УДК 532.5

© 1999 г. Г.В. Попович, Р.Е. Попович

ТЕЧЕНИЯ НЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ИМЕЮЩИЕ ЛИНЕЙНУЮ ЗАВИХРЕННОСТЬ

Описаны все течения несжимаемой жидкости, для которых завихренность поля скоростей линейна по пространственным переменным.

Для классификации течений в гидродинамике часто используется условие потенциальности поля скорости жидкости. Однако произвольное потенциальное течение несжимаемой жидкости является гармоническим, а поэтому не зависит от вязкости. Возникает задача описания классов течений, обобщающих потенциальные и имеющих ненулевую завихренность. Это задача рассматривается ниже при условии, что завихренность зависит от пространственных координат по линейному закону.

1. Постановка задачи. Найдем все частные решения уравнений движения несжимаемой жидкости

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

удовлетворяющие дополнительному условию, или дифференциальной связи, $(\operatorname{rot}\mathbf{u})_{ab} = \mathbf{0}$, т.е.

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = H(t)\mathbf{x} + \mathbf{k}(t) \tag{1.2}$$

В формулах (1.1), (1.2) и всюду далее $\mathbf{u} = \{u^a(t, \mathbf{x})\}$ – поле скорости жидкости, $p = p(t, \mathbf{x})$ – давление, $\mathbf{x} = \{x_a\}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_a = \partial/\partial x_a$, $\nabla = \{\partial_a\}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – лапласиан, $H = \{H^{ab}(t)\}$ – некоторая матрица-функция размера 3×3, $\mathbf{k} = \{k^a(t)\}$. Плотность жидкости считаем равной единице. Кинематический коэффициент вязкости ν равен нулю для идеальной жидкости и отличен от нуля для вязкой. Индексы a и b меняются от 1 до 3. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Нижние индексы у функций означают дифференцирование по соответствующим переменным.

В гидродинамических терминах поставленную задачу можно переформулировать следующим образом: описать все течения несжимаемой жидкости, для которых завихренность поля скорости линейна по пространственным переменным. Данный класс течений включает в качестве подклассов течения со скоростью, линейной или квадратичной по $\mathbf{x}$. При $H = 0$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ уравнение (1.2) вырождается в условие потенциальности поля $\mathbf{u}$. Интегрируя уравнение (1.2), получим такое локальное представление для его решений

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \frac{1}{3}(H\mathbf{x}) \times \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{k} \times \mathbf{x} \tag{1.3}$$

где $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ – произвольная дифференцируемая функция.

Представление (1.3) позволяет дать еще одну формулировку поставленной задачи:

построить все решения уравнений (1.1), для которых поле скорости является линейной суперпозицией потенциального поля и поля, квадратичного по пространственным переменным.

Замечание 1. Известно [1–5][1], что максимальной в смысле Ли алгеброй инвариантности системы (1.1) является алгебра

$$\langle \partial_t, J_{ab}, D^t, D^x, R(\mathbf{m}), Z(\chi)\rangle \tag{1.4}$$

если $\nu = 0$, или алгебра

$$\langle \partial_t, J_{ab}, D^t + \frac{1}{2}D^x, R(\mathbf{m}), Z(\chi)\rangle \tag{1.5}$$

если $\nu \neq 0$. В формулах (1.4) и (1.5) использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\partial_t = \partial/\partial t,\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial/\partial u^b - u^b\partial/\partial u^a\ (a < b)\\ D^t = t\partial_t - u^a\partial/\partial u^a - 2p\partial/\partial p,\ D^x = x_a\partial_a + u^a\partial/\partial u^a + 2p\partial/\partial p\\ R(\mathbf{m}) = m^a(t)\partial_a + m^a_t(t)\partial/\partial u^a - m^a_{tt}(t)x_a\partial/\partial p\\ Z(\chi) = \chi(t)\partial/\partial p\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $m^a = m^a(t)$ и $\chi = \chi(t)$ – произвольные гладкие функции (например, из $C^\infty((t_0, t_1), \mathbf{R})$; впрочем, это требование может быть существенно ослаблено [6]).

