

УДК 533.6.011

© 1999 г. И.А. Башкирцева

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О БЕЗУДАРНОМ КОНИЧЕСКОМ СЖАТИИ ГАЗА

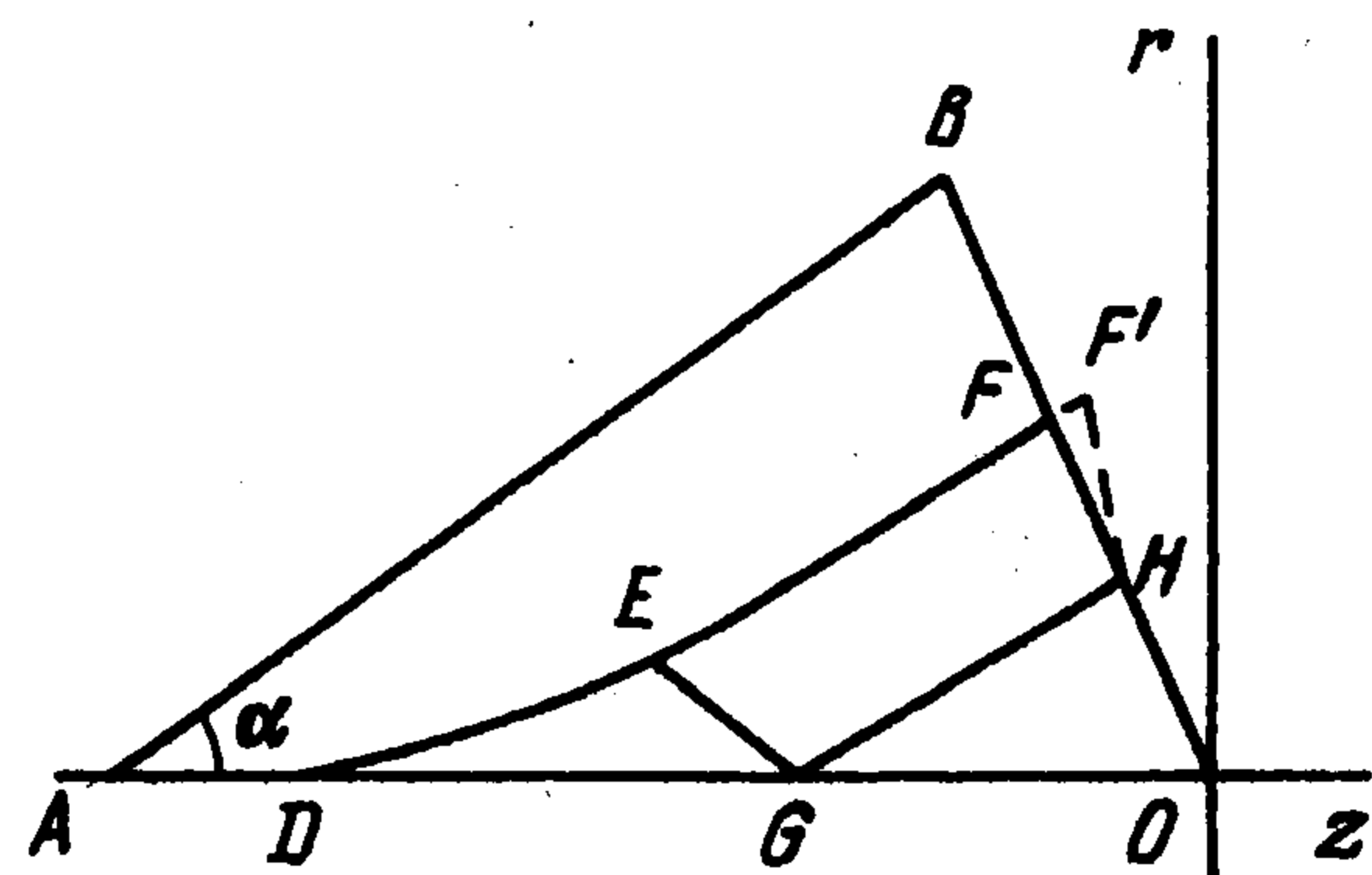
Исследуется двумерная нестационарная автомодельная задача о неограниченном безударном коническом сжатии газа. В области, ограниченной слабым разрывом и фронтом звукового возмущения, построено решение в виде характеристического ряда. Для коэффициентов ряда получена рекуррентная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для очередного приближения детально исследована соответствующая краевая задача, найдена аналитически фундаментальная система решений и исследована ее асимптотика. Выделены существенно независимые решения, приложены разные способы отыскания решения неоднородного уравнения с нужной асимптотикой. Построен алгоритм расчета течений газа при движении поршня с учетом первых членов ряда. Проведено сравнение с расчетами, выполненными по методу характеристик.

