УДК 532.511

© 1999 г. В.К. Андреев, А.А. Родионов

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА ДВА УРАВНЕНИЙ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Построена оптимальная система подалгебр первого порядка системы уравнений вращательно-симметричного неустановившегося движения неоднородной жидкости. Найдены новые точные решения некоторых фактор-систем, описывающие движения со свободными границами или внутренние нелинейные волны.

Задача о нахождении инвариантных подмоделей некоторой системы дифференциальных уравнений механики, допускающей алгебру Ли операторов, сводится к построению оптимальных систем подалгебр этой алгебры различных порядков. Метод нахождения оптимальных систем подалгебр изложен ранее [1, 2]. В случае бесконечномерной алгебры Ли были вычислены [3, 4] оптимальные системы подалгебр для уравнений Навье – Стокса вращательно-симметричных движений однородной жидкости и трехмерной системы Эйлера. Ниже построена оптимальная система подалгебр первого порядка системы уравнений вращательно-симметричных движений неоднородной жидкости. Некоторые фактор-системы проинтегрированы и полученным точным решениям дана физическая интерпретация.

1. Оптимальная система подалгебр Θ_1. Рассматриваются уравнения вращательно-симметричных движений неоднородной жидкости в цилиндрической системе координат (r, θ, z)

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_r + wu_z - r^{-1}v^2 + \rho^{-1}p_r = 0\\
&v_t + uv_r + wv_z + r^{-1}uv = 0\\
&w_t + uw_r + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0\\
&\rho_t + u\rho_r + w\rho_z = 0, \quad u_r + r^{-1}u + w_z = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u – радиальная, v – тангенциальная и w – осевая (по оси z) компоненты вектора скорости, ρ – плотность жидкости, p – давление (все функции переменных (t, r, z)).

Базис алгебры Ли, допускаемой системой (1.1), состоит из операторов[1]

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_z,\ X_2 = t\partial_z + \partial_w,\ X_3 = \partial_t\\
&X_4 = 2r\partial_r + 2z\partial_z + t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2p\partial_p\\
&X_5 = r\partial_r + z\partial_z + t\partial_t,\ X_6 = \rho\partial_\rho + p\partial_p\\
&X_7 = -r^{-2}v^{-1}\rho^{-1}\partial_v + r^{-2}\partial_p,\ X_8(\varphi) = \varphi(t)\partial_p
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Алгебра является бесконечномерной, так как оператор $X_8(\varphi)$ содержит произвольную функцию $\varphi(t)$. Аглебру Ли с базисом опрераторов (1.2) обозначим через L.

[1] Родионов А.А. Групповой анализ уравнений неоднородной жидкости при вращательной симметрии: Препринт № 1. ВЦ АН СССР, Красноярск, 1986. С. 37–39.

Для описания нестационарного движения жидкости в поле силы тяжести, направленной по оси z, можно воспользоваться преобразованием эквивалентности

$$
\begin{aligned}
&(t, r, z, u, v, w, \rho, p) \to (\overline{t}, r, \overline{z}, u, v, \overline{w}, \rho, p) \\
&\overline{t} = t, \quad \overline{z} = z + gt^2/2, \quad \overline{w} = w + gt
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где g – ускорение силы тяжести. При такой замене структура уравнений (1.1) сохраняется, только в правой части третьего уравнения системы появится $-g$. Всякое точное решение уравнений (1.1) преобразованием (1.3) переводится в точное решение уравнений тяжелой жидкости.

Иногда, при построении фактор-системы на операторе, содержащем X_7, удобно ввести новую функцию $h = (rv)^2$ – квадрат момента импульса жидкой частицы вокруг оси z. В этом случае будем пользоваться другой записью первого и второго уравнений системы (1.1):

$$u_t + uu_r + wu_z - r^{-3}h + \rho^{-1}p_r = 0, \quad h_t + uh_r + wh_z = 0 \tag{1.4}$$

Оператор X_7 приобретает более простой вид

$$X_7 = -2\rho^{-1}\partial_h + r^{-2}\partial_p$$

При построении точных инвариантных решений уравнений системы (1.1) будем стремиться к тому, чтобы эти решения (с точки зрения допустимых групп преобразований) были существенно различными. Такие решения получаются при решении фактор-систем, построенных на операторах из оптимальных систем подалгебр. Метод поиска операторов оптимальных систем подалгебр подробно изложен в работах Л.В. Овсянникова [1, 2].