Замечание 2. Операторы (1.6) порождают такие преобразования инвариантности системы (1.1):

$$\partial_t\colon \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t + \varepsilon, \mathbf{x}),\ p'(t, \mathbf{x}) = p(t + \varepsilon, \mathbf{x})$$

(сдвиги по времени t),

$$J_{ab}\colon \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = B\mathbf{u}(t, B^{-1}\mathbf{x}),\ p'(t, \mathbf{x}) = p(t, B^{-1}\mathbf{x})$$

(пространственные вращения; здесь B – произвольная ортогональная матрица размера 3×3),

$$D^t\colon \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = e^{\varepsilon}\mathbf{u}(e^{\varepsilon}t, \mathbf{x}),\ p'(t, \mathbf{x}) = e^{2\varepsilon}p(e^{\varepsilon}t, \mathbf{x})$$

(масштабные преобразования по времени t),

$$D^x\colon \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = e^{-\varepsilon}\mathbf{u}(t, e^{\varepsilon}\mathbf{x}),\ p'(t, \mathbf{x}) = e^{-2\varepsilon}p(t, e^{\varepsilon}\mathbf{x})$$

(масштабные преобразования по пространственным переменным),

$$\begin{gathered}R(\mathbf{m})\colon \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x} - \mathbf{m}(t)) + \mathbf{m}_t(t)\\ p'(t, \mathbf{x}) = p(t, \mathbf{x} - \mathbf{m}(t)) - \mathbf{m}_{tt}\cdot\mathbf{x} + {}^1\!/_2\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}_{tt}\end{gathered}$$

(переход к произвольной поступательно движущейся системе координат; эти преобразования включают сдвиги по пространственным переменным и преобразования Галилея),

$$Z(\chi)\colon \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}),\ p'(t, \mathbf{x}) = p(t, \mathbf{x}) + \chi(t)$$

(изменения давления).

В случае $\nu \neq 0$ система (1.1) не инвариантна относительно масштабных преобразований по времени или пространственным переменным, но допускает композицию этих преобразований, порождаемую оператором $D^t + {}^1\!/_2D^x$:

$$\mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = e^{\varepsilon}\mathbf{u}(e^{2\varepsilon}t, e^{\varepsilon}\mathbf{x}),\ p'(t, \mathbf{x}) = e^{2\varepsilon}p(e^{2\varepsilon}t, e^{\varepsilon}\mathbf{x})$$

Замечание 3. Преобразования инвариантности системы (1.1) являются преобразованиями эквивалентности [3] для множества уравнений вида (1.2), если функции H^{ab} и k^a считать параметрами.

---

[1] См. также более раннюю работу: *Данилов Ю.А.* Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье–Стокса: Препринт. М.: АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И.В. Курчатова, 1967. 15 с.

2. Основной результат. Структуру множества решений системы (1.1), (1.2) описывает следующая теорема.

Теорема. Любое решение системы (1.1), (1.2) с точностью до преобразований эквивалентности локально принадлежит одному из следующих семейств:

1) $H \neq 0$:

а) $$u^1 = (\zeta^1 + \beta^1)x_1 + (\beta^2 - \frac{1}{2}\varkappa)x_2$$

$$u^2 = (\beta^2 + \frac{1}{2}\varkappa)x_1 + (\zeta^1 - \beta^1)x_2$$

$$u^3 = -\frac{1}{2}\lambda(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)\mu\sin\theta + x_1x_2\mu\cos\theta - 2\zeta^1 x_3$$

$$p = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\mu^{-2}(\lambda_t)^2 + (\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 - \frac{1}{4}(\varkappa)^2 + \zeta_t^1\right)(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}(\beta_t^1 + 2\zeta^1\beta^1)(x_1^2 - x_2^2) - \tag{2.1}$$

$$-(\beta_t^2 + 2\zeta^1\beta^2)x_1x_2 + (\zeta_t^1 - 2(\zeta^1)^2)x_3^2 - 2\nu\lambda x_3$$

