

УДК 533.6.011

© 1999 г.

А.И. Рылов

## АСИМПТОТИКИ И СТРУКТУРА ЛИНИЙ УРОВНЯ В ДОЗВУКОВЫХ ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Рассматривается задача построения асимптотик на бесконечности и задача определения структуры изоклин и изобар для широкого класса тел, обтекаемых дозвуковым потенциальным плоским потоком, однородным и горизонтальным на бесконечности, и устанавливается тесная взаимосвязь этих задач. Фактически построение решения в окрестности бесконечно удаленной точки (БУТ) сводится к выбору "корректного" преобразования физической плоскости (ФП) на вспомогательную плоскость (ВП), при котором БУТ ФП переходит в начало координат ВП, а уравнения газовой динамики в начале координат ВП сводятся к системе Коши-Римана, и последующему нахождению числа изоклин, проходящих через БУТ и определению углов наклона этих изоклин. При таком подходе построение асимптотик и исследование структуры линий уровня в окрестности БУТ имеет много общего с решением аналогичной задачи в окрестности произвольной точки течения, удаленной от тела на конечное расстояние. Строятся асимптотики для двух случаев: для тел, обтекаемых с созданием подъемной силы и для симметричного обтекания тел. Входящие в асимптотики постоянные сомножители выражены через физические или геометрические параметры рассматриваемых задач.

Ниже показано, что для тел, обтекаемых с созданием подъемной силы, проходящая через бесконечно удаленную точку (БУТ) изоклина перпендикулярна вектору скорости набегающего потока, что следует из интегрального закона сохранения массы. Использование интегрального закона сохранения вертикальной компоненты импульса приводит к известному соотношению, выражающему подъемную силу через циркуляцию (формула Жуковского), после чего полностью определяются градиенты угла наклона вектора скорости и давления, перпендикулярные друг другу, модули которых выражаются через циркуляцию или подъемную силу. Этим фактически и завершается построение асимптотик на бесконечности. Данные результаты, естественно, совпадают с полученными ранее [1], но предлагаемый здесь метод решения представляется менее громоздким и более наглядным; допускающим обобщение на случай обтекания симметричных тел, математический аппарат которого не выходит за пределы исследования решений уравнений Коши-Римана и анализа линий уровня.

При обтекании тел без циркуляции, в частности, при симметричном обтекании, через БУТ проходит более одной изоклины, на что указывалось ранее [1, 2], но вопрос о числе изоклин и о зависимости этого числа от геометрии тела был оставлен открытым. В настоящей работе для симметричного обтекания определенных ниже колоколообразных тел, в том числе и выпуклых тел, доказано отсутствие в физической плоскости (ФП) точек ветвления изоклин и изобар, в том числе, в добавление к указанным в [3], и на оси симметрии. Для более широкого класса одновершинных тел доказано отсутствие в ФП точек ветвления лишь нулевых изоклин. В обоих случаях показано, что через начало координат вспомогательной плоскости (ВП), которое соответствует БУТ ФП, проходят строго две линии нулевого угла наклона вектора скорости, одна из которых по условию задачи является осью симметрии. Решение этих задач было основано на использовании метода линий уровня [3-10], который при определенных условиях позволяет установить зависимость структуры изоклин и изобар в области течения от геометрии тела. Последующий анализ БУТ как точки ветвления указанного типа позволяет с точностью до некоторого постоянного

сомножителя найти в этой точке значения вторых производных газодинамических параметров и, как следствие, определить квадратичные части рядов Тейлора для каждого газодинамического параметра, которые при равенстве нулю линейных частей и дают искомую асимптотику. Установлен также физический смысл указанного постоянного сомножителя. Показано, что этот сомножитель непосредственно выражается через так называемую площадь вытеснения линии тока, удаленной от тела на достаточно большое расстояние. Эта площадь ограничена линией тока рассматриваемого течения и ее асимптотой (линией тока исходного невозмущенного течения) на всем ее протяжении. Тем самым одновременно показано, что несмотря на квадратичное затухание возмущений по мере удаления от тела площадь вытеснения, которая может рассматриваться как некоторый интегральный параметр возмущения, вносимого в поток обтекаемым телом, при удалении линии тока от тела асимптотически стремится к конечному ненулевому пределу.

Представленные ниже результаты дают один из первых примеров использования метода линий уровня не только для доказательства существования или отсутствия тех или иных режимов течения, но и для описания течений в некоторых характерных областях, в данном случае – на большом удалении от тела.

1. Рассмотрим дозвуковое плоское потенциальное обтекание конечного замкнутого тела потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа, однородным и горизонтальным на бесконечности. Условие о дозвуковом характере течения предполагает достаточную гладкость образующей тела и, в частности, отсутствие на образующих между точками растекания и схода выпуклых точек излома. Данное течение описывается следующей системой уравнений:

$$(u^2 - c^2)u_x + uvu_y + uvv_x + (v^2 - c^2)v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0 \quad (1.1)$$

Здесь и далее  $x, y$  – прямоугольные координаты,  $u, v$  – компоненты вектора скорости,  $q, \theta$  – модуль и угол наклона вектора скорости,  $p, \rho, c$  – давление, плотность и скорость звука, являющиеся известными функциями от  $q$ ,  $M = q/c$  – число Маха,  $k^2 = (1 - M_\infty^2)$ , индекс  $\infty$  отвечает параметрам в БУТ.

Граничными условиями для системы (1.1) являются условие непротекания на поверхности тела и равенства  $v = 0, u = q_\infty$  на бесконечности.

Для построения асимптотического решения системы (1.1) в окрестности БУТ рассмотрим преобразование ФП с координатами  $x, y$  на ВП с прямоугольными координатами  $\alpha, \beta$

$$\alpha = x(x^2 + k^2y^2)^{-1}, \quad \beta = ky(x^2 + k^2y^2)^{-1} \quad (1.2)$$

Преобразование (1.2) переводит БУТ ФП в начало координат ВП, систему (1.1) переводит в некоторую достаточно громоздкую однородную квазилинейную систему, которая в окрестности начала координат ВП после введения новой функции  $w = k(u - q_\infty)$  аппроксимируется следующей системой Коши – Римана:

$$w_\alpha - v_\beta = 0, \quad w_\beta + v_\alpha = 0 \quad (1.3)$$

В самой точке  $\alpha = \beta = 0$  (БУТ ФП) система (1.3) полностью эквивалентна исходной системе (1.1). В полярных координатах  $\varepsilon, \omega$  система (1.3) записывается так:

$$w_\varepsilon - \varepsilon^{-1}v_\omega = 0, \quad \varepsilon^{-1}w_\omega + v_\varepsilon = 0 \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon^2 = \alpha^2 + \beta^2, \tan \omega = \beta/\alpha$ .