На основе точных двумерных и трехмерных уравнений газовой динамики были исследованы процессы безударного неограниченного сжатия идеального политропного газа, покоящегося в начальный момент времени внутри призм и конусообразных тел; для согласованных между собой показателя адиабаты и начальных геометрических параметров сжимаемого газа были построены законы управления движением подвижных поршней, приводящих к неограниченному сжатию [1–3]. Было получено и решено упрощенное линейное уравнение, описывающее течение в окрестности оси вращения за слабым разрывом [4].

Данная работа посвящена дальнейшему детальному изучению структуры решения задачи Гурса в области, ограниченной слабым разрывом конической формы и фронтом звукового возмущения. После специальной замены переменных построено решение задачи в виде характеристического ряда.

Численное решение задачи Гурса с помощью метода характеристик [3] сопряжено со значительными трудностями (неограниченность области интегрирования, значительный поворот характеристик и т.д.), поэтому представляется важным построение надежного алгоритма расчета газодинамических параметров на основе точных решений.

1. Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ однородный политропный газ с уравнением состояния $p = a^2 \rho^\gamma$ ($a^2 = \text{const}$, p – давление, ρ – плотность, γ – показатель адиабаты) и $p = p_0 = \text{const}$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ покоится внутри тела



Фиг. 1

вращения с образующей ABO (z – ось вращения, r – радиальная координата, $|OB| = 1$, $OB \perp AB$ (фиг. 1)). Будем считать, что начальная скорость звука $c_0 = 1$. Линия ABO соответствует начальному положению подвижного поршня S , который с нулевой начальной нормальной скоростью начинает двигаться в газ. От поршня S отрывается прямолинейный слабый разрыв GH , рас-

пространяющийся со скоростью звука и отделяющий область покоя GHO от области возмущенного течения $DGHFE$. Линия $DEF'H$ соответствует положению подвижного поршня в произвольный момент времени. Закон движения S_t должен быть определен таким образом, чтобы в процессе адиабатического сжатия с постоянной энтропией весь газ в момент времени $t = 1$ сфокусировался в точку O . Линия GE соответствует поверхности слабого разрыва.

В возмущенной области течение будет потенциальным. Уравнение для потенциала скоростей $\Phi(t, z, r)$ имеет вид

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_r\Phi_{rt} + 2\Phi_z\Phi_{zt} + 2\Phi_r\Phi_z\Phi_{rz} + \Phi_r^2\Phi_{rr} + \Phi_z^2\Phi_{zz} - \theta(\Phi_{rr} + \Phi_{zz} + r^{-1}\Phi_r) = 0$$

$$\theta = c^2 = (\gamma - 1)(K - \Phi_t - \Phi_r^2/2 - \Phi_z^2/2)$$

где c — скорость звука, $K = \text{const}$, $u_r = \Phi_r$, $u_z = \Phi_z$, u_z и u_r — компоненты вектора скорости.

Решение задачи будем строить в классе нестационарных автомодельных конических течений с независимыми переменными

$$\xi = z/\tau, \quad \eta = r/\tau, \quad \tau = t - 1, \quad t \in [0, 1]$$

Этот класс решений описывается уравнением

$$(\Psi_\xi + \xi)^2\Psi_{\xi\xi} + 2(\Psi_\xi + \xi)(\Psi_\eta + \eta)\Psi_{\xi\eta} + (\Psi_\eta + \eta)^2\Psi_{\eta\eta} -$$

$$-(\gamma - 1)(\Psi - \xi\Psi_\xi - \eta\Psi_\eta - \Psi_\xi^2/2 - \Psi_\eta^2/2)(\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta} + \Psi_\eta/\eta) = 0 \quad (1.1)$$

где $\Phi = Kt - \tau\Psi(\xi, \eta)$.

