УДК 533.6.011

© 1999 г. Г.Г. Денисов

К ВОПРОСУ ОБ ИМПУЛЬСЕ ВОЛНЫ, РАДИАЦИОННОМ ДАВЛЕНИИ И ДРУГИХ ВЕЛИЧИНАХ В СЛУЧАЕ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Рассматриваются малые колебания и волны идеального газа (жидкости) в квадратичном приближении. Найдены мгновенные значения плотности импульса и давления, а также их осредненные значения в ряде конкретных характерных задач. Показано, что импульс изолированной волны со средней плотностью, равной плотности невозмущенной среды, и радиационное давление обусловлены нелинейностью системы уравнений и что такая волна не имеет импульса, если ее профиль при движении остается неизменным. Последнее утверждение верно и для волн конечной амплитуды.

Воздействие волн в жидкостях или газах на отражающее их препятствие, а также давление на стенки замкнутого объема при колебаниях этих сред обычно объясняется изменением импульса возмущений при взаимодействии с препятствиями. В литературе имеются как утверждения об обязательном наличии импульса у волн [1–3], так и о полном его отсутствии [4, 5]. В связи с этой проблемой ниже изучаются решения уравнений гидродинамики, полученные с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде возмущений параметров среды в конкретных начально-краевых задачах. Некоторые известные задачи решаются здесь в несколько измененной постановке и результаты приводятся для полноты картины.

1. Постановка задачи. Рассматривается одномерное движение идеальной жидкости (газа) в трубе с единичной площадью сечения в отсутствие внешних воздействий. Уравнения неразрывности и Эйлера имеют вид

$$\rho_t+(\rho v)_x=0,\quad \rho v_t+\rho v v_x+p_x=0 \tag{1.1}$$

v – скорость течения в данной точке среды, ρ – плотность и p – давление. Умножая первое уравнение на v и складывая со вторым, получим

$$\rho_t+j_x=0,\quad j_t+(j^2\rho^{-1}+p)_x=0 \tag{1.2}$$

где $j=\rho v$ – плотность импульса (количество движения). Эти уравнения проще, чем исходная система и более удобны, что будет видно из дальнейшего.

Будет рассмотрен пакет волн в безграничной среде, его взаимодействие с отражающей стенкой, появление и развитие волновых движений газа при колебаниях поршня и другие задачи. Интересуясь решением с точностью до второго порядка малости по амплитуде возмущений параметров среды, будем искать ρ и j в виде

$$\rho=\rho_0+\rho'+\rho''+\ldots,\quad j=j'+j''+\ldots$$

где число штрихов соответствует порядку малости [6, 7]. Полагая давление однозначной функцией плотности, запишем уравнение Пуассона

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \approx p_0 + c_0^2\rho' + \frac{1}{2}c_0^2(\gamma-1)\frac{\rho'^2}{\rho_0} + c_0^2\rho'' \tag{1.3}$$

где γ – показатель адиабаты, $c_0^2 = (\partial p/\partial\rho)_{\rho=\rho_0}$ – квадрат скорости звука.

Запишем уравнения первого приближения и очевидное решение

$$\begin{gathered}\rho'_t + j'_x = 0, \quad j'_t + c_0^2\rho'_x = 0\\ \rho'/\rho_0 = f_1(\xi = x + c_0t) + f_2(\eta = x - c_0t)\\ j'/\rho_0 = -c_0f_1(\xi) + c_0f_2(\eta)\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь f_1 и f_2 – произвольные функции, характеризующие волны, бегущие влево и вправо, соответственно, с постоянной скоростью c_0 без изменения формы, модуль этих функций много меньше единицы.

Ниже будет рассматриваться и случай $\gamma < 0$, что физически неприемлемо, так как приводит к падению давления при увеличении плотности. В этом случае можно принять (для $\gamma = -1$) [1]

$$p = p_0 + c_0^2\rho_0(1 - \rho_0\rho^{-1}) \tag{1.5}$$

Тогда полученные ниже результаты будут верны для любого знака γ.

2. Бегущая волна в среде без границ. Импульс пакета волн, бегущего влево и описываемого непрерывной функцией $f(x + c_0t)$, заданной на интервале $0 \le x + c_0t \le l$ и равной нулю на концах этого интервала и вне его, целиком определяется в соответствии с решением (1.4) отклонением плотности от равновесной. В частности, если в момент времени t_1 пакет волн заключен между x_1 и $x_2 = x_1 + l$ и избыток массы пакета положителен, т.е.

$$\rho_0\int_{x_1}^{x_2} f(x,t_1)dx > 0$$

то его импульс

$$\int_{x_1}^{x_2} j'(x,t_1)dx < 0$$

т.е. направлен в сторону движения волны. При недостатке массы импульс будет больше нуля, т.е. направлен против движения волны. Подобные заключения легко сделать и относительно волны, бегущей вправо. Итак, в первом приближении движение пакета волн, обладающего импульсом, сопровождается переносом массы в направлении, не обязательно совпадающем с направлением его распространения.