где $\varkappa$, λ, μ, β^1, β^2, ζ^1, ζ^2, θ – гладкие функции переменной t, для которых выполняются соотношения

$$\mu > 0,\ \mu\mu_t = \lambda\lambda_t,\ \lambda \neq \pm\mu$$

$$\varkappa_t + 2\zeta^1\varkappa = 0,\ \theta_t = 2\lambda\mu^{-1}\zeta^2 - \varkappa$$

$$\beta^1 = \frac{\lambda_t}{2\mu}\sin\theta + \zeta^2\cos\theta,\ \beta^2 = \frac{\lambda_t}{2\mu}\cos\theta - \zeta^2\sin\theta$$

б) $$\mathbf{u} = -\mu y_1^2\mathbf{e}^3 + F^{ab}y_b\mathbf{e}^a + \beta\mathbf{e}^1 \tag{2.2}$$

$$p = \frac{2}{3}\mu(\mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^1)y_1^3 - \frac{1}{2}G^{ab}y_ay_b - \left(\beta_t + \left(\zeta - \frac{\mu_t}{2\mu}\right)\beta\right)y_1 - 2\nu\mu y_3$$

где $y_a = \mathbf{e}^a\cdot\mathbf{x}$; векторы $\mathbf{e}^a$ образуют ортонормированный базис, гладко зависящий от t; μ, $\varkappa^1$, $\varkappa^2$, ζ, β – гладкие функции переменной t, удовлетворяющие соотношениям

$$\mu > 0,\ \beta = \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\varkappa^1\varkappa^2 - \varkappa^1(\mathbf{e}_t^1\cdot\mathbf{e}^2) - \varkappa^2(\mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^2)\right) \tag{2.3}$$

$$\mu_t\mu^{-1}\varkappa^1 - 2\zeta\varkappa^1 + 2\varkappa_t^1 = 0,\ 2(\mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^1)\varkappa^1 - 2\zeta\varkappa^2 - \varkappa_t^2 = 0$$

F и G – гладкие матрицы-функции переменной t размером 3×3, определяемые по формулам (δ_{ab} – символ Кронекера)

$$F = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}\mu_t\mu^{-1} + \zeta & \mathbf{e}_t^2\cdot\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}_t^2\cdot\mathbf{e}^1 + \varkappa^2 & \frac{1}{2}\mu_t\mu^{-1} + \zeta & -\mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^1 & -\mathbf{e}_t^3\cdot\mathbf{e}^2 + \varkappa^1 & -2\zeta \end{Vmatrix}$$

$$G = F_t + F\cdot F + F\cdot E - E\cdot F - 2\mu\beta\|\delta_{a3}\delta_{b1}\|,\ E = \|\mathbf{e}_t^a\cdot\mathbf{e}^b\|$$

в) $$u^1 = x_1\left(\frac{1}{r}\Phi_r - \frac{\varkappa_t}{2\varkappa}\right) + x_2\left(\frac{\varkappa}{r^2}\Phi_\omega - \frac{\eta}{r^2} - \frac{1}{2}\varkappa\right)$$

$$u^2 = x_2\left(\frac{1}{r}\Phi_r - \frac{\varkappa_t}{2\varkappa}\right) - x_1\left(\frac{\varkappa}{r^2}\Phi_\omega - \frac{\eta}{r^2} - \frac{1}{2}\varkappa\right)$$

$$u^3 = \Phi_\omega - \frac{1}{2}r^2 + \frac{\varkappa_t}{\varkappa}x_3 \tag{2.4}$$

$$p = -\Phi_\tau + (\varkappa_t\Phi_\omega - \eta_t)\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - \left(\frac{\varkappa_t}{\varkappa}\right)_t\left(\frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4}r^2\right) + \Psi - \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} +$$
$$+\frac{1}{8}r^4 - \frac{\varkappa_t}{2\varkappa}r^2x_3 + \eta\varkappa\ln r + \frac{1}{4}(\varkappa r)^2 - 2\nu x_3$$

где $\tau = t$, $r = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, $\omega = x^3 - \varkappa\operatorname{arctg}(x_2/x_1)$; η и $\varkappa$ – гладкие функции переменной t; $\varkappa_t\varkappa^{-1}$: $= 0$, если $\varkappa = 0$; функции $\Phi = \Phi(\tau, r, \omega)$ и $\Psi = \Psi(\tau, r, \omega)$ удовлетворяют системе уравнений

$$r\Phi_r = \Psi_\omega,\quad ((\varkappa(\tau))^2 r^{-2} + 1)r\Phi_\omega = -\Psi_r$$

