УДК 533

© 1999 г. Л.В. Овсянников

НЕКОТОРЫЕ ИТОГИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОГРАММЫ "ПОДМОДЕЛИ" ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Суммированы результаты исследований по программе ПОДМОДЕЛИ, нацеленной на исчерпывающее использование симметрии уравнений газовой динамики (УГД) для построения классов точных решений (подмоделей) этих уравнений. Исходным пунктом является тот факт, что любая допускаемая УГД группа Ли преобразований базового пространства (всех независимых и зависимых переменных) может порождать некоторые подмодели. Для компактного описания возникающего на этом пути бесконечного множества подмоделей предложен ряд способов их упорядочения: по уравнениям состояния газа, по признаку подобия, по типам (ранг, дефект), по свойству эволюционности, по признаку регулярности. Приведены примеры новых подмоделей. Наиболее значимые работы, выполненные по программе ПОДМОДЕЛИ к настоящему времени, указаны в списке литературы.

Пусть дана система E дифференциальных уравнений для искомых функций u от независимых переменных x. Идея программы ПОДМОДЕЛИ связана со свойством симметрии системы E, а именно, ее инвариантности относительно группы Ли преобразований базового пространства (совокупности всех x, u). Конечная цель программы ПОДМОДЕЛИ состоит в исчерпании всех возможностей, предоставляемых этим свойством для построения точных решений системы E.

Настоящее сообщение посвящено подведению некоторых итогов выполнения этой программы для уравнений газовой динамики.

1. Объект исследования. Рассматривается система дифференциальных уравнений газовой динамики (УГД)

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad DS = 0 \tag{1.1}$$

с *уравнением состояния* газа (УС)

$$p = F(\rho, S) \tag{1.2}$$

определенная на *базовом пространстве* $R^{10}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho\; p, S)$ с временем t, координатами $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$, вектором скорости $\mathbf{u} = (u, v, w) = (u^1, u^2, u^3)$, плотностью ρ, давление p и энтропией S. Оператор полного дифференцирования $D = \partial_t + \mathbf{u}\nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Предполагается, что газ является *нормальным*, т.е. функция F в (1.2) такова, что $F > 0$, $F_\rho > 0$, $F_S > 0$. Скорость звука $c > 0$ определяется соотношением $c^2 = F_\rho(\rho, S)$.

Свойство симметрии системы УГД состоит в том, что она инвариантна относительно 11-параметрической группы Ли G_{11} преобразований базового пространства (говорят также, что эта система *допускает* группу G_{11}), которую удобно описать в терминах соответствующей *алгебры* Ли L_{11} *операторов*, действующих на этом пространстве. Базис в L_{11} (операторы $X_1, X_2,..., X_{11}$) выбирается так:

$$X_i = \partial_{x^i}, \quad X_{i+3} = t\partial_{x^i} + \partial_{u^i}, \quad X_{i+6} = \varepsilon_{ij}^k (x^j \partial_{x^k} + u^j \partial_{u^k}) \quad (i = 1,2,3)$$
$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^i \partial_{x^i} \tag{1.3}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x^i} = \partial/\partial x^i$ и т.д., ε_{ij}^k – стандартный кососимметричный тензор с $\varepsilon_{12}^3 = 1$ и предполагается суммирование по повторяющимся индексам [1, 2].

Замечание. Энтропия S определена с точностью до замены $S \to \varphi(S)$ с произвольной не постоянной функцией φ. Это преобразование энтропии, которое является преобразованием эквивалентности для УС и всегда допускаемая УГД, здесь и ниже учитывается только в записи УС.

В случае УС (1.2) *общего вида* (ОУС) алгебра L_{11} является *наиболее широкой* алгеброй Ли операторов, допускаемых системой УГД.

2. Классификация по УС. В зависимости от вида УС (1.2) выделено 13 случаев *расширения* допускаемой алгебры Ли. В частности, в случае политропного газа с УС $p = S\rho^\gamma$ алгебра Ли L_{11} расширяется до L_{13} за счет операторов

$$X_{13} = t\partial_t - u^i \partial_{u^i} + 2\rho\partial_\rho, \quad X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p \tag{2.1}$$

при произвольном значении показателя адиабаты γ. Если же $\gamma = {}^5/_3$, то к операторам (2.1) добавляется еще оператор

$$X_{12} = t^2\partial_t + tx^i \partial_{x^i} + (x^i - tu^i)\partial_{u^i} - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p \tag{2.2}$$

расширяющий L_{13} до L_{14}. Полный список всех расширений приведен в [1].

При анализе получаемых подмоделей оказалось целесообразным выделить *специальные модели* движений газа, указанные ниже вместе с соответствующими системами дифференциальных уравнений.