Уравнения второго приближения для пакета волн, бегущего влево, имеют вид

$$\begin{gathered}\rho''_t + j''_x = 0\\ j''_t + c_0^2\rho''_x = -\rho_0^{-1}(j'^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)c_0^2\rho'^2)_x = -\varepsilon c_0^2\rho_0(f^2(\xi))_x\\ \varepsilon = (\gamma+1)/2\end{gathered} \tag{2.1}$$

Приведем решение, соответствующее начальным условиям для второго приближения, отличающимся от нуля лишь при $0 < x < l$

$$\rho''(x,0) = \rho_2^0(x), \quad j''(x,0) = j_2^0(x)$$

$$\rho''(x,t) = \varphi_+(x,t) + \frac{1}{2}[\rho_2^0(\xi) + \rho_2^0(\eta) - c_0^{-1}j_2^0(\xi) + c_0^{-1}j_2^0(\eta)]$$

$$j''(x,t) = \varphi_-(x,t) + \frac{1}{2}[j_2^0(\xi) + j_2^0(\eta) - c_0\rho_2^0(\xi) + c_0\rho_2^0(\eta)] \tag{2.2}$$

$$\varphi_\pm = \frac{\varepsilon}{4}\rho_0[-f^2(\xi) \pm 2c_0t[f^2(\xi)]_x + f^2(\eta)]$$

Решения получены для произвольной непрерывной функции $f(x, t)$, обладающей непрерывными производными по x и t, с использованием характеристик $\xi = x + c_0t$, $\eta = x - c_0t$ и преобразованием уравнений (2.1) к этим переменным, $t < t_*$ – время образования разрыва.

Из решений следует, что если в начальный момент, когда $\rho_2^0(x) = 0$, $j_2^0(x) = 0$, пакет волн, движущийся влево, был представлен функцией $f(x)$, то с течением времени он распадается на группу волн, бегущих влево и изменяющих свой профиль (первые два члена), и волну, бегущую вправо (третий член). Если избыточная масса и импульс начального пакета, определяемые интегралом

$$\int_0^l f(x)dx$$

были равны нулю, то образовавшиеся две группы волн имеют каждая в отдельности избыток (или недостаток) массы и импульс, определяемые интегралом от $f^2(x \pm c_0t)$, при равенстве нулю этих величин для всего волнового процесса. Это – проявление законов сохранения массы и импульса всего волнового процесса.

Заметим, что противоположно бегущая волна не возникает, если

$$\frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0f^2(x) + c_0\rho_2^0(x) + j_2^0(x) = 0 \tag{2.3}$$

Учитывая это, и исключая $j_2^0(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_0f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0c_0t[f^2(\xi)]_x + \rho_2^0(\xi) \\ j &= c_0(\rho_0 - \rho) - \frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0f^2(\xi) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Приведем еще один вид формул при

$$\rho_2^0(x) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_0[xf^2(x)]_x$$

Имеем

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_0f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0[xf^2(\xi)]_x \\ j &= -c_0\rho_0f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0x[f^2(\xi)]_x \end{aligned} \tag{2.5}$$

Решения (2.4) и (2.5) различаются во втором приближении, которое в первом случае содержит член $\sim t$, а во втором $\sim x$, однако поведение решений сходно, так как при движении волны $x \sim c_0t$. Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho' + \rho'')dx \quad \text{и} \quad \int_{x_1}^{x_2} jdx$$

не могут обращаться в нуль одновременно. Эти формулы не дают той простой связи между импульсом и плотностью, как в первом приближении.

Решения для волны, бегущей вправо, получим, сменив знак у c_0.

Из полученных формул следует, во-первых, широко известный результат: волна не может распространяться без искажений (за счет члена, пропорционального t или x), кроме случая $\gamma = -1$. Во-вторых, нераспадающаяся волна с необходимостью имеет либо импульс, либо избыток (или недостаток) массы, либо и то и другое. Так, при $\rho_2^0(x) = -\varepsilon\rho_0 f^2(x)/2$ пакет волн не имеет импульса при недостатке массы.

Обратим внимание на еще один немаловажный факт, следующий из формул (2.4). В случае

$$\rho_2^0(x) = 0, \quad \int_0^l f(x)dx = 0$$

пакет обладает нулевой избыточной массой, так как

$$\int_0^l [f^2(x)]_x dx = 0$$

в силу $f(0) = f(l) = 0$ и, вместе с этим, имеет отличный от нуля импульс, равный

$$\int_0^l j''(x)dx = -\frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0\int_0^l f^2(x)dx \tag{2.6}$$

Возникает вопрос, как может пакет волн без избытка массы переносить ее, поскольку имеется отличный от нуля импульс? Разрешим этот парадокс. Подсчитаем импульс среды в границах x_1, x_2, в которой справа налево движется пакет волн с передним фронтом в точке $x = -c_0 t$ и задним фронтом в точке $x = l - c_0 t$, так что $x_1 \le -c_0 t$, $l - c_0 t \le x_2$. Центр масс x_c этой части среды найдем по формуле

$$\rho_0(x_2 - x_1)x_c = \int_{x_1}^{x_2} x\rho(x,t)dx = \frac{1}{2}\rho_0(x_2^2 - x_1^2) + \rho_0\int_0^l zf^2(z)dz - \frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0 t\int_0^l f^2(z)dz$$

(Поставлена плотность из (2.4) при $\rho_2^0 = 0$.)