2) $H = 0$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{u} = \Phi_{y_1}\mathbf{e}^1 + \Phi_{y_2}\mathbf{e}^2 + |\mathbf{k}|^{-2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\mathbf{k}_t + |\mathbf{k}|^{-2}(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{x})\mathbf{k} -$$
$$-\frac{1}{2}|\mathbf{k}|^{-4}(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\mathbf{k} - \frac{1}{2}|\mathbf{k}|^{-2}(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{k})\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\times\mathbf{x} \tag{2.5}$$
$$p = -\varphi_t - \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - |\mathbf{k}|\Psi + \frac{1}{4}|\mathbf{k}\times\mathbf{x}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{k}|^{-2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{k}_t\times\mathbf{k},\mathbf{x})$$

где $\tau = t$, $y_i = \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{x}$, $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(t)$ $(i = 1, 2)$ – гладкие вектор-функции, для которых выполняются условия: $|\mathbf{e}^i| = 1$, $\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}^2 = 0$, $\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{k} = 0$, причем векторы $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ и $\mathbf{k}$ образуют правую тройку;

$$\varphi = \Phi + |\mathbf{k}|^{-2}(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{x})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - \frac{1}{4}|\mathbf{k}|^{-4}(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{k})(|\mathbf{k}|^2|\mathbf{x}|^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})^2) \tag{2.6}$$

функции $\Phi = \Phi(\tau, y_1, y_2)$ и $\Psi = \Psi(\tau, y_1, y_2)$ удовлетворяют системе Коши–Римана $\Phi_{y_1} = \Psi_{y_2}$, $\Phi_{y_2} = -\Psi_{y_1}$.

3) $H = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (потенциальные течения):

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi,\quad p = -\varphi_t - \frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi$$

где $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ – произвольная гармоническая функция.

Замечание 4. Все непотенциальные решения уравнений (1.1), приведенные в теореме, являются лиевскими, т.е. каждое из них инвариантно относительно некоторой подалгебры максимальной в смысле Ли алгебры инвариантности уравнений (1.1). Так, решения (2.1), (2.4) и (2.5) инвариантны относительно одномерных алгебр

$$\langle R(0, 0, \exp(-2\textstyle\int\zeta^1 dt)) - Z(2\nu\lambda\exp(-2\int\zeta^1 dt))\rangle$$

$$\langle J_{12} + R(0, 0, \varkappa) - Z(\eta_t + 2\nu\varkappa)\rangle \text{ и } \langle R(\mathbf{k})\rangle$$

соответственно, а решение (2.2) – относительно двумерной алгебры

$$\langle R(\mathbf{m}^1) + Z(\chi^1), R(\mathbf{m}^2) + Z(\chi^2)\rangle$$

где $\mathbf{m}^i = \alpha^{1i}\mathbf{e}^2 + \alpha^{2i}\mathbf{e}^3$, $\chi^i = -2\mu\alpha^{2i}$ $(i = 1, 2)$, а $(\alpha^{1i}, \alpha^{2i})$ $(i = 1, 2)$ – линейно независимые решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\alpha_t^1 = \left(\frac{\mu_t}{2\mu}+\zeta\right)\alpha^1 - 2(\mathbf{e}_t^3 \cdot \mathbf{e}^2)\alpha^2,\ \alpha_t^2 = \varkappa^1\alpha^1 - 2\zeta\alpha^2$$

Лиевские решения уравнений Навье–Стокса исследованы ранее [6].

3. Вспомогательные утверждения. При доказательстве теоремы используются следующие утверждения.

Лемма 1. Действие произвольного линейного оператора в пространстве $\mathbf{R}^3$ можно представить в виде

$$H\mathbf{x} = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})\mathbf{m} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})\mathbf{n} + \gamma\mathbf{x} + \mathbf{l}\times\mathbf{x} \tag{3.1}$$

где $\gamma \in R$, $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l} \in R^3$, $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$, H – матрица оператора. В представлении (3.1) число γ и вектор $\mathbf{l}$ определяются однозначно, векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ – с точностью до множителя ± 1.