Было подробно изучено течение в области DEG и построены классы точных решений [2]. Для случая неограниченной кумуляции функция $\Psi(\xi, \eta)$ имеет вид

$$\Psi = -\frac{2-\gamma}{\gamma+1}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 + 3\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi_0\xi + \frac{(3\gamma-1)}{(2\gamma+1)}\xi_0^2, \quad \xi_0 = \frac{2\sqrt{2-\gamma}}{\sqrt{3(\gamma-1)}} \quad (1.2)$$

В построенном решении угол α связан с показателем γ соотношением

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2-\gamma}}{\sqrt{\gamma+1}}$$

Для построения решения в области $EGHF$ нужно решить задачу Гурса со следующими данными на характеристиках:

$$\Psi = \frac{1}{\gamma-1} - \frac{3}{2}\eta^2 \quad \text{при} \quad \mu = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha - 1 = 0 \quad (1.3)$$

$$\Psi = \frac{1}{\gamma-1} \quad \text{при} \quad \nu = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha - 1 = 0$$

С помощью метода характеристических рядов [5] не удается построить точное решение этой задачи из-за наличия неаналитической особенности в окрестности точки G . Было получено [4] решение задачи Гурса для упрощенного линейного уравнения, описывающего главный член асимптотического разложения функции Ψ в окрестности точки G из области EGH

$$\Psi = \frac{1}{\gamma-1} - \frac{3}{8(\gamma+1)}(3\mu^2 + 2\mu\nu + 3\nu^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\nu+\mu}{\nu-\mu} \right) - \frac{9}{4(\gamma+1)\pi} \sqrt{-\mu\nu(\nu+\mu)} \quad (1.4)$$

Из вида (1.4) следует, что функция Ψ не является аналитической в окрестности

нуля. Таким образом, характер особенности был выяснен, и представляет интерес получение следующих приближений функции Ψ .

В уравнении (1.1) перейдем от переменных ξ, η к переменным v, μ , затем, используя информацию о характере особенности функции Ψ в окрестности точки G , сделаем замену переменных

$$y = \arcsin \frac{v+\mu}{v-\mu}, \quad x = \sqrt{v} \quad (1.5)$$

Полученное уравнение для функции $\Psi(x, y)$ здесь не приводится ввиду громоздкости.

При такой замене переменных характеристика $\mu = 0$ перейдет в прямую $y = \pi/2$, а характеристика $v = 0$ — в точку с координатами $(0, -\pi/2)$ плоскости OXY .

Условия (1.3) запишем в виде

$$\Psi = \frac{1}{\gamma-1} - \frac{9}{8(\gamma+1)}v^2 \quad \text{при } \mu = 0, \quad \Psi = \frac{1}{\gamma-1} \quad \text{при } v = 0 \quad (1.6)$$

2. Построение решения в виде ряда. Решение задачи Гурса будем искать в виде характеристического ряда

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y)x^k \quad (2.1)$$

Из (1.6) следует, что коэффициенты ряда (2.1) должны удовлетворять следующим условиям:

$$a_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{для любого } k \neq 4, \quad a_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{9}{8(\gamma+1)} \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} a_k(y)x^k = 0 \quad \text{для любого } k$$

Очевидно, что $a_0(y) = 1/(\gamma-1)$. После подстановки ряда (2.1) в уравнение для потенциала и приравнивания к нулю коэффициентов при одинаковых степенях x была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $a_k(y)$. Для $k = 1, 2, 3$, а также для всех остальных нечетных k получены однородные уравнения, имеющие в силу (1.6) лишь тривиальные решения. Для $k = 2n, n = 2, 3, \dots$ уравнение имеет вид

$$\ddot{a}_k + \frac{k\dot{a}_k}{\cos y} - \frac{ka_k}{2(1+\sin y)} = F_k(y) \quad (2.3)$$

Функция $F_k(y)$ в правой части уравнения (2.3) зависит от $a_s(y), s < k; F_4(y) = 0$.

Очевидно, что уравнение (2.3) имеет две особые точки: $y = -\pi/2$ и $y = \pi/2$, поэтому построение его решения с нужной асимптотикой представляет собой нетривиальную задачу. Сделав в (2.3) замену

$$a_{2n} = u[(1-\sin y)/(1+\sin y)]^{n/2}$$

получим для u уравнение, не содержащее члена с первой производной,

$$\ddot{u} - \frac{n(n+1)}{\cos^2 y} u = 0 \quad (2.4)$$

Одно из решений этого уравнения найдем по формуле [6]

$$u_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \cos^n y \left(\frac{1}{\cos y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n e^{ay}$$

Другое независимое решение можно найти, сделав в (2.4) замену $u_2 = u_1 z$.