Из множества возможных преобразований, переводящих БУТ ФП в начало координат ВП, преобразование (1.2) характеризуется тем, что оно обеспечивает однозначность градиентов газодинамических параметров в начале координат ВП. Так, например, преобразование, отличающееся от (1.2) лишь заменой множителя  $k$  на единицу, приводит к ситуации, когда возможна неоднозначность градиентов газодинамических параметров в начале координат новой ВП, их зависимость от направления подхода к этой точке.

Из того, что в окрестности начала координат ВП рассматриваемое дозвуковое течение описывается однородной эллиптической системой, следует [4, 11], что в указанной окрестности компоненты вектора скорости обладают свойством монотонности, согласно которому каждая из компонент монотонна вдоль линии уровня другой компоненты. Сказанное, очевидно, справедливо и для функций  $p$  и  $\theta$ . Из этого следует, в частности, что исключены замкнутые изоклины, охватывающие начало координат ВП, из чего в свою очередь следует, что через начало координат ВП проходит не менее одной нулевой изоклины, соединяющих начало координат ВП с обтекаемым телом.

Наличие системы (1.3), асимптотически описывающей течение газа в окрестности начала координат ВП, позволяет свести задачу построения асимптотик на бесконечности к анализу точки  $\alpha = \beta = 0$  либо как регулярной точки, через которую проходит лишь одна изоклина, либо как точки ветвления, через которую проходит не менее двух изоклин. Последующие разделы посвящены вычислению первых или вторых производных газодинамических параметров в начале координат ВП с использованием уравнений Коши – Римана (1.3), интегральных законов сохранения массы и импульса и метода линий уровня, позволяющего установить влияние геометрии обтекаемого тела на структуру изоклин и изобар в поле течения, в том числе и на бесконечности.

В газовой динамике хорошо известны примеры локального преобразования квазилинейных эллиптических уравнений в систему Коши – Римана с последующим использованием частных решений этой системы для анализа локальных свойств течений. Речь идет о течениях в окрестности вогнутой точки излома на обтекаемом теле и вблизи точки торможения [12], об интересной особенности течения в окрестности точки заострения, обтекаемого с образованием присоединенной ударной волны, за которой реализуется дозвуковое течение [13–15], анализ которого привел в свое время к понятию точки Крокко на ударной поляре, и, наконец, о структуре течения в окрестности точки ветвления изобар и изоклин. По существу перечисленные результаты и результаты настоящей работы, о которых речь ниже, имеют много общего и отличаются друг от друга лишь граничными условиями в окрестности исследуемой точки и, как следствие, постоянными, входящими в частные решения системы Коши – Римана.

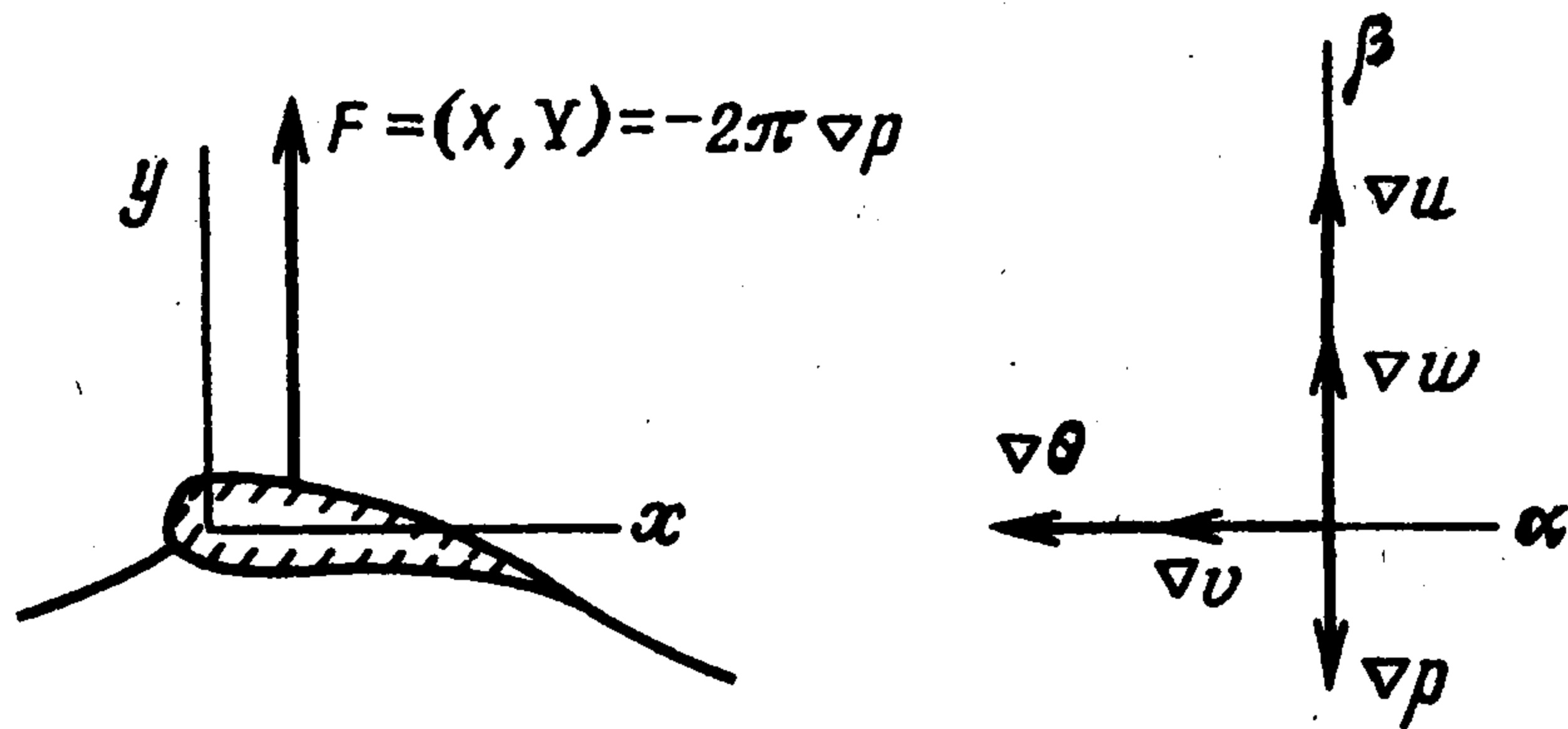
2. Рассмотрим ситуацию, когда через начало координат ВП, отвечающее БУТ ФП, проходит лишь одна нулевая изоклина. В этом случае исключено равенство нулю градиентов компонент вектора скорости в начале координат ВП, которые, как это видно из (1.3), в этой точке перпендикулярны друг другу. Более того, система (1.3) позволяет выразить компоненты одного из градиентов через компоненты другого и свести задачу построения асимптотик на бесконечности к нахождению лишь одного из градиентов, например, для определенности градиента функции  $w$ , после чего легко находятся градиенты других газодинамических параметров.