Изэнтропические ($S = S_0 = \text{const}$) с УС $p = F(\rho, S_0)$

$$D\mathbf{u} + a(\rho)\nabla\rho = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{2.3}$$

где $a(\rho) = c^2/\rho$.

Барохронные ($p = p(t)$) с УС $p(t) = F(\rho, S)$

$$D\mathbf{u} = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{u} = a(t, S), \ DS = 0 \tag{2.4}$$

где $a(t, S) = -p'(t)/\rho c^2$. Для политропного газа $a = a(t) = -p'/\gamma p$. Частным случаем барохронных движений являются *изобарические*, для которых $p = \text{const}$, $a = 0$.

Тепловые ($\rho = \rho_0 = \text{const} > 0$) с УС $p = F(\rho_0, S)$

$$D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ Dp = 0 \tag{2.5}$$

Изотермические ($c = \text{const}$) с УС (1.2). Если $F_{\rho S} \neq 0$, то система (1.1) сводится к (2.5). В случае $F_{\rho S} = 0$ возникает один из классификационных вариантов расширения допускаемой группы, описанных в [1].

Специальные модели, разумеется, допускают группу G_{11}. Однако, за исключением изэнтропической модели, наиболее широкие допускаемые этими моделями группы пока не вычислены, а система (2.5) до сих пор даже не приведена в инволюцию.

3. Построение подмоделей. Каждая подмодель порождается некоторой подгруппой H допускаемой группы и, в этом случае, называется *H-подмоделью*.

Напомним общую процедуру построения H-подмоделей для допускающей группу H системы уравнений E, заданной на базовом пространстве $R^{n+m}(x, u)$ с искомыми функциями $u = (u^1,..., u^m)$ независимых переменных $x = (x^1,..., x^n)$. Пусть $I = (I^1,..., I^l)$ $(l < n + m)$ – полный набор скалярных функционально независимых *инвариантов* $I^j = I^j(x, u)$ $(j = 1,..., l)$ группы H (ее *универсальный инвариант*) и пусть $R^l(I)$ – *пространство инвариантов*. В $R^l(I)$ выделяется многообразие M, заданное некоторым числом $\mu > 0$ независимых скалярных уравнений. При этом необходимо, чтобы было $\mu \leqslant m$. Размерность M в $R^l(I)$ равна $\sigma = l - \mu$. В пространстве $R^{n+m}(x, u)$ многообразие M имеет размерность $n + m - \mu = n + \delta$, что приводит к соотношению

$$\sigma = \delta + l - m \tag{3.1}$$

При выполнении этих условий найдутся такие поднаборы $u' = (u^1,..., u^{m-\delta})$, $I' = (I^1,...$ $..., I^{m-\delta})$, для которых

$$\det (\partial I'/\partial u') \neq 0$$

а σ инвариантов поднабора $I'' = (I^{m-\delta+1},..., I^l)$ не зависят от величин u'. Тогда с переменными

$$v = I'(x, u), \quad y = I''(x', u'') \tag{3.2}$$

уравнения многообразия M могут быть записаны в виде

$$v = V(y) \tag{3.3}$$

Входящие в (3.2) величины $u'' = (u^{m-\delta+1},..., u^m)$ называются *"лишними" функциями*. В результате подстановки получаемых из (3.3) выражений для u' в систему E получается *факторсистема E/H*, которая распадается на две подсистемы: *инвариантную* для искомых функций $V(y)$ и дополнительную, вообще говоря, *переопределенную* подсистему для "лишних" функций u''. Число σ, равное числу независимых переменных в инвариантной подсистеме, называется *рангом*, а число δ, равное числу "лишних" функций u'', называется *дефектом* подмодели.

Факторсистема E/H называется *частично инвариантной подмоделью* (ЧИП) типа (σ, δ) и обозначается также $H(\sigma, \delta)$. Важно, что одна и та же группа H может порождать ЧИП нескольких различных типов.

Решения уравнений подмодели $H(\sigma, \delta)$ называются *частично инвариантными решениями* (для $\delta = 0$ *инвариантными решениями*) системы E.

Подмодель $H(\sigma, \delta)$ называется *регулярной*, если в (3.2) переменные y не зависят от u''; в противном случае она называется *нерегулярной* [3].