Для случая $n = 2$ решение уравнения (2.3) для $k = 4$ можно записать в виде

$$a_4 = \frac{(C_1 + C_2 y)(2 - \cos 2y) + \frac{3}{2} C_2 \sin 2y}{(1 + \sin y)^2}$$

Для выполнения первого из условий (2.2) необходимо, чтобы постоянные C_1 и C_2 удовлетворяли соотношению

$$C_1 + C_2 \pi / 2 = -\frac{3}{2} (\gamma + 1)^{-1}$$

Исследование асимптотики $a_4(y)$ при $y \rightarrow -\pi/2$ показало, что если верно соотношение

$$C_1 - C_2 \pi / 2 = 0$$

то $a_4(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\pi/2$, а следовательно, выполняется второе из условий (2.2). Окончательно

$$a_4(y) = -\frac{3}{2\pi(\gamma + 1)} \frac{(2 - \cos 2y)(\pi/2 + y) + \frac{3}{2} \sin 2y}{(1 + \sin y)^2}$$

Если выписать отрезок ряда (2.1) с учетом $a_4(y)$ в переменных v и μ , то получится решение (1.4) линеаризованного уравнения, поэтому представляет особый интерес получение следующего нетривиального приближения решения данной задачи.

3. Исследование решения уравнения для второго члена ряда. Для $n = 3$ уравнение (2.3) имеет вид

$$\ddot{a}_6 + \frac{6\dot{a}_6}{\cos y} - \frac{3a_6}{(1 + \sin y)} = -\frac{36}{\pi^2 (\gamma + 1)^2 (1 + \sin y)^3} A(y) \quad (3.1)$$

$$A(y) = (y^2 \sin y + 2y \cos y - \pi^2 / 4 \sin y + \cos^2 y \sin y)$$

Используя алгоритм, приведенный выше, выпишем фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (3.1). Имеем

$$u_1 = -\frac{\sin y (6 + 4 \sin^2 y)}{\cos^3 y}, \quad u_2 = -\frac{y u_1}{2} + \frac{33 \sin^2 y + 12}{9 \cos^2 y}$$

Так как функция $z(y)$, на которую умножается u_1 , не имеет особенностей при $y = -\pi/2$, $y = \pi/2$, то и характер поведения u_1 и u_2 на концах отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ одинаков. Общее решение однородного уравнения имеет вид $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ и можно подобрать постоянные C_1, C_2 таким образом, чтобы функции, составляющие фундаментальную систему решений, были существенно независимыми. В частности, при $C_2 = 4C_1/\pi$ функция u в окрестности $y = -\pi/2$ имеет особенность $u \sim 1/(y + \pi/2)^3$, а в окрестности точки $y = \pi/2$ $u \sim (y - \pi/2)^4$. Если взять C_2 равным $-4C_1/\pi$, то вблизи точки $y = -\pi/2$ $u \sim (y + \pi/2)^4$, а в окрестности точки $y = \pi/2$ u имеет особенность $1/(y - \pi/2)^4$. Таким образом, имеем фундаментальную систему решений уравнения (2.4) для $n = 3$ и окончательно можно выписать фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (3.1), в виде

$$\varphi_1 = \zeta^-(y)(1 + \sin y)^{-3}, \quad \varphi_2 = \zeta^+(y)(1 + \sin y)^{-3} \quad (3.2)$$

$$\zeta^\pm(y) = \sin y (3 + 2 \sin^2 y)(y \pm \pi/2) + \cos y (11 \sin^2 y + 4) / 3$$

Используя метод вариации постоянных, выпишем общее решение неоднородного уравнения (3.1)

$$a_6 = C_1(y)\varphi_1 + C_2(y)\varphi_2, \quad C_{1,2}(y) = \frac{9}{(\gamma+1)^2 \pi^3} \int \frac{A(y)\zeta_{\pm}^{\pm}(y)}{\cos^6 y} dy \quad (3.3)$$

Поскольку φ_1, φ_2 , а также подынтегральные функции в (3.3) имеют особенность на концах отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$, важно выяснить, имеет ли уравнение (3.1) частное решение, удовлетворяющее условиям (2.2)

$$a_6(\pi/2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} a_6(y)x^6 = 0$$