Для нахождения искомых значений производных  $w_\alpha$  и  $w_\beta$  в начале координат ВП воспользуемся интегральными законами сохранения массы и вертикальной компоненты импульса, для чего рассмотрим окружность бесконечно малого радиуса  $\epsilon$  с центром в начале координат ВП. На ФП этой окружности отвечает эллипс с бесконечно большими полуосями. Приращения  $dx$  и  $dy$ , отвечающие перемещению вдоль границы эллипса против часовой стрелки, выражаются через приращения  $d\alpha$ ,  $d\beta$  и  $d\omega$  следующим образом:

$$dx = \frac{d\alpha}{\epsilon^2} = -\frac{\sin \omega}{\epsilon} d\omega, \quad dy = \frac{d\beta}{k\epsilon^2} = \frac{\cos \omega}{k\epsilon} d\omega$$

С учетом этих соотношений интегральный закон сохранения массы записываем через следующий интеграл по окружности радиуса  $\epsilon$  на ВП:

$$Fm = \oint p(udy - udx) = \oint p(k^{-1}u \cos \omega + v \sin \omega) \frac{d\omega}{\epsilon} = 0 \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Газодинамические параметры на указанной окружности выражаются через значения этих параметров в начале координат ВП (на бесконечности ФП) и через их производные по направлениям, вычисленные также в начале координат ВП. Производная каждого из газодинамических параметров по направлению равна проекции градиента этого параметра на указанное направление. В итоге согласно определению производной значения каждого из газодинамических параметров на рассматриваемой окружности с точностью до  $\varepsilon^{1+\delta}$ ,  $\delta > 0$ , записываются так:

$$\begin{aligned} k^{-1}w &= u - q_{\infty} = k^{-1}(w_{\alpha} \cos \omega + w_{\beta} \sin \omega)\varepsilon \\ v &= (-w_{\beta} \cos \omega + w_{\alpha} \sin \omega)\varepsilon \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p - p_{\infty} = c_{\infty}^2(\rho - \rho_{\infty}) = -\rho_{\infty}q_{\infty}(u - q_{\infty})$$

Подставляя эти значения в (2.1) и устремляя  $\varepsilon$  к нулю, находим, что  $Fm = 2\pi\rho_{\infty}w_{\alpha} = 0$ . Из этого следует, что  $w_{\alpha}$ , а значит, и  $v_{\beta}$  равны нулю, вектор  $\nabla w$  перпендикулярен вектору набегающего потока, а вектор  $\nabla v$  образуется поворотом вектора  $\nabla w$  против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ .

Записывая аналогичным образом обе компоненты интегрального закона сохранения вектора импульса, значение циркуляции  $\Gamma$ , учитывая уравнения (1.3) и установленное выше равенство нулю производной  $w_{\alpha}$  в начале координат ВП, получаем следующие выражения для компонент вектора силы, действующей на тело, и выражения для градиентов  $\nabla w$  и  $\nabla v$ , вычисленные в начале координат ВП:

$$\begin{aligned} X &= 0, \quad Y = -\rho_{\infty}q_{\infty}\Gamma, \quad 2\pi\rho_{\infty}q_{\infty}k^{-1}\nabla w = (0, Y) \\ 2\pi\rho_{\infty}q_{\infty}k^{-1}\nabla v &= (-Y, 0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Векторные равенства из (2.3) вместе с очевидными равенствами

$$k\nabla p = kc_{\infty}^2\nabla\rho = -\rho_{\infty}q_{\infty}\nabla w, \quad q_{\infty}\nabla\theta = \nabla v$$

дают исчерпывающую информацию о поведении газодинамических параметров в малой окрестности начала координат ВП, так как линейная часть ряда Тейлора вблизи начала координат ВП для любого газодинамического параметра равна скалярному произведению соответствующего градиента на вектор  $(\alpha, \beta)$ .

На фиг. 1 слева приведено обтекаемое тело и оси координат, отвечающие ФП, справа даны оси координат ВП. Такое совместное использование ФП и ВП дает графическое изображение асимптотик (т.е. градиентов газодинамических параметров на ВП) и их зависимость от подъемной силы. В частности, фиг. 1 иллюстрирует векторное равенство, наиболее кратко отражающее зависимость вектора сил, действующих на тело, от поведения газодинамических параметров в начале координат ВП, и следствие интегрального закона сохранения массы

$$p_{\alpha} = 0, \quad F = (X, Y) = -2\pi\nabla p$$

На ФП на большом удалении от тела газодинамические параметры с точностью до малых более высокого порядка даются выражениями

$$u - q_\infty = \frac{\Gamma}{2\pi\rho_\infty q_\infty} \frac{ky}{z^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{ky}{z^2}$$

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi\rho_\infty q_\infty} \frac{kx}{z^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{kx}{z^2}, \quad z^2 = x^2 + k^2 y^2$$

известными как асимптотики Гилбарга и Финна [1] (см. также [2,16]). Тем не менее предлагаемый в настоящей работе метод может представлять самостоятельный интерес, так как допускает обобщение на некоторые симметричные течения, для которых ниже приведен ряд новых результатов, и, возможно, в развитие работ [10, 11], на некоторые осесимметричные течения. В то же время в отличие от метода, изложенного ранее [1], он достаточно прост и нагляден.

*Замечание.* При наличии примыкающей к телу местной сверхзвуковой зоны без скачков уплотнения течение на бесконечности остается дозвуковым и потенциальным, что сохраняет все полученные выше результаты в силе. Иная ситуация имеет место при существовании ударных волн в местной сверхзвуковой зоне. В этом случае в следе за телом, образованном прошедшими через ударные волны линиями тока, течение уже не является потенциальным, энтропия в нем больше, чем в остальной части течения. Как следствие, выражения для компонент вектора силы, действующей на тело, и выражения для газодинамических параметров на больших удалениях от тела, отличны от приведенных выше. В частности, как известно, горизонтальная компонента вектора силы в этом случае положительна.

