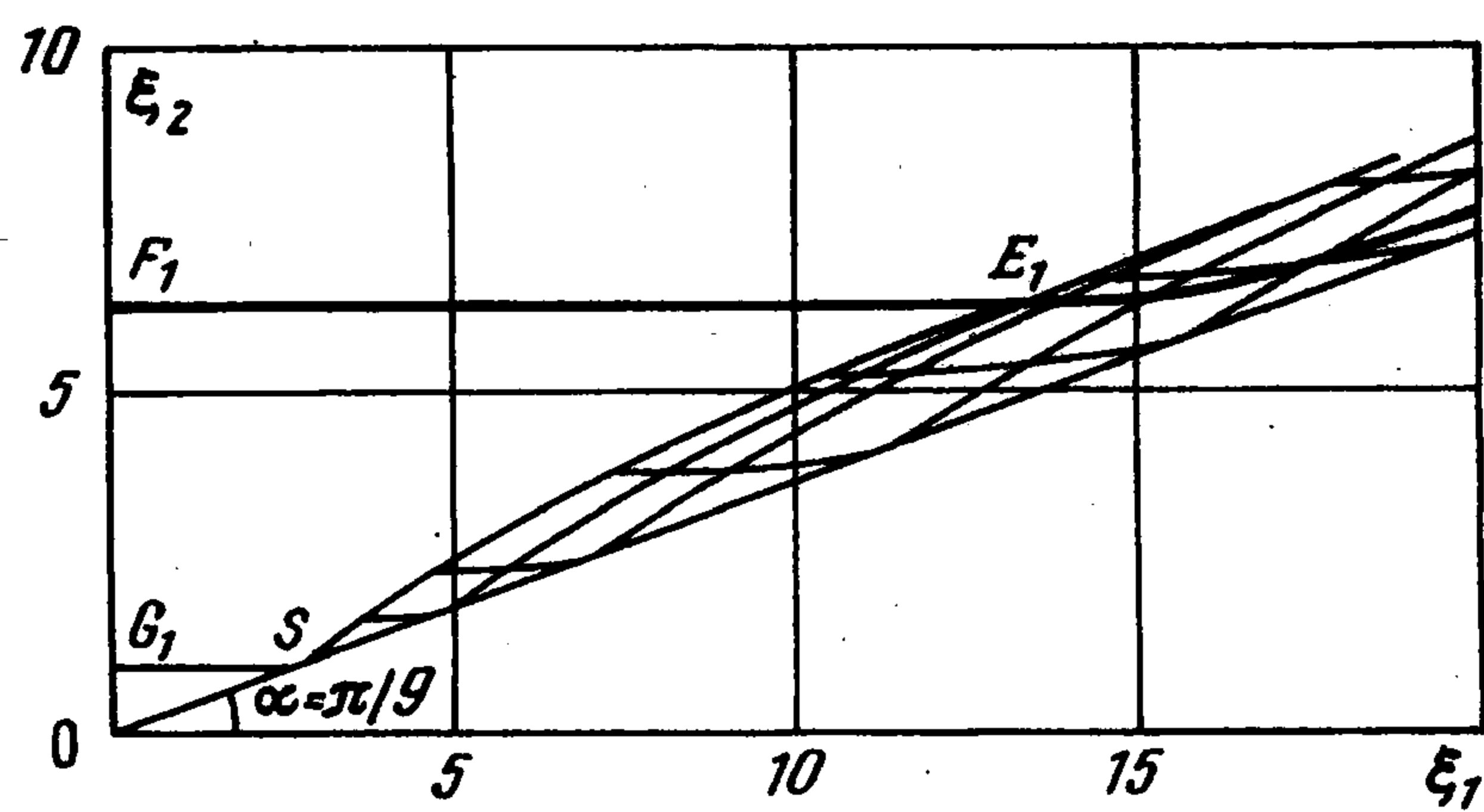
$$u_1(t_0) = 0, \quad u_2(t_0) = u_R(t_0) = \sigma(1 - t_0)^{-1/(1+\sigma)} - \sigma$$

u_R — скорость прямой части поршня (отрезок $E_1 F_1$, фиг. 1).