Для этого была детально исследована асимптотика функций φ_1, φ_2 и собственно $a_6(y)$ в окрестности особых точек. Оказалось, что существует решение уравнения (3.1), имеющее следующие асимптотики:

$$a_6(y) = \frac{36}{35\pi^2(\gamma+1)^2} \left(-\frac{28\pi}{3} \frac{1}{y+\pi/2} + \frac{140}{3} - \frac{141\pi}{35} \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right) + O\left(\left(y + \frac{\pi}{2} \right)^2 \right)$$

при $y \rightarrow -\pi/2$

$$a_6(y) = -\frac{3}{\pi^2(\gamma+1)^2} \left(\frac{\pi}{20} \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^5 + \frac{1}{4} \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^6 + \frac{59\pi}{2800} \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^7 \right) + O\left(\left(y - \frac{\pi}{2} \right)^8 \right)$$

при $y \rightarrow \pi/2$

Рассматривая только главный член асимптотики $a_6(y)$, исследуем поведение функции

$$f(x, y) = a_6(y)x^6 = x^6/(y + \pi/2)$$

при $x \rightarrow 0, y \rightarrow -\pi/2$. Очевидно, что если вблизи этой точки

$$y + \pi/2 \sim x^\alpha, \quad \alpha \geq 6$$

то $f(x, y)$ не стремится к нулю. Если рассматривать $f(x, y)$ в окрестности точки $x = 0, y = -\pi/2$ вдоль кривой, лежащей в заштрихованной области плоскости xu (правая часть фиг. 2), то условие (2.2) будет выполнено. В левой части фиг. 2 изображена та же область в переменных μ, ν .

Используя описанный алгоритм, процесс вычисления $a_k(y)$ можно продолжить, получая для $\Psi(x, y)$ новые, более точные приближения.

4. Результаты численных расчетов. Для того чтобы построить закон движения поршня $r = r(t), z = z(t)$, необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

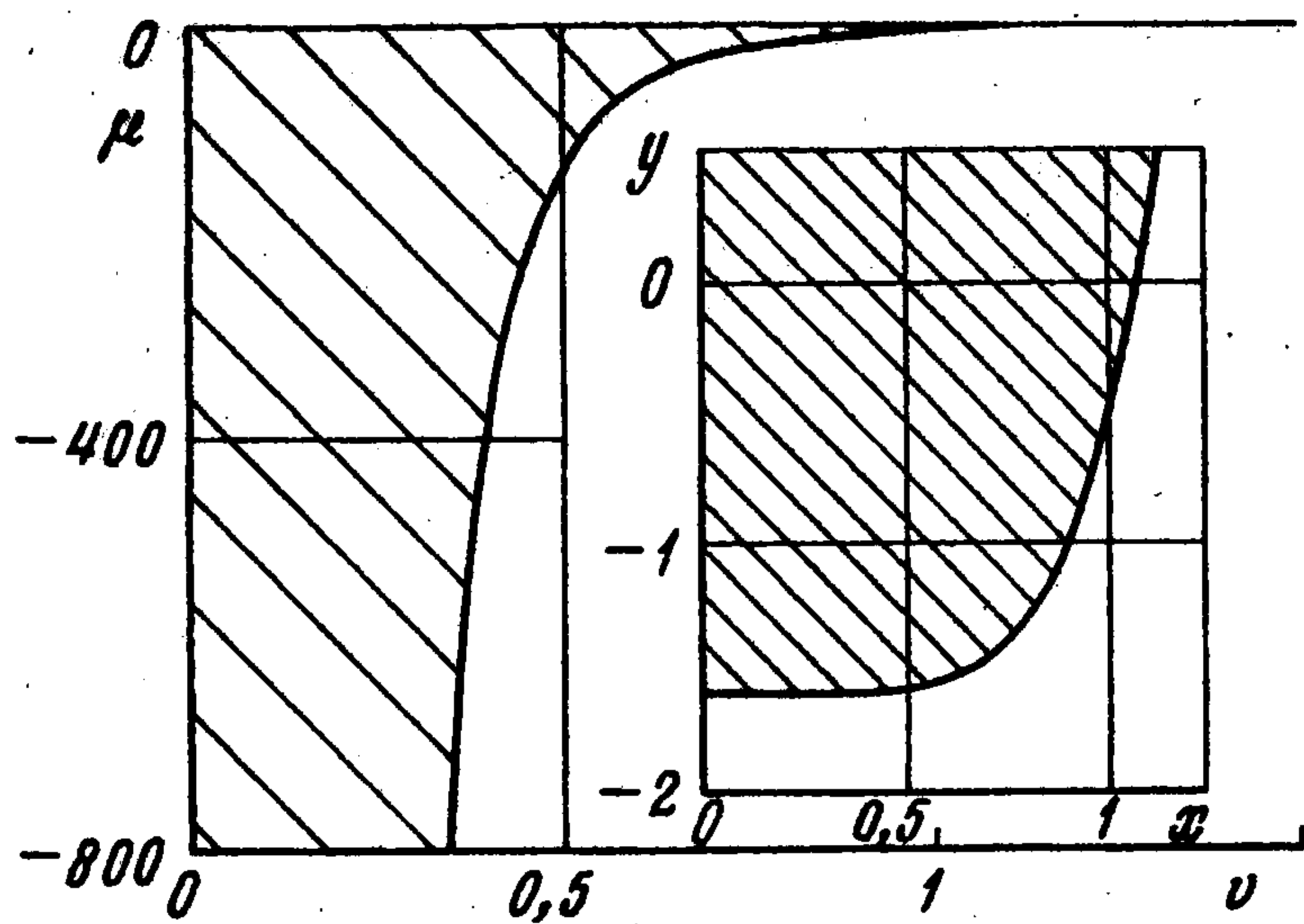
$$dr/dt = \Phi_r(r, z, t), \quad dz/dt = \Phi_z(r, z, t) \quad (4.1)$$