В приложениях вместо группы H рассматривается соответствующая ей алгебра Ли L операторов над базовым пространством $R^{n+m}(x, u)$. Пусть L имеет размерность r и базис операторов

$$H_\alpha = \xi^i_\alpha(x,u)\partial_{x^i} + \eta^k_\alpha(x,u)\partial_{u^k} \quad (\alpha = 1,...,r) \tag{3.4}$$

Размерность l универсального инварианта определяется через $[r \times (n + m)]$-матрицу из координат операторов (3.4). Если r_* – общий ранг этой матрицы, что записывается формулой

$$r_* = \text{о.р.}\ (\xi^i_\alpha, \eta^k_\alpha) \tag{3.5}$$

то $l = n + m - r_*$ и соотношение (3.1) принимает вид

$$\sigma = \delta + n - r_* \tag{3.6}$$

Дефект δ должен удовлетворять вытекающим из предыдущего построения неравенствам

$$\max\{r_* - n,\ m - q,\ 0\}, \leqslant \delta \leqslant \min\{r_* - 1,\ m - 1\} \tag{3.7}$$

где q – общий ранг матрицы Якоби $\partial I/\partial u$.

Например, для УГД ($n = 4, m = 5$) в качестве L можно взять всю алгебру L_{11} с базисом (1.3). Здесь формула (3.5) дает $r_* = 7$ и $I = (\rho, p)$, т.е. $q = 2$. Неравенства (3.7) принимают вид $3 \leqslant \delta \leqslant 4$, а из (3.6) следует $\sigma = \delta - 3$. Поэтому L_{11} может порождать подмодели типов (0,3) и (1,4). Нетрудно убедиться, что в качестве ЧИП типа (0,3) получается изобарическая модель (2.4), а в качестве ЧИП типа (1,4) – либо изэнтропическая (2.3), либо тепловая (2.5) модели.

4. Оптимальные системы подалгебр. Реализация программы ПОДМОДЕЛИ для УГД связана с учетом всех допускаемых подалгебр, так как каждая из них может производить некоторые подмодели. Вместе с тем алгебра Ли L_{11} содержит бесконечно много подалгебр. Было замечено [2], что не все получаемые на этом пути подмодели существенно различны. Две подмодели называются *подобными*, если одна из них получается из другой некоторой обратимой заменой переменных. Оказалось, что это свойство равносильно тому, что порождающие подалгебры *сопряжены* в объемлющей алгебре Ли действием внутреннего автоморфизма этой алгебры.

Множество классов сопряженных подалгебр данной алгебры Ли L называется *оптимальной системой* подалгебр и обозначается ΘL. Конкретные классы идентифицируются их *представителями*, из которых и состоит ΘL. На самом деле таких классов тоже бесконечно много, но их представители могут быть объединены в удобные серии, содержащие небольшое число параметров, и фактически ΘL является перечнем всех таких серий, каждая из которых считается одним представителем.

Для вычисления оптимальных систем подалгебр конечномерных алгебр Ли разработан достаточно хорошо апробированный алгоритм [4]. С его помощью впервые была вычислена оптимальная система ΘL_{11} для алгебры Ли L_{11} с базисом (1.6), состоящая из 220 представителей [1] (таблица 6). Вычислены также оптимальные системы ΘL_{13} [5] из 1342 представителей и ΘL_{14} [6] из 1826 представителей.

Тем самым для УГД получится трудно обозримый большой массив (тысячи) возможных не подобных подмоделей. Возникла новая проблема поиска дополнительных признаков упорядочения этого массива.

5. Инвариантные подмодели. Подмодели типа (σ, 0) описывают инвариантные решения УГД. В силу (3.6), (3.7) они порождаются подалгебрами с $r_* \leqslant 4$ и имеют ранг $\sigma = 4 - r_*$. Для этих подмоделей факторсистема сводится к *определенной* инвариантной подсистеме, находящейся в инволюции. Уравнения факторсистемы связывают частные производные от искомых инвариантов по трем ($\sigma = 3$) или двум ($\sigma = 2$) независимым переменным или же образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений ($\sigma = 1$).

Все подмодели типа (σ, 0) ($\sigma > 0$) распределяются по двум классам: *эволюционного вида* (E) и *стационарного вида* (S). Класс (E) порождается такими подалгебрами, для которых время t является инвариантом, а класс (S) – подалгебрами, для которых t не инвариант. Число инвариантных подмоделей различных рангов $\sigma = 3, 2, 1$ указано в таблице для УС общего вида (ОУС) и для политропного газа (ПГ) с произвольным γ.