При формировании оптимальных систем подалгебр для операторов (1.2) предварительно вычисляются коммутаторы операторов по формулам [1]

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k = X_i(X_j) - X_j(X_i) \tag{1.5}$$

Здесь C_{ij}^k – структурные постоянные, $i, j, k = 1, ..., 8$, по k – суммирование. С использованием постоянных C_{ij}^k исследуется структура алгебры L операторов (1.2) и вычисляется присоединенная группа A внутренних автоморфизмов алгебры L.

Для этого рассматривается оператор общего вида

$$X = \sum_{i=1}^{7} x^i X_i + X_8(\varphi), \qquad X \in L$$

где $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^7, \varphi)$ – вектор координат оператора X в базисе (1.2). На каждом операторе $X_i \in L$ строятся автоморфизмы Aut_{X_i} алгебры L, действие которых на X находится по формуле

$$\mathrm{Aut}_{X_i}(a_i)\langle X\rangle = X + \frac{a_i}{1!}[X, X_i] + \frac{a_i^2}{2!}[[X, X_i], \ X_i] + ... \tag{1.6}$$

где $a_i (i = 1, ..., 7)$ – параметры. Формулы (1.6) определяют координаты $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^7, \tilde{\varphi})$ преобразованного оператора, которые зависят от параметров a_i и вектора $\mathbf{x}$, порождая группу A внутренних автоморфизмов. Задача нахождения оптимальной системы подалгебр сводится к построению таких наборов $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^7, \varphi)$, что ни один из векторов не может быть переведен в другой автоморфизмами алгебры L [2].

В соответствие в формулами (1.6) определяется полная группа преобразований координат вектора

$$\mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^7, \tilde{\varphi}): \tag{1.7}$$

$$A_1: \tilde{\mathbf{x}} = (x_1 - a_1(2x^4 + x^5), x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \varphi(t))$$

$$A_2: \tilde{\mathbf{x}} = (x^1 + a_2x^3, x^2 - a_2x^4, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \varphi(t))$$

$$A_3: \tilde{\mathbf{x}} = (x^1 - a_3x^2, x^2, x^3 - a_3(x^4 + x^5), x^4, x^5, x^6, x^7, \varphi(t - a_3))$$

$$A_4: \tilde{\mathbf{x}} = (e^{2a_4}x^1,\ e^{a_4}x^2,\ e^{a_4}x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ e^{6a_4}x^7,\ e^{2a_4}\varphi(e^{-a_4}t))$$

$$A_5: \tilde{\mathbf{x}} = (e^{a_5}x^1,\ x^2,\ e^{a_5}x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ e^{2a_5}x^7,\ \varphi(e^{-a_5}t))$$

$$A_6: \tilde{\mathbf{x}} = (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ e^{a_6}x^7,\ e^{a_6}\varphi(t))$$

$$A_7: \tilde{\mathbf{x}} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7 - a_7(6x^4 + 2x^5 + x^6), \varphi(t))$$

$$A_8: \tilde{\mathbf{x}} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \varphi(t) - (2x^4 + x^6)\psi(t) + (x^3 + t(x^4 + x^5))\dot{\psi}(t))$$

Здесь A_i – преобразование, соответствующее Aut_{X_i} с параметром $a_i (i = 1, ..., 7)$; преобразование A_8 с функцией $\psi(t)$ соответствует $\mathrm{Aut}_{X_8(\psi)}$. Из вида преобразования A_8 заключаем: если $x^3 = x^4 + x^5 = x^6 + 2x^4 = 0$, то $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$; если $x^3 \neq 0$ или $x^4 + x^5 \neq$ $\neq 0$ или $x^6 + 2x^4 \neq 0$, то всегда найдется такая функция $\psi(t)$, что $\tilde{\varphi}(t) = 0$.

Оператор X определен с точностью до произвольного множителя, поэтому для вектора $\mathbf{x}$ допускается преобразование общего растяжения B: $\tilde{x} = \beta x$, $\beta = \mathrm{const}$.

Проводя структурный анализ таблицы коммутаторов, замечаем, что $L = L_{1-7} \oplus L_\varphi$, где $L_{1-7} = \{X_1, ..., X_7\}$ – конечномерная подалгебра, $L_\varphi = \{X_8(\varphi)\}$ – бесконечномерная подалгебра (идеал алгебры L). В свою очередь, $L_{1-3} = \{X_1, X_2, X_3\}$ и $L_{6,7} = \{X_6, X_7\}$ – идеалы в L_{1-7}. Выделяется и фиксируется следующий ряд идеалов:

$$0 \subset \{L_\varphi\} \subset \{L_{6,7};\ L_\varphi\} \subset \{L_{1-3};\ L_{6,7};\ L_\varphi\} \subset L \tag{1.8}$$