3. Рассмотрим течения, соответствующие случаю, когда через начало координат ВП проходит не менее двух изоклин. Такие течения реализуются при обтекании тел с нулевыми значениями подъемной силы и циркуляции, на что указывалось ранее [1,2], но вопрос о числе пересекающихся изоклин в этой точке и угле наклона какой-либо из этих изоклин не рассматривался. Однако именно эти параметры определяют вид асимптотики, что делает целесообразным выделение некоторых классов тел, для которых указанные параметры находятся однозначно.

*Определение 1.* Симметричное тело будем называть колоколообразным телом, если при симметричном обтекании этого тела при движении вдоль его верхней образующей от точки растекания до точки схода угол наклона вектора скорости сначала монотонно (здесь и далее не обязательно строго монотонно) возрастает от нуля до некоторого положительного значения, затем монотонно убывает до некоторого отрицательного значения, после чего монотонно возрастает до нуля.

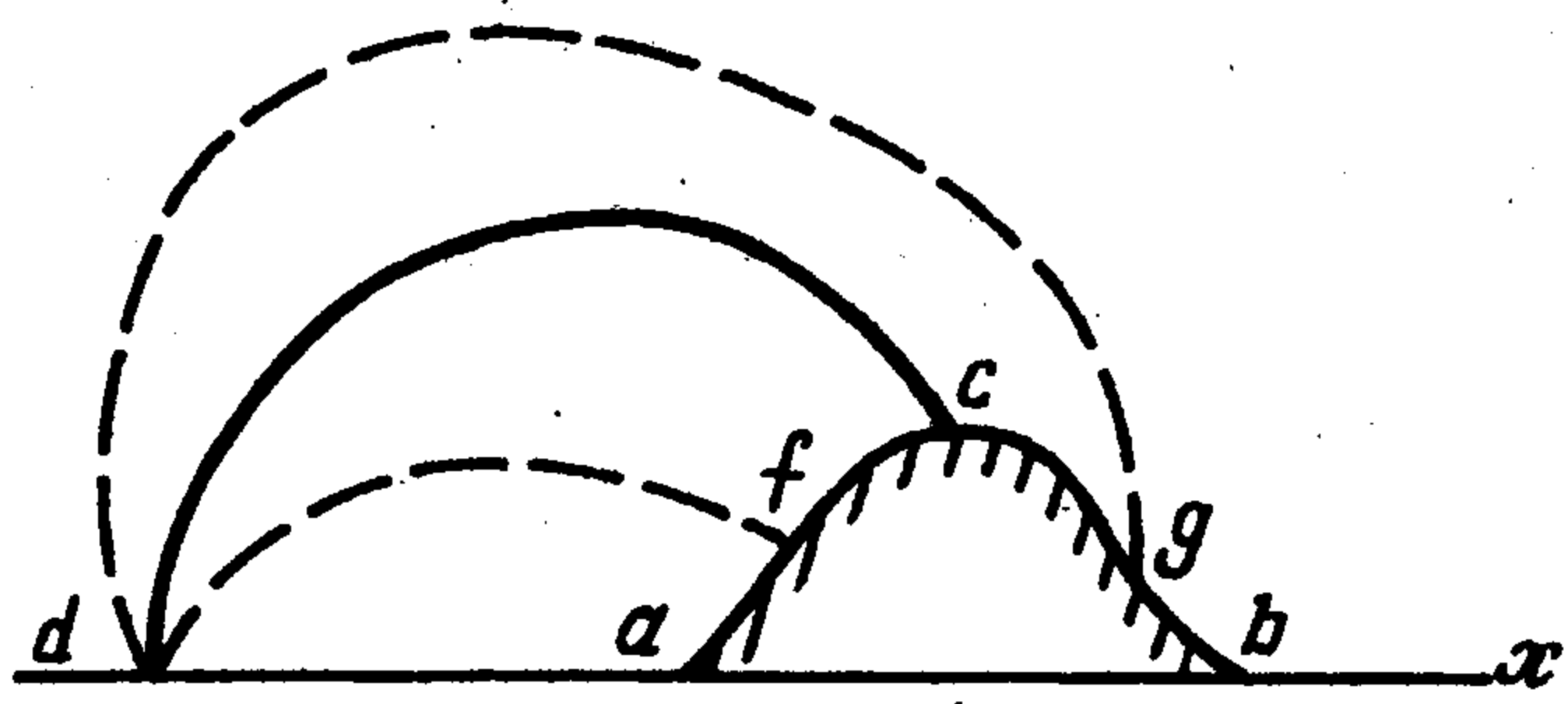
Определенный выше класс тел достаточно широк. Он содержит, в частности, и класс выпуклых тел, так как на их образующих возрастание угла наклона вектора скорости сосредоточено в точках растекания и схода, являющихся точками торможения.

*Теорема 1.* При симметричном дозвуковом обтекании колоколообразного тела однородным и горизонтальным на бесконечности потоком через каждую точку области течения вне тела, в том числе и на оси симметрии, проходит лишь одна изоклина и одна изобара, т.е. в области течения отсутствуют точки ветвления. В то же время начало координат ВП, отвечающее БУТ ФП, является точкой ветвления, через которую проходят две изоклины и две изобары, причем, в силу симметрии течения, одной из линий  $\theta = 0$  служит ось симметрии.

*Доказательство.* Напомним выражения для производных, взятых вдоль соответственно линий  $p = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  [4-6]

$$\rho q^2 \theta_l = -p_n (1 - M^2 \sin^2 \mu), \quad (1 - M^2) p_l = \theta_n \rho q^2 (1 - M^2 \sin^2 \eta)$$

где выражения с нижними индексами  $l$  и  $n$  означают производные вдоль и по нормали к



Фиг. 2

рассматриваемым кривым,  $\mu$  и  $\eta$  — углы, составляемые, соответственно, линиями  $p = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  с вектором скорости.

Учитывая возможность ветвления линии  $p = \text{const}$  ( $\theta = \text{const}$ ), далее под изобарой (изоклиной) понимаем линию  $p = \text{const}$  ( $\theta = \text{const}$ ), при движении вдоль которой сохраняется контакт с выбранной областью повышенного или пониженного, относительно рассматриваемой линии, значения  $p$  (значения  $\theta$ ). В этом случае при движении вдоль изобары (изоклины) при прохождении возможной точки ветвления выбирается крайняя левая или крайняя правая ветвь линии  $p = \text{const}$  ( $\theta = \text{const}$ ), в зависимости от выбора области. Если иное не оговорено, то будем считать, что при движении вдоль рассматриваемой изобары или изоклины должен сохраняться контакт с областью, расположенной слева.