со следующими условиями:

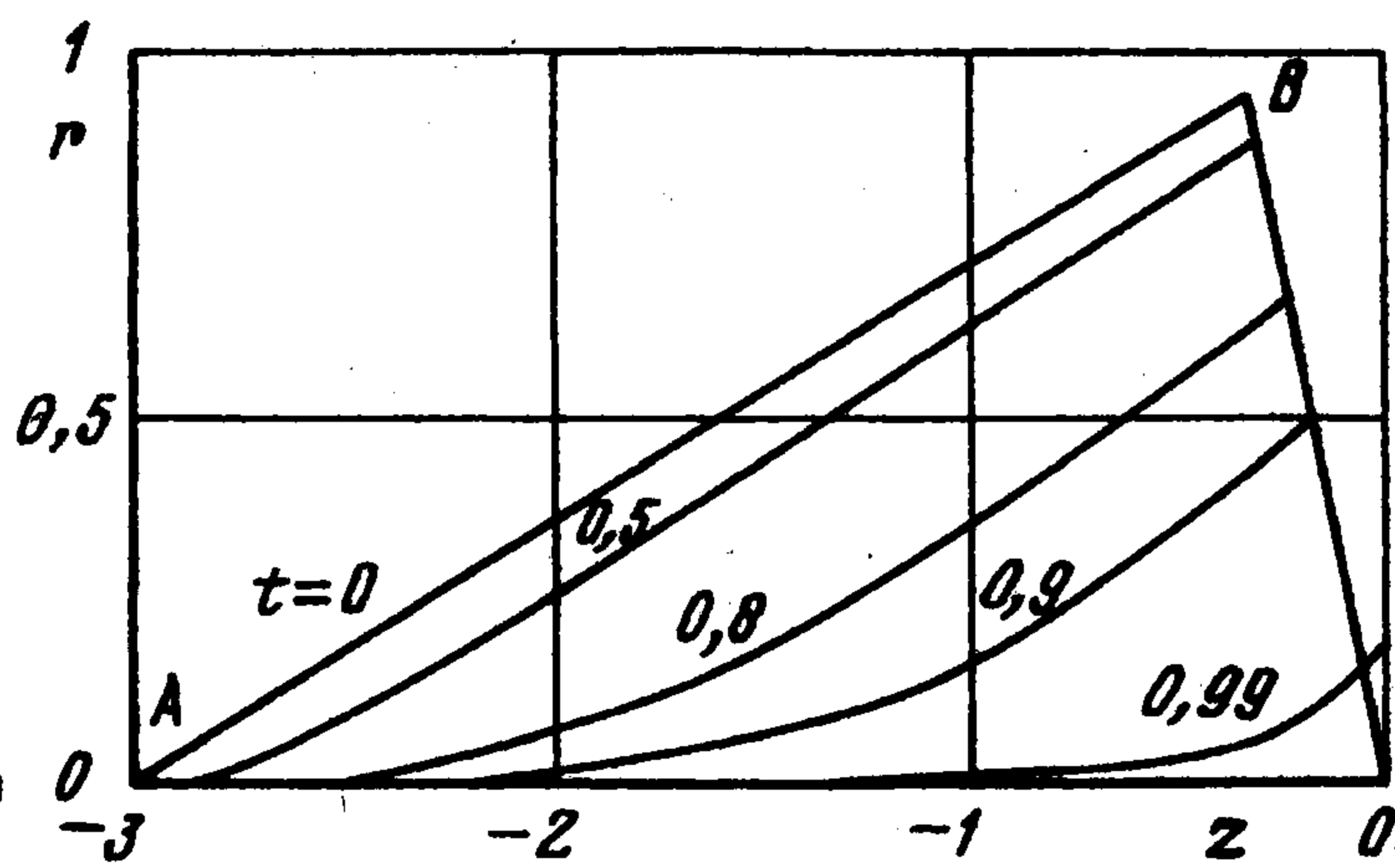
$$r = 1/\cos \alpha + z \operatorname{tg} \alpha \quad \text{при } t = 0$$