Отсюда следует, что наличие волны с нулевым средним приводит в первом приближении лишь к постоянному смещению центра масс рассматриваемой части среды, а скорость центра масс дается вторым приближением целиком и обусловлена изменением профиля волны. Имеем

$$\rho_0 l\dot{x}_c = -\frac{\varepsilon}{2}c_0\rho_0\int_0^l f^2(z)dz$$

что полностью совпадает с выражением для импульса (2.6). Полученный результат распространяется и на волны конечной амплитуды.

Таким образом, несмотря на отсутствие избытка массы, импульс пакета тоже связан с переносом массы за счет перераспределения плотности относительно пакета, т.е. за счет изменения его профиля. Импульс пропорционален $\gamma + 1$, более плотные участки обладают большей скоростью, чем менее плотные [8], поэтому его направление совпадает с направлением распространения пакета, если $\gamma > -1$. Несовпадение направлений импульса и скорости распространения пакета волн при недостатке массы и особенно наличие импульса при нулевом избытке массы пакета существенно отличают связь между импульсом и скоростью в дискретных системах и сплошных средах. Если в дискретной системе аналогом первого факта может служить отрицательная масса, то второму факту аналога нет, он присущ только распределенной системе и обусловлен ее нелинейностью, знак эффекта определяется знаком $\gamma + 1$. Заметим, что при $\gamma = -1$ уравнения в лагранжевых координатах линейны [7] и волны распространяются без искажения, равно как и в эйлеровых координатах, поэтому второй отмеченный факт в этом случае отсутствует, и бегущая волна с нулевой избыточной массой не имеет импульса [9].

Следует заметить, что для определения импульса (2.6) недостаточно первого приближения, в отличие от случая волны, занимающей конечную область трехмерного пространства, и использования постоянства потенциала скорости вне волны [8]. В случае плоских волн потенциалы скорости перед волной и позади нее различны.

3. Взаимодействие пакета волн произвольной формы и отражающей непроницаемой стенки. Пусть стенке соответствует $x = 0$ и в начальный момент времени пакет волн расположен в области $x_0 < x < l + x_0$ и движется в направлении стенки. При $x_0 \le c_0 t \le x_0 + l$ происходит взаимодействие пакета волн и стенки, а при $x_0 + l \le c_0 t$ сформировавшийся отраженный пакет волн движется, удаляясь от стенки. Поскольку стенка непроницаема, запишем условие $j(0,t) = 0$.

Для решения этой краевой задачи воспользуемся известным приемом и рассмотрим симметричную относительно $x = 0$ безграничную задачу, в которой

$$j(x,t) = -j(-x,t), \quad \rho(x,t) = \rho(-x,t)$$

а начальные значения $j_0(x)$ и $\rho_0(x)$ взяты такими, что возбуждаются нераспадающиеся пакеты волн, симметрично расположенные по отношению к стенке и бегущие в направлении к ней. Решение этой задачи запишем в виде

$$\rho = \rho_0\Big\{1 + f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\xi)]_x c_0 t + \rho_0^{-1}\rho_2^0(\xi) + f(\eta) - \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\eta)]_x c_0 t +$$

$$+ \rho_0^{-1}\rho_2^0(\eta) + \frac{1}{4}(3-\gamma)[f_x(\eta)F(\xi) + f_x(\xi)F(\eta) + 2f(\xi)f(\eta)]\Big\} \tag{3.1}$$

$$j = +\rho_0 c_0\Big\{-f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}f^2(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\xi)]_x c_0 t - \rho_0^{-1}\rho_2^0(\xi) + f(\eta) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}f^2(\eta) - \frac{\varepsilon}{2}[f^2(\eta)]_x c_0 t + \rho_0^{-1}\rho_2^0(\eta) + \frac{1}{4}(3-\gamma)[f_x(\eta)F(\xi) - f_x(\xi)F(\eta)]\Big\}$$

$$x_0 \le \xi \le l + x_0, \quad -l - x_0 \le \eta \le -x_0$$

где $F_z(z) = f(z)$, $\rho_2^0(x,0)$ – начальные данные для второго приближения, $j(0, t) = 0$ в силу четности функций $f(x, t)$ и $\rho_2^0(x,0)$ относительно $x = 0$.

Решения для $j(x, t)$ и $\rho(x, t)$ могут трактоваться двояко: 1) как описание волнового процесса сближающихся пакетов волн при $0 \le c_0 t \le x_0$, когда их области не перекрываются и поэтому последние члены, содержащие произведения из функций от ξ и η, равны нулю, взаимодействие пакетов волн при $x_0 \le c_0 t \le l + x_0$, когда все члены решений отличны от нуля, и наконец, разбегающихся пакетов волн при $x_0 + l \le c_0 t$ – и последние члены решений снова исчезают; 2) как описание набегающего на стенку пакета волн, расположенного целиком справа от нее при $0 \le c_0 t \le x_0$, когда следует учитывать только члены, зависящие от ξ, взаимодействие пакета волн со стенкой при $x_0 \le c_0 t \le x_0 + l$ (учитываются все члены при $0 < x$) и удаляющегося от стенки после отражения пакета волн при $l + x_0 \le c_0 t$, когда следует учитывать только члены, зависящие от η.