Из этих определений и выписанных выше выражений для производных, вычисленных вдоль линий  $p = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$ , следует, что в дозвуковых течениях вдоль изобары угол наклона вектора скорости меняется монотонно и соответственно вдоль изоклины давление меняется монотонно. Именно на этих свойствах и основано доказательство теоремы, которое сводится к рассмотрению двух возможных ситуаций.

Предположим, что точка ветвления существует в поле течения вне оси симметрии. Из этой точки должно выходить четыре или большее четное число изоклин. Эти изоклины не могут оборваться в области течения, не могут замкнуться друг на друга. Они могут либо выйти на поверхность тела, в том числе и в возможные точки торможения на теле, либо уйти на бесконечность. Значению угла  $\theta = \theta^* \neq 0$  рассматриваемых изоклин на образующей, в том числе и в точках торможения растекания и схода (рассматриваем верхнюю половину течения) в соответствии с определением колоколообразного тела отвечают не более двух участков, каждый из которых может иметь и нулевую длину. Из предполагаемой точки ветвления на каждый из этих участков может прийти лишь одна изоклина, ибо в противном случае образуется замкнутая изоклина. При  $\theta^* = 0$  лишь одна изоклина может уйти на бесконечность, в том числе и с выходом на ось симметрии, и еще одна выйти на образующую тела. Иными словами, при любом значении  $\theta^*$  по крайней мере две изоклины, выходящие из предполагаемой точки ветвления, не могут ни выйти на поверхность тела, ни уйти на бесконечность.

Предположим теперь, что точка ветвления расположена на оси симметрии. Этот случай остался не рассмотренным при доказательстве отсутствия точек ветвления вне оси симметрии при обтекании выпуклых тел [3]. Он приводит к ситуации, которая, казалось бы, не противоречит свойствам изоклин и изобар. На фиг. 2 приведено одно из возможных колоколообразных тел  $acb$  и предполагаемая точка ветвления  $d$ , из которой на тело выходит изоклина  $dc$  и изобары  $dg$  и  $df$ . Изоклинами также являются отрезки оси симметрии. В соответствии с этой схемой при движении вдоль оси симметрии слева с бесконечности до точки  $d$  и затем вдоль  $dc$  давление убывает, вдоль  $da$  оно растет. Вдоль изобары  $df$  значение  $\theta$  растет, вдоль  $dg$  убывает. Случай, когда из точки  $d$  в верхнюю половину течения выходят две и более изоклин интереса не представляет, так как он легко опровергается анализом изобар и изоклин. Однако для схемы на фиг. 2 такого анализа недостаточно: здесь, как оказывается, необходим и анализ линий тока. Действительно, на фиг. 2 внутри области  $dcfa$  имеем  $\theta > 0$ , а вне ее  $\theta \leq 0$ . Следовательно, на всем протяжении линий тока, проходящих выше изоклины  $dc$ , выполняется неравенство  $\theta < 0$ . Но из граничных условий задачи следует, что на любой линии тока значения  $\theta$  при  $x = \pm\infty$  одинаковы. Данное противоречие завершает доказательство отсутствия точек ветвления в области течения и одновременно показывает, что от верхней половины тела на бесконечность помимо оси симметрии

выходит не менее одной нулевой изоклины. Но наличие двух и более таких изоклин означает существование изоклин, выходящих с бесконечности, достигающих поверхности тела или оси симметрии, и снова уходящих на бесконечность, что не согласуется с монотонным изменением давления вдоль изоклины. Тем самым теорема доказана.

С точки зрения последующего построения асимптотик важна лишь вторая часть теоремы. Поэтому можно ожидать, что снятие требования об отсутствии точек ветвления в области течения позволит расширить класс симметричных тел, для которых через начало координат ВП проходит две изоклины, одна из которых является осью симметрии.

*Определение 2.* Симметричное тело будем называть одновершинным, если его образующая может быть разделена на три части: прямолинейный участок максимального сечения (УМС), к которому примыкают слева, выше по течению, головная часть, на которой  $\theta \geq 0$ , и ниже по течению кормовая часть, на которой  $\theta \leq 0$ . В свою очередь головная и кормовая части в соответствии с их определением могут содержать внутренние прямолинейные отрезки  $\theta = 0$ , к которым с обеих сторон примыкают участки стенки с одинаковыми знаками угла  $\theta$ . Данные прямолинейные отрезки назовем участками перегиба  $\theta = 0$ , по аналогии с известными из геометрии точками перегиба на кривых. Следует различать два типа участков перегиба. На участке перегиба первого типа достигается локальный крайевой экстремум значения угла  $\theta$  для области течения. Из этого участка перегиба нулевые изоклины в область течения не выходят и в дальнейшем анализе использоваться практически не будут. В случае участка перегиба второго типа нулевые изоклины выходят с него в область течения, и по некоторой аналогии с седловыми точками такие участки перегиба будем называть участками перегиба седловыми (УПС). Естественно, каждый из отмеченных выше прямолинейных участков может иметь нулевую длину, т.е. вырождаться в точку.

Данное определение охватывает очень широкий класс тел. Оно исключает из рассмотрения лишь тела, при движении вдоль образующих которых вниз по течению возможен переход от отрицательных значений угла  $\theta$  к положительным. В частности, система расположенных последовательно вдоль оси симметрии выпуклых тел не является одновершинным телом.