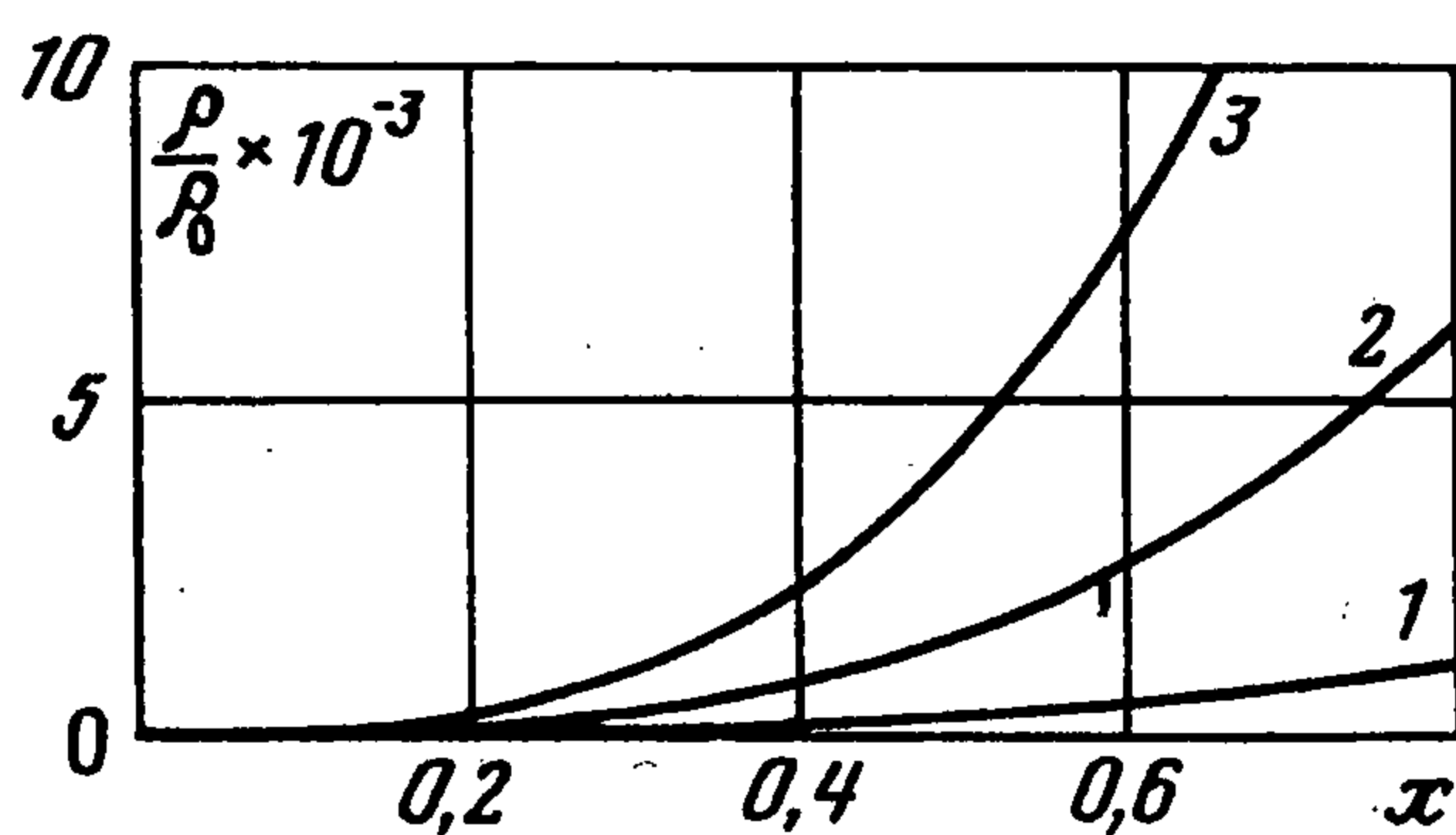
Закон движения поршня находился численно. Проведены расчеты, определяющие какую степень сжатия можно получить при взаимодействии автомодельных волн Римана. Так, для $\gamma = 5/3$ (одноатомный газ), максимальная локальная степень сжатия (в точке D , фиг. 1) на момент появления ударной волны равна 19 000, при $\alpha = \pi/6$, а при