Подставляя $\rho(0, t)$ в формулу (1.3), получим значение давления волн на стенку в любой момент времени и суммарное воздействие

$$\int\limits_{x_0/c_0}^{(x_0+l)/c_0} p(0,t)dt = [2\rho_0\overline{f(c_0 t)} + \varepsilon\rho_0\overline{f^2(c_0 t)} + 2\overline{\rho_2^0(c_0 t)}]c_0 l$$

Вычислим теперь начальный импульс пакета волн при $x > 0$

$$G(x,0) = \int\limits_{x_0}^{l+x_0} j(x,0)dx = -\left[\rho_0 c_0\overline{f(x)} + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0\overline{f^2(x)} + c_0\overline{\rho_2^0(x)}\right]l$$

Таким же по величине, но с противоположным знаком будет импульс отраженного пакета $G(x, t_1)$ для $x_0 + l < c_0 t_1$ и $0 < x$, и $G(x, t_1) - G(x, 0)$ сопадает с суммарным действием на стенку волнового пакета. В случае волны без избытка плотности ее импульс и воздействие на стенку зависят от длины пакета волн, вида начального возмущения $f(x, 0)$ и нелинейных свойств среды. При $1 + \gamma > 0$ волна давит на стенку, а при $1 + \gamma < 0$ давление на стенку отрицательное.

4. Возбуждение волн в газе движущимся поршнем. Будем рассматривать движение газа как справа, так и слева от поршня, находившегося при $t = 0$ в начале системы координат, причем скорость поршня, как и скорость газа, всюду были равны нулю. Следовательно, $j(x, 0) = 0$ для всех x.

Выведем краевые условия, рассматривая задачу при малых колебаниях поршня. Скорость v газа в месте нахождения $s(t)$ поршня должна быть равной его скорости

$$v(s(t),t) = \dot{s}(t) \approx v'(0,t) + v''(0,t) + v'_x(0,t)s(t)$$

Учитывая соотношение $j(x, t) \simeq (\rho_0 + \rho')(v' + v'')$, найдем

$$j'(0,t) = \rho_0 \dot{s}(t); \quad j''(0,t) = -j'_x(0,t)s(t) + \rho'(0,t)\dot{s}(t)$$

Уравнения первого приближения, краевые и начальные условия таковы:

$$\rho'_t + j'_x = 0, \quad j'_t + c_0^2 \rho'_x = 0, \quad j'(0,t) = \rho_0 \dot{s}(t), \quad 0 \le t < \infty$$

$$\dot{s}(0) = 0, \quad j'(x,0) = 0, \quad \rho'(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

Для второго приближения имеем

$$\rho''_t + j''_x = 0, \quad j''_t + c_0^2 \rho''_x = -\tfrac{1}{2}[c_0^2 \rho_0^{-1}(\gamma - 1)\rho'^2 + j'^2 \rho_0^{-1}]_x$$

$$j''(0,t) = \rho'(0,t)\dot{s}(t) - j'_x(0,t)s(t), \quad j''(x,0) = 0$$

Решение задачи первого приближения имеет вид

$$c_0 \rho' = \Theta(x)\rho_0 s_t(z_-) - \Theta(-x)\rho_0 s_t(z_+)$$

$$j' = \Theta(x)\rho_0 s_t(z_-) + \Theta(-x)\rho_0 s_t(z_+)$$

$$z_\pm = t \pm x / c_0$$

где $\Theta(x)$ – единичная функция и $\Theta(0) = \tfrac{1}{2}$.

Решение представляет собой две одинаковых исходящих из точки $x = 0$ волны, распространяющихся в разные стороны, с передним фронтом волны, бегущей вправо (влево), в точке $x = c_0 t(-c_0 t)$.

Уравнения второго приближения для волны, бегущей вправо, имеют вид

$$\rho''_t + j''_x = 0, \quad j''_t + c_0^2 \rho''_x = -\varepsilon \rho_0 [s_t^2(z_-)]_x, \quad 0 \le x \le c_0 t$$

Для волны, бегущей влево, при $-c_0 t \le x \le 0$, надо сменить c_0 на $-c_0$.

Начальные условия $j''(x, 0) = 0$, $\rho''(x, 0) = 0$. Краевые условия при учете решения первого приближения приводим к виду

$$j''(0,t) = \rho_0 c_0^{-1}[s(t)s_t(t)]_t = R_t(t)$$

Решение задачи для волны, бегущей вправо, таково:

$$\rho' + \rho'' = \rho_0 c_0^{-1} s_t(z_-) - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0^{-2}[x s_t^2(z_-)]_x + c_0^{-1} R_t(z_-)$$

$$j' + j'' = \rho_0 s_t(z_-) - \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 c_0^{-1} x [s_t^2(z_-)]_x + R_t(z_-)$$

для волны, бегущей влево, следует сменить знак перед c_0.

К выражениям для ρ', j' добавляются решения в виде волн с увеличивающейся по мере роста x амплитудой, пропорциональной $\gamma + 1$, и волн, определяемых движением поршня через функцию $R_t(t)$. Члены, пропорциональные x, приводят к искажению профиля волн и именно они обусловливают вместе с членами первого порядка импульс волн. Если движение поршня прекращается при некотором $t = T$, то в этот момент формируются два пакета волн, бегущих в разные стороны. При $t > T$ их передние фронты находятся на расстояниях $x = \pm c_0 t$, а задние – на расстояниях $x = \pm c_0(t - T)$.