Согласно (1.8), возможно разложение алгебры $L = L_{6,7,\varphi} \oplus L_{1-5}$, или $L = L_{1-3,6,7,\varphi} \oplus$ $\oplus L_{4,5}$. Это определяет последовательность рассмотрения подалгебр (или координат вектора $\mathbf{x}$) и действие на них внутренних автоморфизмов. Сначала рассматривается $L_{4,5}$ с соответствующим вектором (x^4x^5). Для (x^4x^5) возможны варианты (00), (x^40), $(0x^5)$, (x^4x^5), $x^4 \neq 0$, $x^5 \neq 0$. Далее, на L_{1-5} рассматриваем вектор $(x^1x^2x^3x^4x^5)$ в зависимости от векторов (x^4x^5) и действия группы A внутренних автоморфизмов (1.7). Результат этого шага переносится на L_{1-7} с вектором $(x^1, ..., x^7)$ при учете действия группы A. Окончательно, рассматриваем алгебру L с вектором $(x^1, ..., x^7, \varphi)$ и полученными вариантами для $(x^1, ..., x^7)$.

Учитывая еще возможные преобразования из группы автоморфизмов и преобразование общего растяжения B вектора $\mathbf{x}$, получаем оптимальный набор векторов $\mathbf{x}$. Он является набором существенно различных векторов, которые не могут быть переведены друг в друга преобразованиями группы A внутренних автоморфизмов.

Оптимальная система подалгебр Θ_1 для уравнений (1.1), соответствующая полученному набору координатных векторов x, такова:

$$\begin{gathered}
\varepsilon X_1 + \delta X_7 + X_8(\varphi),\ X_2 + \varepsilon X_7 + X_8(\varphi),\ X_4 - X_5 - 2X_6 + X_8(\varphi) \\
\varepsilon_1 X_2 + X_3 + \varepsilon_2 X_7,\ \varepsilon X_2 + \nu X_3 + X_6,\ \nu X_2 + X_6 \\
\varepsilon X_1 + X_6,\ \varepsilon X_2 + X_5 + cX_6,\ \varepsilon X_2 + X_5 - 2X_6 + \nu X_7 \\
X_4 + bX_5 + cX_6,\ X_4 + bX_5 - 2(3 + b)X_6 + \nu X_7 \\
\nu X_3 + X_4 - X_5 + cX_6,\ \nu_1 X_3 + X_4 - X_5 - 4X_6 + \nu_2 X_7 \\
\nu X_1 + X_4 - 2X_5 + cX_6,\ \nu_1 X_1 + X_4 - 2X_5 - 2X_6 + \nu_2 X_7 \\
\delta = \{0;\ 1\};\ \ \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \{-1;\ 0;\ 1\};\ \ \nu, \nu_1, \nu_2 = \{-1;\ 1\}
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где b, c – произвольные постоянные, $\varphi(t)$ – произвольная гладкая функция.

Заметим, что уравнения (1.1) допускают следующие дискретные преобразования своих переменных:

$$(t, u, w) \to (-t, -u, -w), \ (\rho, p) \to (-\rho, -p)$$

$$(z, w) \to (-z, -w), \ (r, u) \to (-r, -u), \ v \to -v$$

хотя второе и четвертое преобразования не имеют физического смысла. Данным дискретным преобразованиям соответствуют дискретные преобразования вектора **x**

$$E_1 : \tilde{\mathbf{x}} = (x^1, -x^2, -x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \varphi(-t))$$

$$E_2 : \tilde{\mathbf{x}} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, -x^7, -\varphi(t))$$

$$E_5 : \tilde{\mathbf{x}} = (-x^1, -x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \varphi(t))$$

преобразования E_3, E_4 получаются тождественными.

Если в оптимальной системе подалгебр (1.9) учесть преобразования E_1, E_2, E_5, то получим набор операторов вида (1.9), в котором постоянные ε, ε_1, ε_2 нужно положить равными $\{0; 1\}$, а постоянные ν, ν_1, ν_2 равными единице.

2. Некоторые точные решения. Здесь приводим лишь те фактор-системы, соответствующие подалгебрам из (1.9), которые допускают решения в квадратурах. Как правило, это системы, у которых уравнение неразрывности может быть проинтегрировано. Поскольку давление определяется с точностью до слагаемого – произвольной функции времени, то эта функция не учитывается в окончательном представлении для давления.