Доказательство. Пусть H^T – транспонированная к H матрица. Если выполняется равенство (3.1), то

$$\begin{gathered}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})\mathbf{m} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})\mathbf{n} + \gamma\mathbf{x} = S\mathbf{x},\ S := \frac{1}{2}(H + H^T)\\ \mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(H^{32} - H^{23},\ H^{13} - H^{31},\ H^{21} - H^{12})^T\end{gathered} \tag{3.2}$$

Так как матрица S симметрична, то ортогональными преобразованиями ее можно привести к диагональному виду, т.е. существует ортогональная матрица O, такая, что

$$OSO^T = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\},\ \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \gamma_3$$

Тогда векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и число γ, определяемые по формулам

$$\mathbf{m} = \pm O^T(\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}, 0, 0)^T,\ \mathbf{n} = \pm O^T(0, 0, \sqrt{\gamma_2 - \gamma_3})^T,\ \gamma = \gamma_2$$

(и только они) удовлетворяют требованиям леммы.

Лемма 2. Если $H^{ab} \in C^1((t_0, t_1), R)$, то в лемме 1 $\mathbf{l} \in C^1((t_0, t_1), R^3)$, а m^a, n^a, γ – непрерывно-дифференцируемые функции на множестве тех значений t, для которых $\mathbf{m}(t) \ne \mathbf{0}$ и $\mathbf{n}(t) \ne \mathbf{0}$.

Доказательство. Утверждение леммы относительно вектор-функции $\mathbf{l}$ очевидно в силу второго соотношения (3.2), а для функций m^a, n^a и γ оно является следствием теоремы о неявной функции. Действительно, эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}m^a n^a = 0,\ (m^b)^2 - (n^b)^2 + \gamma = H^{bb}\\ m^a m^b - n^a n^b = \frac{1}{2}(H^{ab} + H^{ba}),\ a < b\end{gathered} \tag{3.3}$$

(Суммирование по индексу b тут не производится.) Определитель из производных левых частей уравнений (3.3) по m^a, n^a и γ имеет вид $-4(|\mathbf{m}|^2 + |\mathbf{n}|^2)|\mathbf{m}\times\mathbf{n}|^2$, а поэтому не равен нулю, когда $\mathbf{m}\times\mathbf{n} \ne \mathbf{0}$. В силу ортогональности векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ для этого достаточно, чтобы $\mathbf{m} \ne \mathbf{0}$ и $\mathbf{n} \ne \mathbf{0}$.

4. Доказательство теоремы. Воспользуемся представлением матрицы H в виде (3.1). Необходимым условием совместности уравнений (1.1), (1.2) являются соотношения $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ и $\gamma = 0$.

Рассмотрим возможные случаи.

А. $\mathbf{m} \ne \mathbf{0}$, $\mathbf{n} \ne \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{l} = \sigma\mathbf{m}\times\mathbf{n}$, где $\sigma = \sigma(t)$. Введем обозначения

$$\mu := \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n},\ z_1 := \mathbf{m}\cdot\mathbf{x},\ z_2 := \mathbf{n}\cdot\mathbf{x},\ z_3 := (\mathbf{m}\times\mathbf{n}, \mathbf{x})$$

Из переопределенной системы, полученной подстановкой (1.3) в уравнения (1.1), находим выражение для функции φ

$$\varphi = \frac{1}{3\mu} z_1 z_2 z_3 - \frac{\sigma}{6\mu}(z_1^2 + z_2^2) z_3 + \frac{1}{2}\mu^{-3}(\mathbf{l}_t, \mathbf{m}\times\mathbf{n}) z_1 z_2 - (\mu^{-3}\mathbf{l}_t\cdot\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mu^{-2}\mathbf{m}\cdot\mathbf{k}) z_2 z_3 -$$

$$-(\mu^{-3}\mathbf{l}_t\cdot\mathbf{n} + \frac{1}{2}\mu^{-2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) z_1 z_3 + \frac{1}{2\mu}(\zeta^1 + \zeta^2) z_1^2 + \frac{1}{2\mu}(\zeta^1 - \zeta^2) z_2^2 - \mu^{-2}\zeta^1 z_3^2 + \eta^a z_a + \eta^0$$

где ζ^1, ζ^2, η^a, η^0 – гладкие функции переменной t.