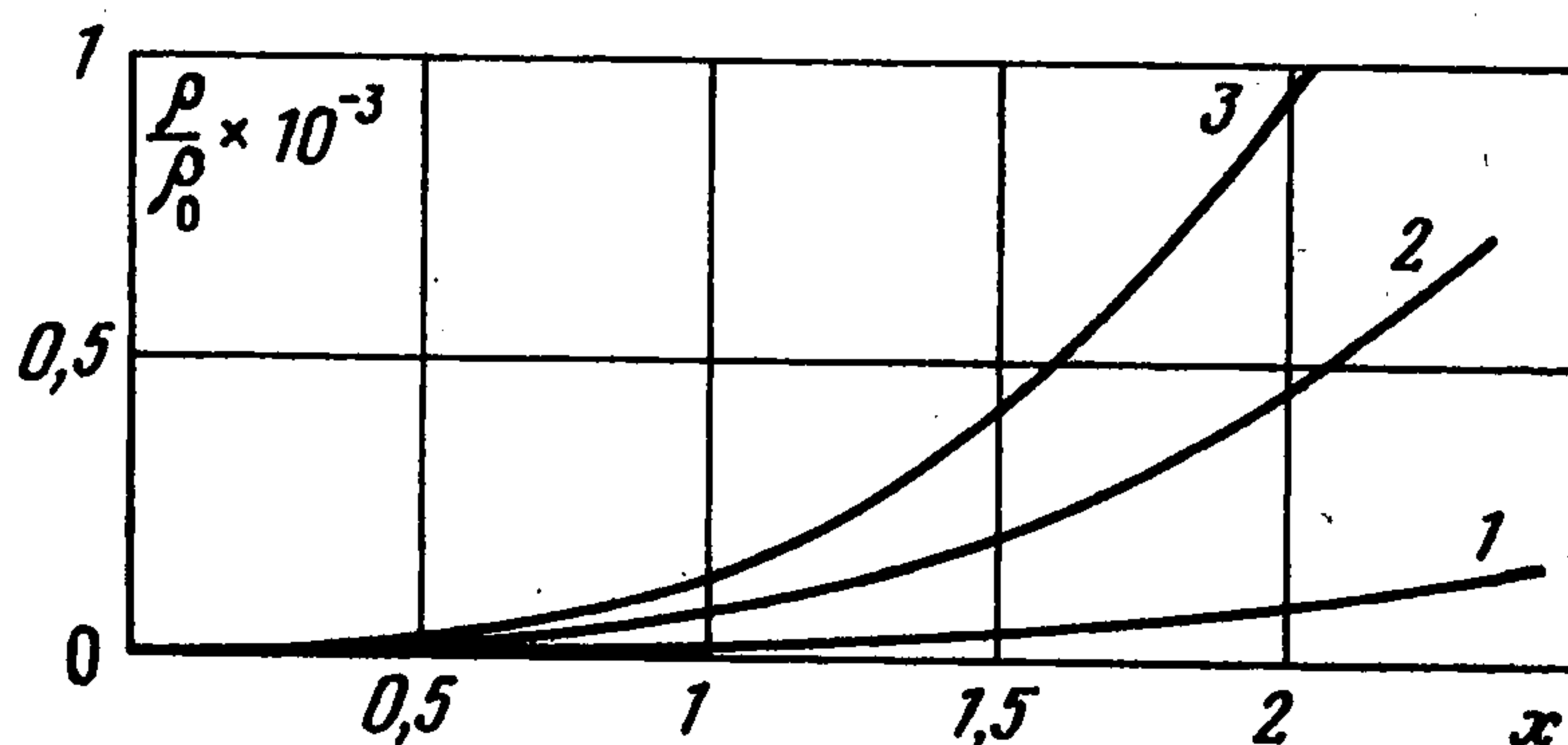
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