Пример 1. Рассмотрим первую подалгебру из системы (1.9) при $\varepsilon \neq 0$, $\delta = 0$. Инварианты рассматриваемого оператора определяют вид решения

$$(u, v, w, \rho, p) = (U, V, W, R, \varepsilon z\varphi(t) + P)$$

причем функции U, V, W, R, P зависят только от (t, r). После подстановки в (1.1) получаем уравнения

$$\begin{gathered} U_t + UU_r - r^{-1}V^2 + R^{-1}P_r = 0, \ V_t + UV_r + r^{-1}UV = 0 \\ W_t + UW_r + \varepsilon\varphi(t)R^{-1} = 0, \ R_t + UR_r = 0, \ (rU)_r = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Последнее уравнение системы (2.1) интегрируется, и $U = C(t)/r$ с произвольной функцией $C(t)$.

Введем лагранжеву координату ξ с помощью решения задачи Коши

$$dr/dt = U, \ r|_{t=0} = \xi \tag{2.2}$$

Тогда

$$r = \left[\xi^2 + 2\int_0^t C(\tau)d\tau\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

Теперь видно, что решение четырех уравнений системы (2.1) представимо

$$\begin{gathered} V = \xi V_0(\xi)r^{-1}, \quad W = -\frac{\varepsilon}{R_0(\xi)}\int_0^t \varphi(\tau)d\tau + W_0(\xi) \\ R = R_0(\xi), \quad P = -\int R_0(\xi)r_\xi[r_{tt} - \xi^2V_0^2(\xi)r^{-3}]d\xi \end{gathered} \tag{2.4}$$

с произвольными гладкими функциями $R_0(\xi)$, $W_0(\xi)$, $V_0(\xi)$.

Поэтому решение исходной системы (1.1) таково:

$$u = r^{-1}C(t), \quad v = V(\xi, t), \quad w = W(\xi, t)$$
$$p = \varepsilon z\varphi(t) + P(\xi, t), \quad \rho = R_0(\xi); \quad \xi = \left[r^2 - 2\int_0^t C(\tau)d\tau\right]^{1/2} \tag{2.5}$$

причем функции V, W, P определяются равенствами (2.4).

При $C(t) = 0$ решение (2.5) описывает нестационарное вихревое движение струи со свободной границей $r(t) = \xi_1 = \text{const}$ (либо движение в трубе) вдоль которой приложено давление $q(z, t) = z\varphi(t) + P(\xi_1, t)$. Если $C(t) \neq 0$, то получим описание движения цилиндрической оболочки со свободными границами $r_1(t) = r(\xi_1, t)$, $r_2(t) = r(\xi_2, t)$, $(\xi_1 > \xi_2)$, а $r(\xi, t)$ определяется из (2.3). В обоих сучаях плотность жидкости распределена по произвольному закону по радиусу: $\rho = R_0(\xi)$.

Замечание. Можно проверить, что фактор-система (2.1) допускает преобразование эквивалентности

$$W \to W + \varepsilon\psi(t)R^{-1}, \quad \varphi(t) \to \varphi(t) - \psi'(t)$$

остальные функции и переменные не преобразуются. За счет этого преобразования, взяв

$$\psi = -\int_0^t \varphi(t)dt$$

можно добиться, чтобы $\varphi(t) = 0$, и формулы (2.4), (2.5) упрощаются.

Пример 2. Если $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$ $(\varepsilon^2 = 1)$, то решение уравнений (1.1) при учете (1.4) можно искать в виде

$$(u, h, w, \rho, p) = (U, H - 2\varepsilon\delta zR^{-1}, \; W, R, P + \varepsilon z(\delta r^{-2} + \varphi(t)))$$

где U, H, W, R, P – функции переменных (t, r); здесь учтено, что $\varepsilon^2 = 1$. Тогда фактор-система преобразуется к виду

$$U_t + UU_r - r^{-3}H + R^{-1}P_r = 0, \quad H_t + UH_r - 2\varepsilon\delta WR^{-1} = 0$$
$$W_t + UW_r + \varepsilon R^{-1}(\delta r^{-2} + \varphi(t)) = 0, \quad R_t + UR_r = 0, \quad (rU)_r = 0$$

Последняя система, с точностью до преобразования

$$H \to H - 2\varepsilon\delta\mu(t)R^{-1}, \quad W \to W - \varepsilon\mu'(t)R^{-1}$$
$$P \to P + \varepsilon\delta\mu(t)r^{-2}, \quad \varphi \to \varphi + \mu''(t)$$