σ	3		2		1	
	ОУС	ПГ	ОУС	ПГ	ОУС	ПГ
(E)	6	11	10	28	18	50
(S)	7	18	16	73	21	124

Конкретная форма записи уравнений подмодели, порожденной подалгеброй H, зависит от выбора инвариантов I в представлении решения (3.3). Было замечено [7] и затем строго доказано [8], что при надлежащем выборе инвариантов факторсистема для всех инвариантных подмоделей рангов $\sigma = 3, 2, 1$ может быть записана в единообразной *канонической форме* (различной для классов (E) и (S)), а именно

$$RD'\mathbf{U} + \mathbf{B}\nabla' P = \mathbf{f}, \quad D'R + R\,\mathrm{div}'\,\mathbf{U} = g, \quad D'S' = h \tag{5.1}$$

с инвариантными векторами скорости $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3)$, плотностью R, давлением P и энтропией S', которые являются функциями инвариантных независимых переменных $(t, y^1,..., y^{\sigma-1})$ в классе (E) и $(y^1,..., y^\sigma)$ в классе (S). Уравнение состояния для ОУС есть $P = F(R, S')$ с функцией F (1.2), а для ПГ имеет вид $P = S'R^\gamma$. Участвующие в (5.1) дифференциальные операции градиента ∇', полного дифференцирования D' и дивергенции div' действуют только по соответствующим независимым переменным. Например, для $\sigma = 2$ эти операции имеют вид в классе (E)

$$\nabla' = (\partial_{y^1}, 0, 0), \quad D' = \partial_t + U^1\partial_{y^1}, \quad \mathrm{div}'\,\mathbf{U} = U^1_{y^1}$$

и в классе (S)

$$\nabla' = (\partial_{y^1}, \partial_{y^2}, 0), \quad D' = U^1\partial_{y^1} + U^2\partial_{y^2}, \quad \mathrm{div}'\,\mathbf{U} = U^1_{y^1} + U^2_{y^2}.$$

Элементы (3×3)-матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} B^{11} & 0 & 0 \\ 0 & B^{22} & B^{23} \\ 0 & B^{32} & B^{33} \end{Vmatrix}$$

являются зависящими от подмодели функциями только от инвариантных независимых переменных. Правые части в (5.1) представляют собой конкретные для каждой подмодели функции от инвариантов и не содержат производных от искомых функций.

Заметим, что не все приведенные в [1] подмодели ранга 3 для ОУС записаны в канонической форме.

Установлено также, что все инвариантные подмодели имеют эквивалентное представление в виде системы *инвариантных интегральных законов сохранения* массы, импульса и энергии [9].

6. Подмодели типа (0, 0). Этот тип инвариантных подмоделей выделяется тем, что искомые инварианты должны быть константами. Поэтому связывающая эти константы факторсистема состоит из алгебраических (а не дифференциальных) уравнений. Решения УГД, описываемые подмоделями типа (0, 0), называются *простыми решениями*. К ним относится, например, постоянное решение. Простые решения порождаются четырехмерными подалгебрами L_4 с числом (3.5) $r_* = 4$.

В случае ОУС все простые решения описывают изобарические движения газа (2.4). Для политропного газа из 290 содержащихся в ΘL_{13} представителей L_4 оказываются порождающими простые решения 85, а из них только 34 не относятся к специальным движения газа (2.3–2.5). В составленном полном списке этих 34-х простых решений выделены те, которые существенно зависят от четырех независимых переменных. Таких не подобных подмоделей всего восемь, и они могут быть представлены в виде трех подклассов [10].

Например, одно из простых решений для ПГ с $\gamma = 3$ в полярных координатах r, θ ($y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$) с компонентами вектора скорости u (по оси x), v_r (радиальная) и v_θ (окружная) дается формулами

$$u = -\frac{1}{1-t}(x + Ur), \quad v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{r}{1-t}W \tag{6.1}$$

$$\rho = (1-t)^{-A-1} r^{A-2} e^{A\theta/W} R, \quad p = (1-t)^{-A-3} r^A e^{A\theta/W} P$$

где U, W, A – произвольные постоянные и $P/R = W^2/A$, $A > 0$. Для этого (и многих других простых решений) характерно явление *коллапса плотности* (и давления). Траектория частицы газа "стартовавшей" при $t = 0$ из точки (x_0, r_0, θ_0) со значениями ρ_0, p_0 дается вытекающими из (6.1) уравнениями

$$x = (x_0 + Ur_0)(1-t) - Ur_0, \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + W\ln(1-t) \tag{6.2}$$

причем эта частица "несет" значения $\rho = (1-t)^{-1}\rho_0$, $p = (1-t)^{-3}p_0$. Коллапс наступает при $t \to 1$, когда $\rho \to \infty$ ($p \to \infty$). Из (6.2) следует, что *многообразием коллапса* является конус $x = -Ur$. К его пересечению с цилиндром $r = r_0$ стремятся все частицы газа, "стартовавшие" при $t = 0$ из любой точки этого цилиндра и остающиеся на нем при $t > 0$, совершая неограниченное число витков с экспоненциально убывающим шагом и неограниченно возрастающей при $t \to 1$ окружной скоростью.