$\alpha = \pi/9$ плотность возрастает только в 1450 раз. Чем ближе величина угла к согласованному значению, тем большей степени сжатия удастся достичь в момент появления сильного разрыва.

Расчеты проводились на сетках, различающихся выбором шага разбиения прямой $u_1 = 0$ в плоскости годографа, при минимальном шаге 0,005. Получено хорошее совпадение результатов расчетов, проведенных на сетках с шагами разбиения, различающимися в два раза.

Фиг. 4–7 построены по расчетам сжатия газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. На фиг. 4, 5 приведены фрагменты полей характеристик в плоскости автомодельных переменных $\xi_i = (x_i - g_i)/\tau$, а также положения в этой плоскости (в момент возникновения ударной волны) подвижных поршней и границ распространения звукового возмущения. Приняты те же обозначения, что и на фиг. 1, E_1F_1 – прямолинейная часть поршня, $E_1F_1G_1S$ – область, в которой течение газа представляет собой волну Римана. Ударная волна возникает на поверхности поршня, на границе прямой и криволинейной частей (точка E_1 , фиг. 1). В точке E_1 происходит пересечение без касания характеристик одного семейства, при этом соответствующие характеристики в плоскости годографа не пересекаются. Подвижный поршень изображен неполностью, так как оставшаяся часть поршня сильно вытянута вдоль линии симметрии и практически сливается с ней.

Распределение плотности вдоль прямой OS_* (при некоторых фиксированных моментах времени, расстояние x отсчитывается от точки S_* , плотность невозмущенного газа равна ρ_0) показано на фиг. 6 для $\alpha = \pi/6$, при $t = 0,979; 0,988; 0,992$ и на фиг. 7 для $\alpha = \pi/9$, при $t = 0,907; 0,947; 0,963$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Заключительные замечания. Асимптотические оценки для неавтомоделного случая показывают, что важные асимптотические свойства взаимодействия автомоделных волн Римана могут сохраняться при существенном изменении закона движения сжимающего поршня, что позволяет говорить о частичной устойчивости этого процесса.

Однако взаимодействие автомоделных волн сжатия Римана под углом, отличным от согласованного, не дает возможности получить неограниченный рост плотности газа без образования ударных волн. Хотя численные расчеты показали, что максимальная локальная плотность может увеличиваться в десятки тысяч раз по сравнению с невозмущенным состоянием, для решения задачи неограниченного безударного сжатия необходимо привлекать новые классы течений [2].

Автор благодарит А.Ф. Сидорова за постановку задачи и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00721а, 96-15-96246).

ЛИТЕРАТУРА

1. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 172 с.
2. Sidorov A.F. Mathematical modelling of the processes of unshocked gas compression // Russ. J. Numer. Analysis and Math. Modelling. 1995. V. 10. № 3. P. 255–276.
3. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 3. С. 548–552.
4. Сидоров А.Ф. Кумуляция энергии в двумерных процессах безударного сжатия газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 1. С. 41–44.
5. Сидоров А.Ф. Двумерные процессы неограниченного безударного сжатия газа // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 812–821.
6. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 639 с.
8. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. О точных решениях некоторых краевых задач газовой динамики в классах двойных и тройных волн // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. 1978. Вып. 25. С. 52–66.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
24.VI.1998