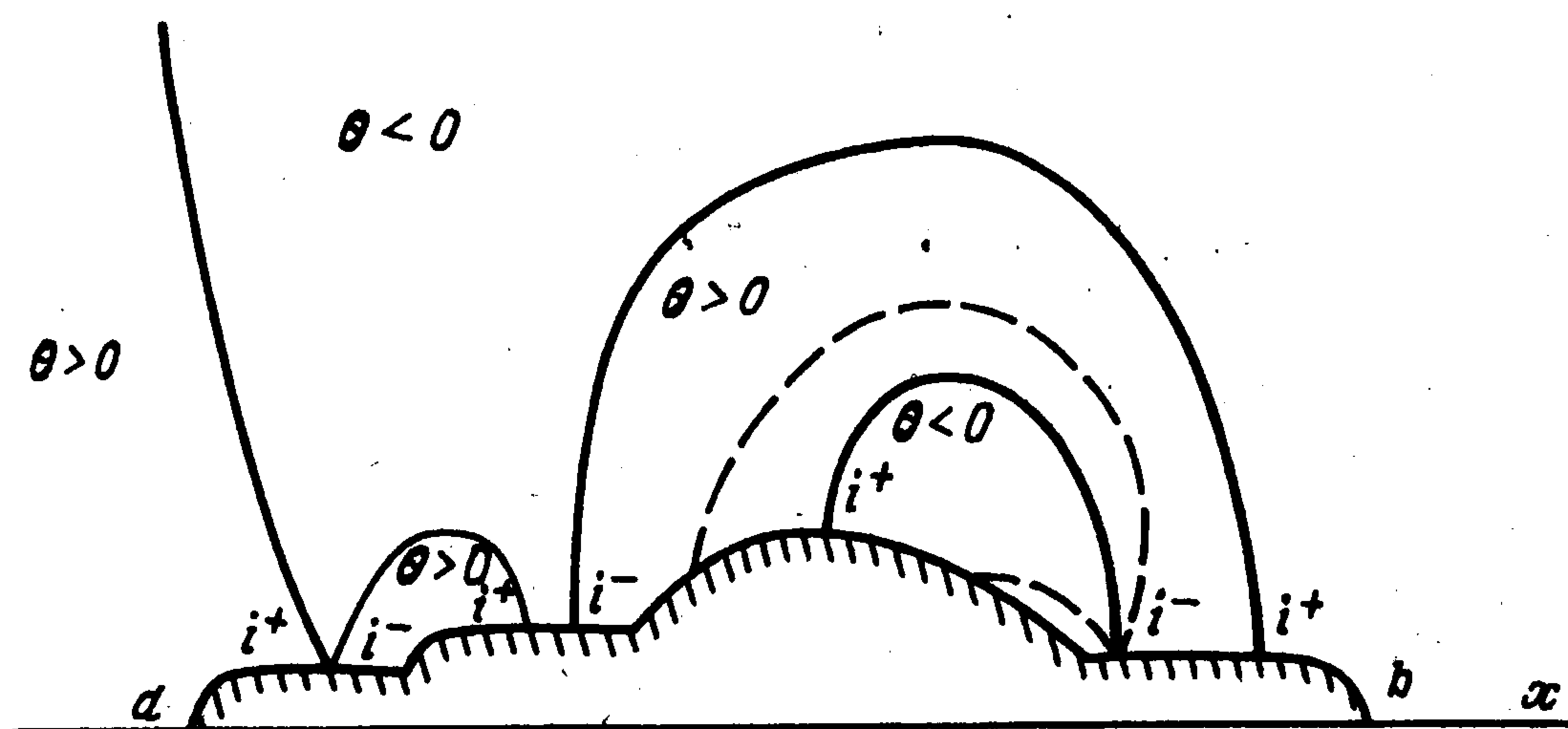
Укажем на некоторые свойства УМС и УПС на одновершинном теле.

Рассмотрим в области течения в малой окрестности УМС произвольную кривую, начинающуюся на головной части, где  $\theta > 0$ , и заканчивающуюся на кормовой части, где  $\theta < 0$ . Следовательно, на рассматриваемой кривой равенство  $\theta = 0$  выполняется нечетное число раз. Из этого в свою очередь следует, что из УМС в область течения выходит нечетное число нулевых изоклин. Допустим, что этих изоклин не менее трех и пронумерованы они вниз по течению. Рассмотрим две изобары, выходящие из УМС, первая из которых расположена между первой и второй изоклинами, а вторая – между предпоследней и последней. Первая из этих изобар выходит в область  $\theta < 0$  и при движении вдоль нее от тела угол  $\theta$  монотонно убывает. Поэтому первая изобара должна выйти на кормовую часть. Вторая изобара выходит в область  $\theta > 0$  и при движении вдоль нее от тела угла  $\theta$  монотонно возрастает, в результате чего она должна выйти на головную часть. Иными словами, рассматриваемые изобары должны пересечься, что исключено из-за разных знаков угла  $\theta$  на каждой из них. Следовательно, из УМС в область течения выходит лишь одна нулевая изоклина.

Совершенно аналогично показывается, что из УПС в область течения выходят две нулевые изоклины.

Важным свойством каждого УПС головной части является то, что он хотя бы одной точкой граничит с областью  $\theta < 0$ , которая в свою очередь граничит со всей кормовой частью или с некоторым ее отрезком. Это следует, например, из того, что вдоль изобары, выходящей из любой точки УПС между нулевыми изоклинами, угол  $\theta$  вне УПС отрицателен. Сказанное естественным образом переносится и на УПС кормовой части.

В дальнейшем логично называть точки выхода нулевых изоклин с рассматри-



Фиг. 3

ваемого тела в область течения точками  $i^+(i^-)$ , если при движении вдоль указанных изоклин от тела левая нормаль направлена соответственно в область  $\theta > 0$  ( $\theta < 0$ ). Кроме того, введем нумерацию (вниз по течению) точек выхода нулевых изоклин с поверхности тела в верхнюю полуплоскость, при этом видно, что нечетные номера будут отвечать изоклинам, выходящим из точек  $i^+$ .

**Теорема 2.** При симметричном дозвуковом обтекании одновершинного тела равномерным и горизонтальным на бесконечности потоком в области течения отсутствуют точки ветвления нулевых изоклин и вся структура нулевых изоклин определяется изоклиной, выходящей из точки  $i^+$  на УМС. Если на теле нет УПС, то эта изоклина уходит на бесконечность, в противном случае она последовательно обходит все УПС, приходя на каждый из них в точку  $i^-$  и выходя из него из точки  $i^+$ . На первом этапе изоклина, вышедшая из УМС из точки с номером  $n$ , приходит в точку с номером  $n - 1$  или  $n + 1$ , затем два номера, отвечающие данной изоклине, исключаются из рассмотрения, нумерация точек соответственно сдвигается, после чего все повторяется. Из указанной схемы видно, что последней точкой выхода изоклины с тела, перед ее уходом на бесконечность, будет или первая или последняя (по исходной нумерации) точка выхода нулевой изоклины. И, наконец, из данной структуры нулевых изоклин следует, что в начале координат ВП пересекаются строго две линии  $\theta = 0$ , одна из которых — ось симметрии.

**Доказательство.** Достаточно подробная формулировка теоремы делает доказательство почти очевидным. Отметим лишь, что при наличии на теле хотя бы одного УПС анализ изобар, выходящих из точек УПС, показывает, что в окрестности УМС можно выделить область, ограниченную изобарой, начинающейся и заканчивающейся на теле, вдоль которой вне тела  $\theta \neq 0$ , и отрезком образующей тела, на котором есть лишь две точки выхода нулевых изоклин,  $i^+$  на УМС и  $i^-$  на одном из УПС. Поэтому изоклина, вышедшая из точки  $i^+$  на УМС, может прийти лишь в точку  $i^-$  на указанном УПС, причем без промежуточных точек ветвления. Последовательное повторение этих рассуждений и завершает доказательство.