имеет общее решение

$$U = \frac{C(t)}{r(\xi, t)}, \quad H = \frac{2W_0(\xi)}{R_0(\xi)}t - \frac{2\varepsilon\delta}{R_0^2(\xi)}\int_0^t\int_0^\sigma \frac{1}{r^2(\xi,\tau)}d\tau d\sigma + H_0(\xi)$$
$$W = W_0(\xi) - \frac{\varepsilon\delta}{R_0(\xi)}\int_0^t \frac{1}{r^2(\xi,\tau)}d\tau, \quad R = R_0(\xi) \tag{2.6}$$
$$P = \int R_0(\xi)r_\xi\left[\frac{H(\xi,t)}{r^3(\xi,t)} - r_{tt}(\xi,t)\right]d\xi$$

где $C(t)$, $R_0(\xi)$, $W_0(\xi)$, $H_0(\xi)$ – произвольные функции, функция $r(\xi, t)$ определяется равенством (2.3). При этом решение системы (1.1) имеет вид

$$u = U(\xi,t),\quad v = \frac{1}{r(\xi,t)}\left[H(\xi,t) - \frac{2\varepsilon z}{R_0(\xi)}\right]^{1/2}$$

$$w = W(\xi, t),\ \rho = R(\xi, t) = R_0(\xi),\ p = \varepsilon\delta z r^{-2}(\xi, t) + P(\xi, t) \tag{2.7}$$

Лагранжева координата ξ определяется последним равенством (2.5).

Если $C(t) = 0$ ($u = 0$), то формулы (2.7) описывают движение в трубе, которое существует, вообще говоря, конечное время – разрушаются производные компоненты скорости $v(r, t)$.

Пример 3. Выпишем фактор-систему для оператора $\langle X_2 + \varepsilon X_7 + X_8(\varphi)\rangle$. Если $\varepsilon = 0$, то инварианты оператора определяют вид решения

$$(u, v, w, \rho, p) = (U, V, W + zt^{-1}, R, P + \varphi(t)zt^{-1})$$

где функции U, V, W, R, P зависят от (t, r). После подстановки в (1.1) получаем уравнения

$$U_t + UU_r - r^{-1}V^2 + R^{-1}P_r = 0,\quad V_t + UV_r + r^{-1}UV = 0$$

$$W_t + UW_r + t^{-1}W + (tR)^{-1}\varphi(t) = 0$$

$$R_t + UR_r = 0,\quad (rU)_r + t^{-1}r = 0$$

Эта система также допускает интегрирование. Именно, с точностью до преобразования

$$W \to W + \psi R^{-1},\quad \varphi \to \varphi - (t\psi)'$$

получим

$$U = -\frac{r(\xi,t)}{2t} + \frac{C(t)}{r(\xi,t)},\quad V = \frac{\xi V_0(\xi)}{r(\xi,t)},\quad W = \frac{1}{t}W_0(\xi)$$

$$R = R_0(\xi),\quad P = -\int R_0(\xi) r_\xi \left(r_{tt} - \frac{\xi^2 v_0^2(\xi)}{r^3(\xi,t)}\right) d\xi$$

Функция $r(\xi, t)$ определяется равенством

$$r = \left[\frac{1}{t}\left(\xi^2 + 2\int_1^t \tau C(\tau)d\tau\right)\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

Физические величины даются формулами

$$u = U(\xi, t),\quad v = \xi v_0(\xi) r^{-1}(\xi, t),\quad w = W(\xi, t) + t^{-1}z \tag{2.9}$$

$$p = P(\xi, t),\quad \rho = R_0(\xi)$$

При $C(t) = 0$ решение (2.9) описывает нестационарное вихревое движение струи со свободной границей $r(t) = \xi_1 / \sqrt{t}$, вдоль которой приложено давление $q(z, t) = z\varphi(t) + P(\xi_1, t)$. Если $C(t) \neq 0$, то получим движение цилиндрического слоя со свободными границами

$$r_1(t) = r(\xi_1, t),\ r_2(t) = r(\xi_2, t)\quad (\xi_1 > \xi_2)$$

Пример 4. Если $\varepsilon \neq 0$, то решение уравнений (1.1), (1.4) можно искать в виде

$$(u, h, w, \rho, p) = (U, H - 2z\varepsilon(tR)^{-1},\ W + zt^{-1},\ R,\ zt^{-1}(\varepsilon r^{-2} + \varphi(t)) + P)$$