В силу (1.2) поле скоростей в области DEG линейно по ξ, η и закон движения поршня в DEG описывается системой уравнений

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{t-1}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma+1} \frac{z}{t-1} - \frac{2\sqrt{3(2-\gamma)}}{\gamma+1} \quad (4.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Учитывая первое приближение функции Ψ (1.4), выпишем систему уравнений, описывающую закон движения поршня в области $EGHF'$,

$$\frac{dr}{dt} = \left(rL + \frac{MN}{\cos^2 \alpha} \right) \cos \alpha, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{6}{\gamma+1} (LN + M) \sin \alpha \quad (4.3)$$

$$L = \frac{1}{t-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{N}{r \cos \alpha} \right), \quad M = \frac{1}{\pi(t-1)} \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha - N^2}$$

$$N = t - 1 - z \sin \alpha$$

В начальный момент времени отрезок AB разбивается узлами, сгущающимися к точке A . В области DEG можно проинтегрировать уравнения системы (4.2) и выписать точный закон движения поршня. В области $EGHF'$ систему (4.3) нельзя проинтегрировать точно, поэтому для решения применялся метод Рунге – Кутты четвертого порядка.

На поршне ведется счет скорости звука $c(t)$, давления $p(t)$ и величины энергии $E(t)$, необходимой для неограниченного сжатия.

На фиг. 3 изображена форма подвижного поршня в разные моменты времени (ABO – начальное положение поршня).

Сравнение полученных результатов с расчетами, проведенными по методу характеристик, выполненными Т.Н. Брониной (ИММ УрО РАН), показало, что при небольших значениях t законы движения поршня совпадают с точностью до 2–3 значащих цифр. В таблице приведены координаты точек поршня при $t = 0,05$ и $t = 0,1$, полученные с помощью отрезков характеристического ряда с учетом четырех слагаемых и с учетом шести слагаемых. Приведены также координаты точек поршня, полученные методом характеристик.

t	С учетом a_4		С учетом a_6		Численный метод	
	$-z$	r	$-z$	r	$-z$	r
0,05	2,99903	0,00000	2,99903	0,00000	2,99903	0,00000
	2,50289	0,17535	2,50289	0,17535	2,50288	0,17534
	1,56256	0,50797	1,56254	0,50792	1,56254	0,50790
	0,77111	0,78783	0,77109	0,78776	0,77106	0,78767
	0,33327	0,94265	0,33324	0,94256	0,33318	0,94235
0,1	2,99601	0,00000	2,99601	0,00000	2,99602	0,00000
	2,50226	0,17375	2,50230	0,17383	2,50225	0,17371
	1,56219	0,50697	1,56215	0,50685	1,56211	0,50670
	0,77082	0,78702	0,77073	0,78675	0,77062	0,78639
	0,33300	0,94190	0,33289	0,94156	0,33269	0,94083

С ростом t качество расчетов ухудшается. Исследование сходимости полученных разложений не проводилось. Возможно, эти ряды сходятся лишь локально, что не позволяет надеяться на хорошие результаты при t , близких к единице.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (N95-01-00721а, N96-15-96246).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 3. С. 548–552.
2. Сидоров А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 444–448.
3. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 81–92.
4. Сидоров А.Ф. Исследование особенностей нестационарных конических течений газа // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 732–735.
5. Sidorov A.F. Application of characteristics' series to the solution of three-dimensional problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics. М: Mir, 1984. P. 184–206.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
13.VIII.1997