Для наглядности на фиг. 3 приведено одновершинное тело, содержащее три участка перегиба, и дан один из возможных вариантов структуры нулевых изоклин в предположении, что каждый из участков перегиба является УПС. Сплошными линиями обозначены нулевые изоклины, из которых лишь крайняя левая изоклина уходит на бесконечность. Штрихами обозначены изобары, одна из которых фигурирует в начале доказательства теоремы.

Отметим, что теорема дает конечное число возможных вариантов структуры нулевых изоклин, но не дает ответа на вопрос о том, какой из участков перегиба является УПС. Важно, что теорема однозначно решает вопрос о структуре точки ветвления в начале координат ВП, что и необходимо для построения асимптотик на бесконечности.

**Теорема 3.** При симметричном дозвуковом обтекании одновершинного, в том числе и колоколообразного и выпуклого тела, структура течения в окрестности начала координат ВП полностью определяется вторыми производными газодинамических параметров, вычисленными в начале координат ВП, и эти производные с использованием неопределенного пока положительного сомножителя  $a^2$  записываются так:

$$w_{\alpha\beta} = v_{\alpha\alpha} = v_{\beta\beta} = 0, \quad w_{\alpha\alpha} = -w_{\beta\beta} = v_{\alpha\beta} = -2q_{\infty}a^2 \quad (3.1)$$

Как следствие, в окрестности начала координат ВП функции  $w$  и  $v$ , определяемые в рассматриваемом случае квадратичными частями соответствующих рядов Тейлора, с точностью до величин порядка  $\varepsilon^{2+\delta}$ ,  $\delta > 0$ , имеют вид

$$w = k(u - q_{\infty}) = -q_{\infty}a^2(\alpha^2 - \beta^2), \quad v = -2q_{\infty}a^2\alpha\beta$$

В свою очередь на ФП на больших удалениях от тела функции  $w$  и  $v$  с точностью до величин порядка  $(x^2 + k^2y^2)^{-1-\delta}$ ,  $\delta > 0$  таковы:

$$w = k(u - q_{\infty}) = -q_{\infty}a^2 \frac{x^2 - k^2y^2}{(x^2 + k^2y^2)^2}, \quad v = -q_{\infty}a^2 \frac{2kxy}{(x^2 + k^2y^2)^2} \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Из полученных выше результатов следует, что в начале координат все первые производные газодинамических функций равны нулю. Следовательно, в окрестности начала координат ВП поведение этих функций определяется их вторыми производными в предположении, что они одновременно не равны нулю. Для определения значений этих производных в точке  $\alpha = \beta = 0$  вернемся к рассмотрению исходной системы (1.1), которая с помощью соотношений (1.2) была преобразована в однородную квазилинейную систему с производными  $w_{\alpha}$ ,  $w_{\beta}$ ,  $v_{\alpha}$ ,  $v_{\beta}$ . Достоинством замены переменных (1.2) является то, что в преобразованной системе уравнений

$$a_{11}w_{\alpha} + a_{12}w_{\beta} + b_{11}v_{\alpha} + b_{12}v_{\beta} = 0, \quad a_{21}w_{\alpha} + a_{22}w_{\beta} + b_{21}v_{\alpha} + b_{22}v_{\beta} = 0$$

в начале координат ВП переменные коэффициенты принимают вид

$$a_{12} = b_{11} = a_{21} = b_{22} = 0, \quad a_{11} = -b_{12} = a_{22} = b_{21} = 1$$

в результате чего в начале координат ВП эта система сводится к системе Коши – Римана (1.3).

Для определения вторых производных в начале координат ВП построим две системы двух уравнений, одна из которых получается дифференцированием приведенной выше системы по  $\alpha$ , а другая – дифференцированием по  $\beta$ . С учетом того, что в начале координат ВП первые производные равны нулю, получаем следующие четыре уравнения, справедливые в начале координат ВП:

$$w_{\alpha\alpha} - v_{\alpha\beta} = 0, \quad w_{\alpha\beta} + v_{\alpha\alpha} = 0, \quad w_{\alpha\beta} - v_{\beta\beta} = 0, \quad w_{\beta\beta} + v_{\alpha\beta} = 0$$

Эти уравнения надо дополнить равенством  $v_{\alpha\alpha} = 0$ , которое следует из того, что на оси симметрии  $v = 0$ , а также неравенством  $v_{\alpha\beta} \leq 0$ , отражающим один из результатов теоремы 2, а именно отсутствие на ФП точек ветвления изоклин, в том числе и на оси симметрии. Последнее неравенство удобнее заменить равенством  $v_{\alpha\beta} = -2q_{\infty}a^2$  с неопределенной пока постоянной  $a^2$ .

Итак, шесть приведенных равенств доказывают справедливость выражений для вторых производных, выписанных в теореме 3. Анализ квадратичных частей рядов Тейлора для  $w$  и  $v$  в окрестности точки  $\alpha = \beta = 0$  при  $a \neq 0$  показывает, что в этой точке пересекаются две линии  $w = 0$ , и две линии  $v = 0$ , что согласуется с теоремой 2. После этого для окончательного доказательства теоремы 3 необходимо показать невозможность обращения в нуль постоянной  $a$  и, как следствие, невозможность одновременного равенства нулю в начале координат ВП всех вторых производных.

Действительно, если  $a = 0$ , то в точке  $\alpha = \beta = 0$  совершенно аналогично вычисляются третьи, а если необходимо, то и более высокие производные, анализ которых показывает пересечение в этой точке трех или более линий  $v = 0$ , что противоречит теореме 2. Тем самым теорема 3 доказана.