где U, H, W, R, P – функций переменных (t, r). Фактор-система здесь такова:

$$U_t + UU_r - r^{-3}H + R^{-1}P_r = 0,\ \ H_t + UH_r - 2\varepsilon W(tR)^{-1} = 0$$

$$W_t + UW_r + t^{-1}W + (tR)^{-1}(\varepsilon r^{-2} + \varphi(t)) = 0$$

$$R_t + UR_r = 0,\ (rU)_r + rt^{-1} = 0$$

С точностью до преобразования

$$H \to H + 2\varepsilon\mu(t)R^{-1},\ \ W \to W - t\mu'(t)R^{-1}$$

$$P \to P + \varepsilon\mu(t)r^{-2},\ \ \varphi \to \varphi + (t^2\mu'(t))'$$

общее решение имеет вид

$$U = -\frac{r(\xi,t)}{2t} + \frac{C(t)}{r(\xi,t)},\ \ H = H_0(\xi) - 2\left\{\frac{1}{t}W_0(\xi) + \frac{\varepsilon}{R_0(\xi)}\int_1^t \frac{1}{\tau^2}\int_1^\tau \frac{d\sigma d\tau}{r^2(\xi,\sigma)}\right\}$$

$$W = \frac{1}{t}W_0(\xi) - \frac{\varepsilon}{R_0(\xi)}\int_1^t \frac{1}{r^2(\xi,\tau)}d\tau,\ \ R = R_0(\xi)$$

$$P = \int R_0(\xi)r_\xi\left[\frac{H(\xi,t)}{r^3(\xi,t)} - r_{tt}(\xi,t)\right]d\xi$$

Функция $r(\xi, t)$ определяется равенством (2.8). Компоненты вектора скорости, плотность и давление при этом определяются по формулам

$$u = U(\xi,t),\ v = \frac{1}{r(\xi,t)}\left[H(\xi,t) - \frac{2\varepsilon z}{R_0(\xi)}\right]^{1/2} \tag{2.10}$$

$$w = W(\xi,t) + \frac{z}{t},\ \ \rho = R_0(\xi),\ \ p = \frac{z\varepsilon}{r^2(\xi,t)t} + P(\xi,t)$$

Это движение подобно движению (2.7) и разрушается за конечное время.

Пример 5. Для оператора $\langle \nu X_2 + X_6\rangle$ $(\nu^2 = 1)$ из оптимальной системы подалгебр (1.9) инвариантное решение имеет вид

$$(u, v, w, \rho, p) = (U, V, W + zt^{-1}, \exp(\nu zt^{-1})R, \exp(\nu zt^{-1})P)$$

с функциями U, V, W, R, P двух переменных (t,r). Уравнения (1.1) в новых переменных запишутся так:

$$U_t + UU_r - V^2r^{-1} + R^{-1}P_r = 0,\ \ V_t + UV_r + r^{-1}UV = 0$$

$$W_t + UW_r + t^{-1}W + \nu(tR)^{-1}P = 0 \tag{2.11}$$

$$R_t + UR_r + \nu t^{-1}WR = 0,\ (rU)_r + rt^{-1} = 0$$

Оказывается, что система (2.11) может быть сведена к одному нелинейному неклассическому уравнению третьего порядка. Действительно, как и в примерах 3,4, имеем

$$U = -\frac{r(\xi,t)}{2t} + \frac{C(t)}{r(\xi,t)},\ \ V = \frac{\xi V_0(\xi)}{r(\xi,t)}$$

Функция $r(\xi, t)$ дается равенством (2.8). Кроме того, в координатах ξ, t

$$W = -\frac{\nu t R_t}{R},\ \ P = R\left(\frac{t^2 R_t}{R}\right)_t \tag{2.12}$$

Теперь из первого уравнения системы (2.11) получим одно уравнение относительно $R(\xi, t)$

$$\left[R\left(\frac{t^2R_t}{R}\right)_t\right]_\xi+\left(r_{tt}-\frac{\xi^2V_0^2}{r^3}\right)r_\xi R=0$$

которое заменой $R=\exp Q$, $t=\tau^{-1}$ приводится к виду

$$Q_{\tau\tau\xi}+Q_\xi Q_{\tau\tau}=\frac{\xi^3V_0^2(\xi)+\xi C^2}{r^4(\xi,\tau)\tau}+\frac{\xi\tau C_\tau}{r^2(\xi,\tau)}-\frac{3}{4}\tau\xi \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) несколько упрощается после замены $\xi\to\xi^2/2$, однако, даже для случая $V_0=0$, $C=0$ пока не удается построить достаточно широкого класса точных решений. Тем не менее укажем одно простое решение уравнения (2.13) в этом случае

$$Q=a\frac{\xi^2}{2}-\frac{\tau^3}{8a}+c_1\tau+c_2$$

где a, c_1, c_2 – постоянные. Интерпретация этого решения такая же, как и в примере 3.