7. Симметрия инвариантных подмоделей. Каждая из упомянутых в разд. 5 подмоделей обладает определенной симметрией, которую можно вычислить независимо от происхождения подмодели с помощью общего алгоритма отыскания алгебры Ли операторов, допускаемых системой дифференциальных уравнений [2]. Вместе с тем эта симметрия, по крайней мере отчасти, известна заранее в силу следующей теоремы [2]. Пусть система E допускает алгебру Ли L, пусть подалгебра $H \subset L$ порождает инвариантную подмодель E/H и пусть $\mathrm{Nor}_L H$ – *нормализатор* подалгебры H в L; тогда факторсистема E/H допускает *фактор-алгебру* $\mathrm{Nor}_L H/H$.

Путем прямого вычисления установлено, что для большинства инвариантных подмоделей УГД наиболее широкая допускаемая алгебра Ли есть прямая сумма фактор-алгебры $\mathrm{Nor}_L H/H$ и некоторой бесконечномерной алгебры Ли L_∞, возникающей вследствие понижения размерности подпространства независимых переменных в факторсистеме E/H.

Простейший пример дает подмодель *двумерных* движений газа, порожденная одномерной подалгеброй $H = \{X_3\}$ (переносы по координате z). Здесь в фактор-системе компонента w вектора скорости входит только в уравнение импульса $Dw = 0$ и к нормализатору добавляется допускаемый оператор $X_\varphi = \varphi(w)\partial_w$ с произвольной функцией $\varphi(w)$.

Нетривиальный пример такого расширения дает подмодель *установившихся* движений газа при условии, что в УС (1.2) функция F зависит только от произведения ρS, т.е. для УС вида

$$p = F(\rho S) \tag{7.1}$$

В этом случае L_∞ порождается оператором (найденным Ю.А. Чиркуновым и автором)

$$Z_\Phi = \Phi(S, B)(u^i\partial_{u^i} - 2\rho\partial_\rho) \tag{7.2}$$

где Φ произвольная функция двух переменных, а B есть функция Бернулли $B = |\mathbf{u}|^2 + 2i$ с удельной энтальпией $i = Sj(\rho S)$, где $j(\xi) = \int \xi^{-1} df(\xi)$. Оператору (7.2) соответствует бесконечная псевдогруппа Ли преобразований $(\mathbf{u}, \rho, p, S, B) \to (\mathbf{u}', \rho', p', S', B')$:

$$\mathbf{u}' = \varphi\mathbf{u}, \quad \rho' = \varphi^{-2}\rho, \quad p' = p, \quad S' = \varphi^2 S, \quad B' = \varphi^2 B \tag{7.3}$$

с произвольной функцией $\varphi = \varphi(S, B)$. Преобразование (7.3) впервые было указано Мунком и Примом [11]; оно позволяет преобразовать любое непрерывное стационарное решение с УС (7.1) либо в изэнтропическое ($S = \mathrm{const}$), либо изодинамическое ($B = \mathrm{const}$).

Вычисление допускаемых операторов для инвариантных подмоделей ранга $\sigma = 3$ существенно облегчается присущим им свойством "x-автономии": координаты этих операторов при производных по независимым переменным *не зависят от искомых* *функций*. Это устанавливается применением достаточного признака "x-автономии", справедливого для класса определенных систем квазилинейных уравнений первого порядка [12].

Рассматривая какую-либо подмодель УГД в качестве "начальной" модели с известной симметрией, можно искать ее подмодели. Они называются *двухступенчатыми* подмоделями для УГД (1.1). При этом возникает вопрос: содержатся ли двухступенчатые подмодели в исходном массиве Ω всех подмоделей?

Ответ дается "леммой ЛОТ" [13], справедливой для любой системы дифференциальных уравнений E, допускающей алгебру Ли L. Пусть подалгебра $H \subset L$ порождает инвариантную подмодель E/H и пусть подалгебра $H' \subset \mathrm{Nor}_L H/H$. Тогда однозначно определяется такая подалгебра $M \subset \mathrm{Nor}_L H$, для которой H' является фактор-алгеброй M/H (M – прообраз H' при гомоморфизме $\mathrm{Nor}_L H \to \mathrm{Nor}_L H/H$). Система E допускает M и предполагается, что существует инвариантная подмодель E/M. В свою очередь, факторсистема E/H допускает подалгебру $H' = M/H$ и предполагается, что существует инвариантная подмодель $(E/H)/H'$, которая и есть двухступенчатая подмодель для E. Лемма ЛОТ устанавливает эквивалентность этих подмоделей, что записывается в виде символического равенства

$$(E/H)/(M/H) = E/M \tag{7.4}$$

Следовательно, дополнительные, не входящие в массив Ω, двухступенчатые подмодели могут появиться лишь в случае, когда они порождаются такими подалгебрами, которые содержат элементы расширений алгебры Ли, допускаемых подмоделями из Ω.