Уместно отметить, что в механике жидкости и газа при исследовании некоторых локальных особенностей (излом стенки [12], присоединенная ударная волна слабого дозвукового семейства [13–15], ветвление линий уровня, разрыв кривизны стенки и др.) широко используется подход, основанный на неограниченном растяжении окрестности рассматриваемой точки. В частности, при таком подходе граничные условия, справедливые в окрестности этой точки, переносятся на неограниченные прямолинейные отрезки. Получаемое решение, как правило, точно характеризует исследуемую особенность. Применительно к рассматриваемому случаю такой подход предполагает построение решения системы Коши – Римана (1.4) в верхней полуплоскости ВП при условии, что  $w = v = 0$  в начале координат ВП, и  $v = 0$  при  $\beta = 0$ . Легко проверить, что этим требованиям удовлетворяет следующее семейство решений с ненулевым множителем  $A$  и целым положительным  $n$ :

$$w = -q_{\infty} A \varepsilon^n \cos n\omega, v = -q_{\infty} A \varepsilon^n \sin n\omega$$

Параметр  $n$  определяется исходя из результатов теоремы 2, согласно которой из верхней полуплоскости ВП в начало координат ВП приходит строго одна линия  $v = 0$ . Отсюда находим, что  $n = 2$ . Далее в теореме 2 показано, что внутри области течения нет точек ветвления линий  $v = 0$ . Следовательно, на оси симметрии ВП вне начала координат производная  $v_{\beta}$  отлична от нуля, откуда с учетом геометрии тела заключаем, что производная  $v_{\omega} < 0$  на всей прямой  $\beta = 0$ , за исключением начала координат ВП. В результате находим, что  $A > 0$ . Полученное совпадение с результатами теоремы 3 говорит о правомерности отмеченного выше подхода применительно к нашей задаче.

Видно, что множитель  $a^2$ , имеющий размерность площади, некоторым образом зависит от формы тела. Так же видно, что значение этого множителя характеризует интегральную величину возмущения, вносимого в поток рассматриваемым телом. Данные рассуждения приводят к рассмотрению следующего понятия.

**Определение 3.** При обтекании симметричного замкнутого тела площадью вытеснения  $S(h)$  будем называть площадь, заключенную между бесконечной горизонтальной прямой  $y = h$  и линией тока, для которой эта прямая является асимптотой. Предельной площадью вытеснения  $S$  будем называть площадь вытеснения, отвечающую бесконечно большому значению  $h$ .

Как оказывается, введенное понятие прямо связано с множителем  $a^2$  из соотношений (3.2).

**Теорема 4.** При дозвуковом симметричном обтекании одновершинных, в том числе и колоколообразных и выпуклых тел равномерным и горизонтальным на бесконечности потоком предельная площадь вытеснения равна произведению числа  $\pi$  на положительный множитель  $a^2$  из асимптотик (3.1) и (3.2), т.е.  $S = S(\infty) = \pi a^2$ . Сказанное распространяется и на более общий класс замкнутых тел при условии, что асимптотики на бесконечности имеют вид (3.1) и (3.2).

**Доказательство.** Рассмотрим достаточно удаленную от тела линию тока, для которой прямая  $y = h$  является асимптотой, т.е. на этой линии тока  $y = h$  при  $x = \pm\infty$ . При  $h \gg 1$  значение производной  $dy/dx$  на линии тока с точностью до малых более высокого порядка может быть заменено на значение  $\sin\theta$ , которое в свою очередь может быть заменено с некоторой оцениваемой погрешностью на значение  $\sin\theta$ , вычисленное на асимптоте  $y = h$  при этом же значении  $x$  с помощью второго из соотношений (3.2). Интегрирование этого соотношения естественно без множителя  $q_{\infty}$ , от  $-\infty$  до  $x$  дает, опять с точностью до контролируемой погрешности, отклонение  $\delta y(x)$  линии тока от своей асимптоты. И, наконец, интегрируя это отклонение по  $x$  от

$-\infty$  до  $+\infty$  и оценивая все отмеченные выше погрешности, с точностью до несущественной ограниченной постоянной  $b$ , получаем асимптотическое выражение для  $S(h)$  и, в пределе, при  $h = \infty$ , требуемое выражение для предельной площади вытеснения  $S$

$$S(h) = \pi a^2 + bh^{-1}, \quad S = S(\infty) = \pi a^2$$

*Замечание.* Наличие местной сверхзвуковой зоны без скачков уплотнения на одновыпуклом теле сохраняет течение на бесконечности дозвуковым и потенциальным. Далее анализ фиктивной границы, состоящей из дозвуковых участков тела и звуковой линии с учетом теоремы А.А. Никольского и Г.И. Таганова [4] показывает, что фиктивная граница удовлетворяет условиям на изменение угла наклона вектора скорости в определении 2. Отсюда следует, что и в этом случае в начале координат ВП пересекаются лишь две нулевые изоклины, что сохраняет в силе теоремы 3 и 4.

Отметим, что в случае симметричного обтекания кругового цилиндра потоком несжимаемой жидкости соотношения (3.2) дают точное решение для всей области течения при условии, что радиус цилиндра равен постоянной  $a$  из (3.2). При этом площадь вытеснения для  $h = 0$  в точности равна площади обтекаемой фигуры, т.е. верхней половины цилиндра, а при увеличении  $h$  до бесконечности эта площадь удваивается:  $S = S(\infty) = 2S(0)$ . Также отметим, что остается открытым вопрос о существовании замкнутых тел или конечной системы замкнутых тел, при обтекании которых БУТ является точкой ветвления не менее чем третьего порядка (в начале координат ВП пересекаются не менее трех линий  $\theta = 0$ ) и, как следствие, для которых предельная площадь вытеснения равна нулю.

Автор благодарит Ю.Д. Шмыглевского за замечания, сделанные на семинаре и в ходе последующего обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00833).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Finn R., Gilbarg D. Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows // *Communs Pure Appl. Math.* 1957. V. 10. № 1. P. 23–63.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
3. Рылов А.И. О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // *ПММ.* 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 386–391.
4. Никольский А.А., Таганов Г.И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // *ПММ.* 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
5. Никольский А.А. О плоских вихревых течениях газа // *Теоретические исследования по механике жидкости и газа.* ТР. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
6. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
7. Рылов А.И. О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95–99.
8. Рылов А.И. О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 780–786.
9. Рылов А.И. О структуре дозвукового течения между несимметричным телом и отошедшей ударной волной // *ПММ.* 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 87–92.
10. Рылов А.И. О свойствах монотонности некоторых осесимметричных дозвуковых течений // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 167–171.
11. Рылов А.И. Свойства монотонности решений эллиптических систем первого порядка и

- их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 758–766.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
  13. Crocco L. Singolarita della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro // L'aerotecnica. 1937. V. 17. № 6. P. 519–534.
  14. Гудерлей К. Теория околзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
  15. Радвогин Ю.Б. Окрестность плоского заострения при сверхзвуковом обтекании // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 480–488.
  16. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

Новосибирск  
e – mail: rylov @ math. nsc. ru

Поступила в редакцию  
20.I.1998