По известной функции $Q(\xi, t)$ физические величины восстанавливаются по формулам

$$u=U(\xi,t),\ v=V(\xi,t),\ w=-\nu tQ_t+zt^{-1}$$

$$\rho=\exp(\nu zt^{-1}+Q),\ p=(t^2Q_t)_t\exp(\nu zt^{-1}+Q)$$

Пример 6. Рассмотрим подалгебру $\langle\varepsilon X_1+X_6\rangle$ при $\varepsilon\neq0$. Тогда инвариантное решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$(u,v,w,\rho,p)=(U,V,W,R\exp(\varepsilon z),\ P\exp(\varepsilon z)) \tag{2.14}$$

где U, V, W, R, P зависят только от t, r (случай $\varepsilon=-1$ соответствует устойчивой стратификации). После подстановки (2.14) в систему (1.1) получим фактор-систему

$$U_t+UU_r-r^{-1}V^2+R^{-1}P_r=0,\ V_t+UV_r+r^{-1}UV=0$$

$$W_t+UW_r+\varepsilon R^{-1}P=0,\ U_r+r^{-1}U=0,\ R_t+UR_r+\varepsilon WR=0 \tag{2.15}$$

В свою очередь систему (2.15) также можно свести к одному нелинейному уравнению третьего порядка, которое отличается от (2.13) только правой частью. Действительно, введем новые независимые переменные и функции

$$r=(\xi^2+2\int_0^t C(t)dt)^{1/2},\ U=\frac{C(t)}{r(\xi,t)},\ V=\frac{\xi V_0(\xi)}{r(\xi,t)} \tag{2.16}$$

$$W=-\varepsilon Q_t,\ R=\exp Q,\ P=Q_{tt}\exp Q$$

$V_0(\xi)$, $C(t)$ – произвольные функции. Тогда $Q(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению

$$Q_{tt\xi}+Q_\xi Q_{tt}=B(\xi,t) \tag{2.17}$$

где

$$B(\xi,t)=\frac{\xi^3V_0^2(\xi)+\xi C^2(t)}{r^4(\xi,t)}-\frac{\xi C_t(t)}{r^2(\xi,t)} \tag{2.18}$$

Таким образом, решение вида (2.14) полностью определено, если известна функция $Q(\xi, t)$. Наличие более простой правой части позволяет построить некоторые точные решения уравнения (2.17).

Предположим, что $C(t) = 0$ (радиального течения нет). В этом случае решение (2.14) описывает движение в цилиндрической трубе, функция B в (2.18) зависит только от $r \equiv \xi$ и замена

$$\eta = \int B(\xi) d\xi$$

приводит (2.17) к уравнению

$$Q_{t\eta} + Q_\eta Q_{tt} = 1 \tag{2.19}$$

Это уравнение имеет решение в виде бегущей волны

$$Q = F(\zeta), \ \ \zeta = \eta + \beta t, \ \ \beta = \text{const}$$

При этом F – решение уравнения третьего порядка

$$F''' + F'F'' = \beta^{-2}$$

которое заменой $F = \ln N^2$ сводится к линейному уравнению Эйри

$$N'' - \left(\frac{\zeta}{2\beta^2} + c\right) N = 0$$

где c – постоянная интегрирования. Имеем

$$N = \sqrt{\gamma}\left[C_1 I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\gamma^{3/2}\right) + C_2 K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\gamma^{3/2}\right)\right], \quad \gamma = (4\beta^4)^{1/3}\left(\frac{\zeta}{2\beta^2} + c\right) \tag{2.20}$$

где C_1, C_2 – постоянные, $I_{1/3}, K_{1/3}$ – модифицированные функции Бесселя. Заметим, что для отрицательных γ в формуле (2.20) нужно взять обычные функции Бесселя, и решение будет осциллировать.

Приведем выражение для плотности

$$\rho = N^2 \exp(\varepsilon z)$$

и линии равной плотности суть $z = -\varepsilon \ln N^2$.