8. Частично инвариантные подмодели. Возможных подмоделей типа (σ, δ) с $\delta > 0$ значительно больше, чем инвариантных ввиду того, что для каждой подалгебры H дефект δ может принимать несколько значений (7.3) и, как уже было замечено в разд. 3, здесь нет априорного ограничения размерности порождающей подалгебры H.

Специфика ЧИП состоит в том, что в них часть факторсистемы E/H является *переопределенной подсистемой* (ППС) для "лишних" функций и требуется анализ ее совместности (*приведение в инволюцию*). Кроме того, для ЧИП может возникать ее *редукция к меньшему дефекту*. Этим термином называется такое явление, когда подмодель $H(\sigma, \delta)$ оказывается одновременно подмоделью $H'(\sigma,\delta')$, порожденной подалгеброй $H' \subset H$, *того же ранга* σ, но *меньшего дефекта* $\delta' < \delta$. В частности, возможна редукция ЧИП к инвариантной с $\delta' = 0$.

Практика построения ЧИП показывает, что чем больше дефект δ, тем труднее привести в инволюцию факторсистему E/H. Поэтому актуальны априорные признаки редукции ЧИП. В настоящее время эффективно используется следующий достаточный признак редукции [2].

Пусть для подмодели $H(\sigma, \delta)$ в процессе анализа совместности фактор-системы E/H, использующем только алгебраические операции и дифференцирования, для всех производных от искомых функций $u = (u^1,\dots, u^m)$ по всем независимым переменным $x = (x^1,\dots, x^n)$ получаются выражения вида

$$\partial u^k / \partial x^i = f_i^k(x,u) \quad (i=1,\dots,n; k=1,\dots,m) \tag{8.1}$$

Тогда любое $H(\sigma, \delta)$ решение будет также $H'(\sigma, 0)$ решением относительно некоторой подалгебры $H' \subset H$.

9. Регулярные ЧИП. В массиве ЧИП относительной простотой выделяются *регулярные* подмодели $H(\sigma, \delta)$, в которых все σ инвариантных независимых переменных в факторсистеме E/H зависят только от исходных независимых переменных. Выделение регулярных ЧИП обусловлено тем, что их количество для УГД оказывается вполне обозримым, а анализ совместности возникающих ППС сравнительно не сложен.

Полный список из 100 подалгебр, порождающих регулярные ЧИП для УГД в случае ОУС (1.2) (выборка из ΘL_{11}) представлен в [14]. В него входят и инвариантные подмодели, которые всегда регулярны.

После исключения из этого списка инвариантных подмоделей, а также тех, которые относятся к барохронным движениям газа (2.4), остается 30 не редуцируемых ЧИП. Все они проанализированы. Описание подмоделей типов (3,1) и (2,2) опубликовано в [14], типа (2,1) в [15], а типов (1,2) и (1,1) в [16]. Составляется аналогичный список регулярных ЧИП для политропного газа.

Ниже приводится пример регулярной ЧИП типа (1,2), ранее не публиковавшийся. На нем прослеживаются все основные моменты анализа регулярных ЧИП.

Пример. Рассматривается подмодель, порожденная пятимерной подалгеброй $L_5 = \{X_2, X_3, X_5, X_6, X_{10}\}$ с универсальным инвариантом $I = (x, u, \rho, S)$. Для нее число (3.5) $r_* = 5$, и из соотношений (3.6), (3.7) следует, что порождаемая этой L_5 регулярная ЧИП должна иметь тип (1,2).

Представление решения здесь таково: инварианты u, ρ, S (а значит, и давление p) должны быть функциями только от координаты x, а "лишние" функции v, w могут зависеть от всех переменных t, x, y, z. Факторсистема имеет вид

$$\rho u u_x + p_x = 0,\ uS_x = 0,\ u\rho_x + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0$$

$$Dv = 0,\ Dw = 0\ (D = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z)$$

Из третьего уравнения следует, что величина $h = v_y + w_z$ – функция только от координаты x. С функцией $h = h(x)$ фактор-система распадается на инвариантную подсистему

$$\rho u u_x + p_x = 0,\ uS_x = 0,\ u\rho_x + \rho u_x + \rho h = 0 \tag{9.1}$$

и ППС для "лишних" v, w

$$Dv = 0,\ Dw = 0,\ v_y + w_z = h \tag{9.2}$$

Далее предполагается, что $u \neq 0$ (иначе получатся изобарические решения).