Подсчитаем импульс и избыток массы этих пакетов, для произвольного движения $s(t)$ поршня при условиях

$$s(0) = 0, \quad s(t \geq T) = s(T), \quad s_t(0) = s_t(T) = 0$$

Получим

$$G_{\pm} = \int\limits_{x_1}^{x_2} (j' + j'')dx = \rho_0 c_0 s(T) \pm \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 \int\limits_0^T s_t^2(\tau)d\tau$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\rho' + \rho'')dx = \pm \rho_0 s(T)$$

где $x_1 = +c_0(t - T)$, $x_2 = c_0 t$ для $x > 0$ и $x_1 = -c_0 t$, $x_2 = -c_0(t - T)$ для $x < 0$. Верхний (нижний) знак соответствует пакету, находящемуся при $x > 0$ ($x < 0$) и бегущему вправо (влево). Импульс в первом приближении определяется результирующим смещением $s(T)$ поршня. При этом газовая среда как справа, так и слева получает одинаковый импульс, направленный в сторону смещения поршня несмотря на то, что пакеты волн движутся в разные стороны. Избыток плотности тоже определяется смещением поршня $s(T)$ и для волн, бегущих в разных направлениях, имеет разные знаки. При $s(T) > 0$ происходит сжатие среды справа от поршня и разрежение слева от него.

Второе слагаемое в формулах для импульса обусловлено членами второго порядка малости. Однако при $s(T) = 0$, т.е. в случае, когда поршень прекратил движение в исходной точке, или когда время T велико, эта часть импульса становится доминирующей. Она всегда направлена в сторону распространения пакета волн, если $\gamma + 1 > 0$ и против при $\gamma + 1 < 0$.

Найдем условия, при которых второе слагаемое в формуле для импульса много больше первого для поршня, колеблющегося по закону

$$s(t) = \begin{cases} a(1 - \cos\omega t), & 0 \leq t \leq n\pi/\omega = T \\ s(t) = s(T), & T < t \end{cases}$$

Здесь полное время движения поршня равно целому числу полупериодов его колебаний. Импульсы пакетов волн при нечетном n такие:

$$G_{\pm} = 2\rho_0 c_0 a \pm \frac{\varepsilon}{4}\rho_0 \omega^2 a^2 T$$

и искомые условия приводятся к виду $n \gg 8c_0/(\pi\varepsilon a\omega)$.

Оценка показывает, что даже для очень мощных излучателей это отношение велико и пренебрегать первым слагаемым можно только для длинных цугов волн. При $s(T) = 0$ генерируются пакеты волн без избыточной массы, но с отличным от нуля импульсом. Это находится в полном соответствии с результатами разд. 2 и обусловлено изменением профиля волн. Поток массы через произвольное сечение x за время между приходом пакета волн t_1 и окончанием t_2 равен нулю.

Результаты решения этой задачи сопоставимы с решением Ирншоу [7].

5. Две неподвижные стенки. Рассмотрим колебания газа при следующих краевых и начальных условиях:

$$j(0,t)=j(l,t)=0,\quad \rho(0,x)=\rho_0+\rho_0 ak\cos kx,\quad j(0,x)=0$$

где $\sin kl=0$, $ak \ll 1$, $c_0=\omega/\mathrm{k}$. Имеем

$$\rho=\rho_0+\rho_0 ak\cos kx\cos\omega t+\frac{1}{4}\rho_0 a^2k^2\cos 2kx[(2-\varepsilon)(1-\cos 2\omega t)-\varepsilon\omega t\sin 2\omega t]$$

$$j=\rho_0 a\omega\sin kx\sin\omega t+\frac{1}{4}\rho_0 a^2k\omega\sin 2kx\left[\left(\frac{3}{2}\varepsilon-2\right)\sin 2\omega t+\varepsilon\omega t\cos 2\omega t\right]$$

При этом среднее радиационное давление равно

$$\overline{\Pi}^t=\overline{p+\rho v^2}^t=\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Pi(x,t)dt=p_0+\frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2\omega^2\left(1+\frac{1}{2}\cos 2\omega t_0\cos 2kx\right)$$

Здесь τ – время осреднения, равное целому числу периодов колебаний газа.

Как видим, среднее радиационное давление имеет постоянную и меняющуюся в пространстве составляющие [7]. Однако последняя зависит от начала процесса осреднения t_0 и целиком определяется секулярным членом решения $\rho(x, t)$. Это означает, что зависимость среднего давления от x обусловлена нестационарностью колебаний. Принимая производительность t_0, можно отбросить в выражении среднего от П последний член. Тогда придем к выражению для радиационного давления, совпадающему с приведенным ранее [9], полученному без использования точного решения.

6. Две колеблющиеся стенки, создающие бегущую волну. Пусть две непроницаемые твердые стенки синхронно колеблются, сохраняя постоянным расстояние l между собой и создавая бегущую волну.