Для других, отличных от нуля функций $C(t)$ довольно трудно получить решения уравнения (2.17) в явном виде. Однако можно подобрать одновременно $V_0(\xi)$ и $C(t)$, когда правая часть уравнения (2.17) зависит только от ξ или равна нулю. Для этого необходимо выполнение при любых ξ, t равенства

$$\xi^3 V_0^2(\xi) + \xi C^2(t) - \xi\left[\xi^2 + 2\int_0^t C(t)dt\right]C'(t) = B(\xi)\left[\xi^4 + 4\xi^2\int_0^t C(t)dt + 4\left(\int_0^t C(t)dt\right)^2\right]$$

Это равенство выполнено, если

$$B(\xi) = B_0\xi, \ \ V_0^2 = B_0\xi^2 - \alpha^2\xi^{-2}, \ \ C(t) = \alpha\sin(2\sqrt{B_0}t + \omega)$$

где $B_0 > 0$, α, ω – постоянные. Если $B_0 < 0$, то

$$V_0^2 = B_0\xi^2 + \alpha^2\xi^{-2}, \ \ C(t) = \alpha\,\mathrm{sh}(2\sqrt{|B_0|}t + \omega)$$

Заметим, что $B(\xi) = 0$ только при $C(t) = \alpha t + \omega$, $V_0^2 = \alpha - \omega^2\xi^{-2}$.

Рассмотрим несколько подробнее случай, когда правая часть уравнения (2.17) равна нулю. Уравнение (2.17) при $B = 0$ сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Q_{tt} - d(t)\exp(-Q) = 0 \tag{2.21}$$

где $d(t) > 0$ – некоторая функция. Дополним (2.21) начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \ln R_0(\xi), \ \ Q_t(\xi, 0) = -\varepsilon w_0(\xi) \tag{2.22}$$

Предположим, что $d(t) = d_0 > 0$ – постоянная, тогда можно выписать решение задачи Коши (2.21), (2.22) в виде

$$Q = \ln\left\{\frac{1}{a}\operatorname{ch}^2\left[\sqrt{\frac{d_0 a}{2}}t + \operatorname{arcch}(\sqrt{aR_0(\xi)})\right]\right\},$$

$$a = \frac{w_0^2(\xi)}{2d_0} + \frac{1}{R_0(\xi)}$$

Для существования такого решения достаточно, чтобы число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{\min|w_0(\xi)|}{\sqrt{2d_0}} \geqslant 1$$

либо $\min(1/R_0(\xi)) \geqslant 1$.

Предположим, что $\varepsilon = -1$ (устойчивая стратификация) и положим в (2.21)

$$d(t) = h\exp(ht^2/2),\quad Q = D + ht^2/2;\quad h = \mathrm{const} > 0$$

Тогда $D(\xi, t)$ – решение задачи Коши

$$D_{tt} = h(\exp(-D) - 1),\quad D(\xi,0) = \ln R_0(\xi),\quad D_t(\xi,0) = w_0(\xi) \tag{2.23}$$

Произведем замену

$$\sigma = \sqrt{h}t,\quad D = Z + H(\xi);\qquad H(\xi) = \frac{w_0^2(\xi)}{2h} + \frac{1}{R_0(\xi)} + \ln R_0(\xi) - 1$$

Тогда функция Z удовлетворяет уравнению

$$Z_\sigma^2/2 = 1 - Z - \exp(-Z - H(\xi)) \tag{2.24}$$

Можно видеть, что при $H > 0$ (достаточно потребовать, чтобы число Фруда $\mathrm{Fr} \geqslant 1$) уравнение (2.24) имеет периодическое по σ решение, $Z_1 \leqslant Z \leqslant Z_2$, где $Z_1 < 0$, $Z_2 < 1$ – корни его правой части. Каждая частица жидкости колеблется со своим периодом, так как Z_1, Z_2 зависят от ξ. Таким образом, решение (2.14) в этом случае описывает нелинейные внутренние волны различного вида.

Возможно, еще одно, более простое решение уравнения (2.17) при $B = 0$. Именно, пусть $Q_\xi = 0$ (при $Q_{tt} = 0$ давление обращается в нуль). Тогда в (2.16) можно считать $Q(t)$ произвольной функцией времени. Взяв $Q = q(t)$, где $q(t)$ – периодическая функция, $q_{tt} > 0$, получим в (2.14) периодические по времени продольную скорость, плотность и давление.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. *Ovsiannikov L.V.* On the optimal systems of subalgebras // Lie Groups and Their Appl. 1994. V. 1. № 2. P. 18–26.
3. *Капитанский Л.В.* Групповой анализ уравнений Навье-Стокса при вращательной симметрии и некоторые новые точные решения // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 89–107.
4. *Шанько Ю.В., Капцов О.В.* Оптимальные системы подалгебр и инвариантные решения ранга два для трехмерных уравнений Эйлера // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1814–1819.

Красноярск

Поступила в редакцию
24.VII.1998

e-mail: andreev @ cckr. Krasnoyarsk. su