Для приведения системы (9.2) в инволюцию к третьему уравнению применяется оператор D, что дает соотношение $2(v_y w_z - v_z w_y) = uh_x + h^2$. Поэтому $v_y w_z - v_z w_y$ зависит только от x и к (9.2) добавляется уравнение с функцией $k = k(x)$

$$v_y w_z - v_z w_y = k \tag{9.3}$$

где $2k = uh_x + h^2$. Применение к (9.3) оператора D дает замыкающее соотношение $uk_x = -hk$. Итак, дополнительно введенные функции h, k должны удовлетворять системе уравнений

$$uh_x + h^2 = 2k,\ uk_x + hk = 0 \tag{9.4}$$

В силу уравнений (9.4) система из четырех уравнений (9.2), (9.3) для искомых v, w находится в инволюции.

Система (9.4) интегрируется с переменной τ (время движения частиц газа вдоль оси x), вводимой уравнением

$$dx/d\tau = u(x) \tag{9.5}$$

и общее решение системы (9.4) дается формулами

$$h = Q'/Q,\ k = Q''/2Q,\ Q = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 \tag{9.6}$$

где a_0, a_1, a_2 – произвольные постоянные, а штрихами обозначены производные по τ.

Инвариантная подсистема (9.1) интегрируется в виде

$$u^2 + 2i(\rho) = 2b,\ \rho u Q = q,\ \ S = \text{const} \tag{9.7}$$

с $i(\rho) = \int \rho^{-1} dp$ и произвольными постоянными b, q. Соотношения (9.5)–(9.7) определяют (в неявной форме) искомые зависимости $u(x)$ и $\rho(x)$.

Остается решить ППС (9.2), (9.3). Для этого вводится лагранжева координата $\xi = t - \tau(x)$, с которой эта подсистема интегрируется путем ее линеаризации так же, как это сделано для аналогичной ППС "каноническая подмодель типа (1,2)" в [14]. Окончательно решение определено с произволом в две функции одного аргумента.

Полученные движения газа "складываются" из двух составляющих: стационарного одномерного движения в направлении оси x (со скоростью $u(x)$ и плотностью $\rho(x)$) и некоторого довольно сложного поперечного нестационарного движения в плоскостях, перпендикулярных оси x (со скоростью (v, w), зависящей от t, ξ, y, z).

10. О нерегулярных ЧИП. Возможностей построения таких подмоделей значительно больше, чем регулярных, так как в них независимыми инвариантными переменными служат и некоторые искомые функции. Вместе с тем анализ возникающих здесь ППС существенно сложнее и часто оказывается почти непосильным.

Классическим примером нерегулярных ЧИП для УГД служат *кратные волны*, порождаемые подалгеброй $L_4 = \{X_1, X_2, X_3, X_{10}\}$, где все искомые функции являются инвариантами. Здесь $r_* = 4$ и из (3.6) получается $\sigma = \delta$, а из (3.7) – неравенства $0 \leq \delta \leq 3$. Тип (0,0) дает постоянное решение. Подмодель типа (1,1) описывает *простые волны*, типа (2,2) *двойные волны* и типа (3,3) *тройные волны*. Из них до конца изучены только простые волны. В частности, для одномерных нестационарных движений газа это волны Римана, а для двумерных установившихся течений – волны Прандтля – Мейера. Что же касается двойных (и тем более тройных) волн, то их полное описание пока нигде не представлено, хотя различным частным примерам таких решений посвящено довольно много работ [17, 18].

Основная трудность состоит в том, что приведение в инволюцию соответствующих ППС требует достаточно больших порядков *продолжения* возникающих систем уравнений с частными производными по четырем (или хотя бы по трем) независимым переменным. Ориентировочный подсчет показывает необходимость продолжения до порядка более четырех, на что не хватает не только бумаги, но и памяти персональных компьютеров.

Существенно проще обстоит дело с нерегулярными ЧИП типа (1,1), когда приведение в инволюцию сводится к вычислению коммутаторов линейных дифференциальных операторов первого порядка. Один из примеров такой ЧИП приведен в [19]. Кандидатами на порождение нерегулярных ЧИП типа (1,1) служат, в основном, четырехмерные подалгебры, для которых $r_* = 4$. Таких подалгебр достаточно много (см. разд. 6) и выявление новых нерегулярных ЧИП для УГД в настоящее время продолжается.