Решения имеют вид при $lk=2\pi n$

$$\rho=\rho_0+\rho_0 ak\sin(\omega t-kx)+\frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2k^2[2\omega t\sin 2(\omega t-kx)+\cos 2(\omega t-kx)]$$

$$j=\rho_0 a\omega\sin(\omega t-kx)+\frac{\varepsilon}{2}\rho_0 a^2\omega^2 kt\sin 2(\omega t-kx)$$

Колебания стенок и начальные условия имеют вид

$$s_1(t)=s_2(t)=-a\cos\omega t+\frac{1}{8}a^2k[(4+\varepsilon)\sin 2\omega t-2\varepsilon\omega t\cos 2\omega t]$$

$$\rho(x,0)=\rho_0-\rho_0 ak\sin kx+\frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2k^2\cos 2kx,\quad j(x,0)=-\rho_0 a\omega\sin kx$$

Решения удовлетворяют соотношениям

$$\int_{s_1}^{l+s_1}\rho(x,t)dx=\rho_0 l,\quad \int_{s_1}^{l+s_1}j(x,t)dx=0$$

означающим неизменность массы газа между стенками и отсутствие импульса этого газа в любой момент времени.

Поясним, что при выводе решений были использованы соотношения

$$v(l+s_2,\ t)=\dot{s}_2,\quad j=\rho v$$

и выражения для приближений s_2 получались из формул

$$\rho_0\dot{s}_2'=j'(l,t),\quad \rho_0\dot{s}_2''=(j_x's_2'+j''-\rho_0^{-1}\rho'j')_{x=l}$$

Подобные выражения для s_1 получаются из этих при замене $l\to 0$. Это касается и задач, рассматриваемых ниже в разд. 7 и 8. Среднее значение радиационного давления будет следующим:

$$\overline{\Pi}^t = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{\tau+t_0}\Pi dt = p_0 + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 a^2\omega^2\left[1-\frac{1}{2}\cos 2(\omega t_0 - kx)\right]$$

Как и в предыдущей задаче, результат осреднения зависит от t_0. Дополнительное давление, возникающее при возбуждении бегущей волны, вдвое больше, чем в случае стоячей волны. Это объясняется тем, что при бегущей волне амплитуда колебаний газа в каждом сечении x одинакова, а при стоячей волне такая амплитуда достигается только в пучностях. В данном случае (разд. 5, 6) радиационное давление не связано с импульсом газа, всегда равным нулю.

7. Колебания газа между двух стенок – неподвижной и подпружиненной. Краевые условия на неподвижной и движущейся стенках имеют вид

$$j(0,\ t) = 0, \quad p(l+s_2,\ t) = rs_2 + p_0$$

где s_2 – смещение правой стенки, r – жесткость пружины.

При этом возможны стационарные колебания в виде стоячих волн

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 ak\cos kx\cos\omega t +$$

$$+\frac{1}{4}\rho_0 a^2k^2\{(2\cos 2kx + \varepsilon kx\sin 2kx)\cos 2\omega t + (2-\varepsilon)\cos 2kx\} + \rho_0''$$

$$j = \rho_0 a\omega\sin kx\sin\omega t + \frac{1}{4}\rho_0 a^2k\omega\left[\left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin 2kx - \varepsilon kx\cos 2kx\right]\sin 2\omega t$$

$$s_2 = -a\sin kl\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{8}a^2k\left[-\frac{\sin 2kl}{2} + kl\cos 2kl\right]\cos 2\omega t + s_{20}$$

где

$$\rho_0'' = -\frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2k^2\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0 c_0^2 + rl}\left(1+\frac{r^2}{\rho_0^2c_0^2\omega^2 + r^2}\right)$$

$$\overline{\Pi}^t = p_0 + \frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2\omega^2\left(1+\frac{\sin 2kl}{2kl}\right)\frac{rl}{rl+\rho_0 c_0^2}$$

$$s_{20} = \frac{\varepsilon}{4}a^2k^2\frac{\rho_0 c_0^2 l}{\rho_0 c_0^2 + rl}\left(1+\frac{\sin 2kl}{2kl}\right)$$

Параметры и решения удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{ctg} kl = -r(\rho_0 c_0\omega)^{-1}, \quad kl\operatorname{ctg}^2 kl + 3\operatorname{ctg} kl + 3kl = 0$$

$$\int_0^{l+s_2}\rho(x,\ t)dx = \rho_0 l$$

Представляют интерес средние значения параметров при предельных значениях жесткости пружины

$$\Pi_0'' \to 0, \quad \rho_0'' \to -\frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2k^2, \quad s_{20} \to \frac{\varepsilon}{4}a^2k^2 l \quad \text{при} \quad r \to 0$$

$$\Pi_0'' \to \frac{\varepsilon}{4}\rho_0 a^2\omega^2, \quad \rho_0'' \to 0, \quad s_{20} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty$$

т.е. радиационное давление в случае очень большой жесткости стремится к давлению, возникающему при колебаниях газа в виде стоячих волн при неподвижных стенках, а при очень мягкой пружине стремится к нулю при максимальном увеличении объема за счет s_{20} и уменьшении плотности.