Если $\sigma \neq \pm 1$, то $\mathbf{m}\times\mathbf{n} = \mu\mathbf{e}$, $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \text{const}$, $|\mathbf{e}| = 1$, $\lambda := \sigma\mu$, а поэтому $\lambda \neq \mu$, $\mu\mu_t = \lambda\lambda_t$. В силу замечания 3 можно считать, что дополнительно выполняются соотношения

$$\mathbf{e} = (0, 0, 1),\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 0,\ \eta^3 = 0$$

Тогда $\mathbf{k} = \varkappa\mathbf{e}$, $\eta^1 = \eta^2 = 0$ и

$$\mathbf{m} = \sqrt{\mu}\left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, 0\right)^T,\ \mathbf{n} = \sqrt{\mu}\left(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}, 0\right)^T$$

где θ и $\varkappa$ – гладкие функции переменной t, для которых

$$\theta_t = 2\lambda\mu^{-1}\zeta^2 - \varkappa,\ \varkappa_t + 2\zeta^1\varkappa = 0$$

Выполнив все подстановки и проинтегрировав уравнение (1.1) относительно функции p, получим решение (2.1).

Так как, согласно лемме 1, векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ определяются с точностью до множителя ± 1, то в случае $\sigma = \pm 1$ можно положить $\sigma = -1$. Преобразования эквивалентности позволяют удовлетворить еще таким условиям:

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k},\ \eta^1 = \eta^2,\ \eta^3 = 0$$

Если ввести обозначения

$$\beta := \eta^1\sqrt{2\mu},\ \mathbf{e}^1 := \frac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{\sqrt{2\mu}},\ \mathbf{e}^2 := \frac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{\sqrt{2\mu}},\ \mathbf{e}^3 := -\mu\mathbf{m}\times\mathbf{n}$$

то аналогично предыдущему случаю получим решение (2.2).

Б. $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{0}$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$. В этом случае $\mathbf{l}_t = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{l} = \text{const}$. С помощью поворотов и масштабных преобразований приведем $\mathbf{l}$ к вектору (0, 0, 1). В силу замечания 3 можно также считать, что $\mathbf{l}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{0}$, поэтому $\mathbf{k} = (0, 0, \varkappa(t))^T$. Проинтегрируем переопределенную систему, полученную подстановкой (1.3) в (1.1), относительно функции φ. Получим

$$\varphi = \Phi(\tau, r, \omega) - \frac{1}{6}x_3 r^2 + \frac{\varkappa_t(t)}{\varkappa(t)}\left(\frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4}r^2\right) + \eta(t)\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

Переменные τ, r и ω определяются, как в (2.4), а функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r + \left(\left(\frac{\varkappa(\tau)}{r}\right)^2 + 1\right)\Phi_{\omega\omega} = 0$$

Подставив выражение для φ в (1.3) и проинтегрировав первое уравнение (1.1) относительно функции p, получим решение (2.4).

В. $H = 0$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. В этом случае выражение для функции φ преобразованиями эквивалентности приводится к выражению (2.6). Следовательно, соответствующее решение уравнений (1.1) имеет вид (2.5).

Г. Случай $H = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ очевиден.

Доказательство теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бытев В.О.* Групповые свойства уравнений Навье–Стокса // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. Т. 3. № 3. С. 13–17.
2. *Бучнев А.А.* Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1971. Вып. 7. С. 212–214.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
4. *Lloyd S.P.* The infinitesimal group of the Navier–Stokes equations // Acta mech. 1981. V. 38. № 1–2. P. 85–98.
5. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
6. *Fushchich V.I., Popovich R.O.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations // J. Nonlinear Math. Phys. 1994. V. 1. № 1. P. 75–113; № 2. P. 158–188.

Киев

Поступила в редакцию
29.IX.1998