11. Конкретные подмодели. Программа ПОДМОДЕЛИ предусматривает для всех подмоделей УГД не только изучение возникающих математических структур, но также и более детальное представление их физического содержания. Ввиду обилия подмоделей такие исследования выполнены пока выборочно.

Качественно исследованы (групповая классификация, первые интегралы, представление общего решения, сингулярности в решениях и т.п.) подмодели, описывающие изобарические [20], двумерные [21], винтовые [22], винтовые барохронные [23], вращательные [24], общие барохронные [25, 26] движения газа.

Отдельные подмодели изучены более подробно. Так, в [27] приведен пример новой регулярной ЧИП типа (2,1), порожденной подалгеброй вращений, где "лишней" функцией является угол, образованный проекцией вектора скорости на сферу с ее меридианами. Работа [28] посвящена построению двумерных инвариантных (автомодельных) решений, описывающих течения политропного газа с замкнутыми линиями тока. В [29] приведен нетривиальный пример нерегулярного решения типа (1,1) для двумерных движений. Новое инвариантное решение типа (1,0) исследовано в [30]. Канонические формы инвариантных подмоделей ранга два для ОУС построены в [31].

12. Заключение. Симметрия уравнений газовой динамики открывает широкую возможность для выявления новых, допускающих точное описание конкретных форм движения газа. Программа ПОДМОДЕЛИ, нацеленная на систематическое использование этой возможности, показала свою плодотворность. В ходе ее выполнения, наряду с развитием аналитических методов, был разработан и использован ряд компьютерных программ, в частности для вывода систем определяющих уравнений, вычисления нормализаторов подалгебр и построения канонических форм подмоделей. Работа по программе ПОДМОДЕЛИ была начата и продолжается коллективом исследователей на базе Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. Автор благодарит Ю.А. Чиркунова, А.А. Талышева, С.В. Мелешко, С.В. Хабирова, А.П. Чупахина, Е.В. Мамонтова, С.В. Головина, А.А. Черевко за предоставленные и использованные в данной статье результаты их исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–01–01780).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. *Овсянников Л.В.* Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 2. С. 156–159.
4. *Овсянников Л.В.* Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 6. С. 702–704.
5. *Головин С.В.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа: Препринт № 5–96. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1996. 31 с.
6. *Черевко А.А.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\,\rho^{5/3}$. Препринт № 4–96. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1996. 39 с.
7. *Хабиров С.В.* К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 6. С. 764–766.
8. *Овсянников Л.В.* Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики. Препринт № 3–97. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1997. 41 с.
9. *Овсянников Л.В.* Инвариантные интегральные законы сохранения // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 599–602.
10. *Овсянников Л.В.* О "простых" решениях уравнений динамики политропного газа // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2.
11. *Munk M., Prim R.* On the multiplicity of steady gas flows having the same streamlime pattern // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947. V. 33. P. 137–141.
12. *Овсянников Л.В.* О свойстве x-автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 5. С. 559–561.
13. *Овсянников Л.В.* Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 740–742.
14. *Овсянников Л.В., Чупахин А.П.* Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 990–999.
15. *Овсянников Л.В.* Регулярные типа (2,1) подмодели уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 2. С. 3–13.
16. *Чупахин А.П.* Не барохронные надмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Препринт № 5–98. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1998.
17. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
18. *Мелешко С.В.* О неизэнтропических стационарных пространственных и плоских нестационарных двойных волнах // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 255–260.
19. *Мелешко С.В.* Групповая классификация уравнений движений газа в постоянном поле сил // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 1. С. 42–47.
20. *Овсянников Л.В.* Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1792–1799.

21. *Мелешко С.В.* Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 56–62.
22. *Хабиров С.В.* Подмодель винтовых движений в газовой динамике // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 53–65.
23. *Хабиров С.В.* Винтовые движения в газовой динамике с давлением и плотностью, зависящими только от времени // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 1. С. 133–141.
24. *Хабиров С.В.* Подмодель вращательных движений газа в однородном поле сил // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 263–271.
25. *Чупахин А.П.* О барохронных движениях газа. // Докл РАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 624–626.
26. *Чупахин А.П.* Барохронные движения газа. Общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1): Препринт № 4–98. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1998. 66 с.
27. *Овсянников Л.В.* Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 45–52.
28. *Овсянников Л.В.* Плоские течения газа с замкнутыми линиями тока // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 1. С. 51–53.
29. *Мелешко С.В.* Об одном классе частично инвариантных решений плоских течений газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1825–1827.
30. *Головин С.В.* Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 1. С. 3–10.
31. *Мамонтов Е.В.* Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2.

Новосибирск

Поступила в редакцию
3.XII.1998