8. Бегущая стационарная волна. Бегущая стационарная волна возникает при заданных колебаниях левой стенки и упруго-демпферном закреплении правой стенки, имеющей массу. Краевое условие на правом конце имеет вид

$$p(l+s_2,\ t) = m\ddot{s}_2 + h\dot{s}_2 + rs_2 + p_0$$

Бегущая волна возникает при $m\omega^2 = r$, $h = \rho_0 c_0$ и записывается в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 ak\sin(\omega t - kx) + \frac{1}{2}\rho_0 a^2 k^2\left\{\frac{\varepsilon-4}{2}\cos 2(\omega t - kx) + \right.$$

$$\left. + \left[\varepsilon k(x-l) - \frac{\varepsilon}{3r}\rho_0 c_0\omega\right]\sin 2(\omega t - kx) - \varepsilon\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0 c_0^2 + rl}\right\}$$

$$j = \rho_0 a\omega\sin(\omega t - kx) + \rho_0 a^2 k\omega\left\{-\cos 2(\omega t - kx) + \left[\frac{\varepsilon k}{2}(x-l) - \frac{\varepsilon}{6r}\rho_0 c_0\omega\right]\sin 2(\omega t - kx)\right\}$$

Левая стенка колеблется с нулевым средним по закону

$$s_1 = -a\cos\omega t + \frac{1}{4}a^2 k\left[\varepsilon kl + \frac{\rho_0 c_0\omega}{3r}\varepsilon\right]\cos 2\omega t$$

а правая по закону

$$s_2 = -a\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{12r}\rho_0 a^2\omega^2\cos 2\omega t + \frac{\varepsilon}{2}a^2 k^2 l\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0 c_0^2 + rl}$$

Возникающее среднее радиационное давление равно

$$\overline{\Pi(x,\ t)'} = p_0 + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 a^2\omega^2\frac{rl}{\rho_0 c_0^2 + rl} \quad \text{при} \quad \int_{s_1}^{l+s_2}\rho(x,\ t)dx = \rho_0 l$$

Среднее давление определяется не только амплитудой волны и нелинейностью, но и жесткостью r, сдерживающей правую стенку пружины. Имеем

$$\Pi_0'' \to 0, \quad s_{20} \to \frac{\varepsilon}{2}a^2 k^2 l, \quad \rho_0'' \to -\frac{\varepsilon}{2}\rho_0 a^2 k^2 \quad \text{при} \quad r \to 0$$

$$\Pi_0'' \to \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 a^2\omega^2, \quad s_{20} \to 0, \quad \rho_0'' \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty$$

Итак, возникающее при наличии бегущей волны среднее давление максимально при $r = \infty$ и равно давлению, полученному в разд. 6.

9. О звуковой энергии. Были приведены [7] два выражения плотности E звуковой энергии. В квадратичном приближении

$$E_2 = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2\rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma-1}(\rho' + \rho'')$$

$$E_{2A} = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2\rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma}(\rho' + \rho'')$$

Первое из этих выражений – общепринятое, а второе предложено Н.Н. Андреевым [6]. Заметим, что в случае неизменного объема V_0

$$\int_{V_0}(\rho' + \rho'')dV = 0$$

поэтому для подсчета полной звуковой энергии можно считать плотность по двум первым одинаковым членам приведенных выражений. Однако в общем случае (изменяющихся поверхностей или при подсчете энергии в части объема) усеченным выражением плотности пользоваться нельзя. Для решения вопроса в пользу того или иного определения E можно использовать полученные решения. Различие существенно и обнаруживается даже в первом порядке. Это значительно облегчает задачу.

Приведем выражения для плотности потенциальной энергии [7, 8]

$$\rho u = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^{\gamma-1}} \approx \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{\rho' c_0^2}{\gamma-1}$$

где u – потенциальная энергия единицы массы, а второй член этого выражения обычно и принимается за линейную добавку к плотности невозмущенной среды при ее колебаниях. Однако здесь не учтено изменение объема. Оставаясь в рамках первого приближения, запишем энергию массы газа в малом объеме V_0 до и $V_0 + V'$ после возмущения так, что можно считать величину $(\rho u)'$ неизменной в пределах этого объема. Имеем

$$\int\limits_{V_0+V'} [\rho_0 u_0 + (\rho u)']dV \approx \rho_0 u_0 (V_0 + V') + (\rho u)' V_0$$

Вычитая энергию невозмущенной среды и деля на объем, получим плотность звуковой энергии в первом приближении по Н.Н. Андрееву

$$E_{1A} = \rho_0 u_0 \frac{V'}{V_0} + (\rho u)' = \frac{\rho' c_0^2}{\gamma}$$

Здесь использовано соотношение ρV = const, означающее неизменность массы рассматриваемой части среды.

Был приведен вывод выражения для плотности звуковой энергии в общем случае [6].

В качестве примера обратимся к задаче из разд. 4 с решением

$$\rho' = \rho_0 c_0^{-1} s_t (t - x / c_0)$$

В этой задаче вся энергия волны, бегущей вправо, определяется в первом приближении работой сил давления p_0 на стенку и ее смещением $s(T)$ и равна $p_0 s(T) = c_0^2 \rho_0 s(T) / \gamma$, где T – время остановки поршня. С другой стороны, эта энергия может быть получена интегрированием по x плотности энергии образовавшейся волны. Взяв плотность энергии по Н.Н. Андрееву, будем иметь

$$\int\limits_0^{c_0 t} \frac{c_0^2}{\gamma} \rho' dx = \frac{\rho_0 c_0}{\gamma} \int\limits_0^{c_0 t} s_t \left(t - \frac{x}{c_0} \right) dx = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} s(T) \quad (T < t)$$

Совпадение результатов вычислений энергии подтверждает верность выражения плотности энергии по Н.Н. Андрееву.

Представляет интерес случай отсутствия потока массы: $\bar{j}^t = 0$. Это имеет место в задаче из разд. 4 при $\bar{s}_t^t = 0$. Возьмем, например, решение для волны, бегущей вправо, и подсчитаем среднюю по времени плотность энергии по обычной формуле

$$\bar{E}_2 = \rho_0 \overline{s_t^2} \left(t - \frac{x}{c_0} \right) - \frac{\varepsilon \rho_0}{2(\gamma-1)} \bar{s}_t^2 = \frac{3\gamma - 5}{4(\gamma-1)} \rho_0 \overline{s_t^2}$$

Этот результат неприемлем с физической точки зрения, так как для $1 < \gamma < 5/3$, т.е. для большинства газов, энергия в звуковом поле меньше энергии в невозмущенной среде, что приведет к неустойчивости. На этот результат уже обращалось внимание [7, 10], но дана иная трактовка причины его происхождения. Если же принять плотность энергии по Н.Н. Андрееву, расчет дает

$$\overline{E}^t_{2A} = \frac{3\gamma - 1}{4\gamma} \overline{s_t^2} > 0$$

для всех газов.

10. О средних величинах. Обычно наибольший интерес представляют не мгновенные значения величин, характеризующих волновой или колебательный процесс, а их средние по времени значения. Часто средние по времени и пространству совпадают, однако, например, в случае волн с изменяющимся профилем, это не так. Для выяснения вопроса о том, каким из средних следует пользоваться, рассмотрим уравнение, связывающее плотность энергии и ее поток q

$$E_t + q_x = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [E(x,\ t_2) - E(x,\ t_1)]dx + \int_{t_1}^{t_2} [q(x_2,\ t) - q(x_1,\ t)]dt = 0$$

Рассмотрим случай, когда слева направо распространяется волновое возмущение, так что его передний фронт при $t = t_1$ находится в сечении x_1, а при $t = t_2$ – в сечении x_2. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x,\ t_2)dx = \int_{t_1}^{t_2} q(x_1,\ t)dt \quad (x_2 - x_1)\overline{E}^x = (t_2 - t_1)\overline{q}^t$$

и, при учете равенства $x_2 - x_1 = c_0(t_2 - t_1)$ получим $c_0\overline{E}^x = \overline{q}^t$. Таким образом, широко распространенная формула $c_0\overline{E}^t = \overline{q}^t$ непригодна для волн с изменяющимся профилем, и для расчета энергии в заданном объеме следует пользоваться ее пространственной плотностью или ее средним по времени потоком через заданную поверхность. Сказанное касается и уравнений

$$\rho_t + j_x = 0, \quad j_t + \Pi_x = 0$$

где при подсчете массы и потока массы (первое уравнение) надо пользоваться средними $\overline{\rho}^x$, $\overline{j}^t$, а при подсчете импульса и радиационного давления (второе уравнение) следует использовать $\overline{j}^x$, $\overline{\Pi}^t$.

Приведем еще формулу, выражающую радиационное давление через плотность кинетической энергии при неизменном расстоянии между стенками (разд. 5 и 6) и в случае подпружиненных стенок (разд. 7 и 8)

$$\overline{\Pi}''^t = \varepsilon \overline{\overline{E}}_k$$

В случае задач из разд. 7 и 8 правая часть равенства должна быть дополнена множителем $rl/(rl + \rho_0 c_0^2)$. Отметим сильную зависимость радиационного давления от жесткости r пружины.

11. Заключение. Наличие импульса у изолированной волны определяется начальными условиями. Волна без избытка или недостатка плотности имеет импульс, направленный в сторону ее движения при $\gamma + 1 > 0$, признаком наличия импульса в этом случае является изменение ее профиля. Необходимым следствием прохождения в среде волны, обладающей импульсом, является перенос массы.

Следует различать причины появления среднего радиационного давления на отражающее препятствие в случае изолированной волны и в случае замкнутого объема, заполненного колеблющейся средой. В первом случае давление обусловлено наличием импульса у волны, а во втором – стремлением среды расшириться при появлении колебаний (в виде стоячих или бегущих волн) вследствие нелинейности уравнений и среды. Мерой нелинейности является величина $\gamma + 1$. Среднее давление на стенки замкнутого объема сильно зависит от сдерживающих эти стенки усилий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00927, 99-01-00061).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Strutt J.W. (Rayleigh)* Theory of Sound. Рэлей. Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 2. 475 с.
2. *Кадомцев Б.Б., Рыдник В.И.* Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981. 151 с.
3. *Миллер М.А., Островский Л.А.* Волны // Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1988. Т. 1. С. 315–328.
4. *Brillouin L.* Sur les tensions de radiation // Ann. Phys. 1925. V. 10. N 4. P. 528–586.
5. *McIntyre M.E.* On the wave – momentum myth. Мак-Интайр И. Миф о волновом импульсе. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 454–476.
6. *Андреев Н.Н.* О некоторых величинах второго порядка в акустике // Акуст. Журн. 1955. Т. 1. Вып. 1. С. 3–11.
7. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. *Rayleigh.* On the momentum and pressure of gasseous of vibrations and on the connexion with virial theorem // Phil. Mag. 1905. T. 10. P. 364–374.
10. *Островский Л.А.* Величины второго порядка в бегущей звуковой волне // Акуст. журн. 1968. Т. 14. Вып. 1. С. 82–89.
11. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
12. *Денисов Г.Г.* О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 42–51.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
14.X.1998