ЛИТЕРАТУРА

1. *Кац Е.И., Лебедев В.В.* Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 142 с.
2. *Сонин А.С.* Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1983. 319 с.
3. *Seliger R.L., Whitham G.B.* Variational principles in continuum mechanics // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 305. № 1480. P. 1–25. = Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1969. № 5. С. 99–123.
4. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
5. *Lisin V.B., Potapov A.I.* Variational principle in the mechanics of liquid crystals. // Intern. J. Non-Linear Mech. 1997. 32. № 1. P. 55–62.
6. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н.* Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Гидродинамика. М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 7. С. 106–213.
7. *Каменский В.Г.* Нелинейная динамика директора нематиков в магнитном поле. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. № 4. С. 1262–1276.
8. *Pouget J., Maugin G.A.* Nonlinear dynamics of oriented elastic solids. I. Basic equations. // J. Elasticity. 1989. V. 22. № 2/3. P. 135–155.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20.IV.1998

УДК 539.3

© 1999 г. **М.Н. Степанян**

СОСРЕДОТОЧЕННЫЙ МОМЕНТ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Получены выражения для комплексных потенциалов, характеризующих напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с эллиптическим отверстием при действии сосредоточенного момента в произвольной ее точке. Вычислены значения тангенциальных напряжений вдоль края эллиптического отверстия. Определены коэффициенты интенсивности напряжений для предельного случая эллиптического отверстия – прямой щели (трещины).

Ранее [1] были получены выражения коэффициентов интенсивности напряжений при действии сосредоточенного момента в произвольной точке плоскости на основании решения задачи о действии сосредоточенной силы на контур трещины. Если в этот результат вместо сопряженной комплексной координаты точки приложения сосредоточенного момента подставить значение отображающей функции для трещины и умножить выражения коэффициентов интенсивности напряжений на $\pi^{-1/2}$ (так компоненты напряжений определялись по другим формулам [1]), то получается выражение, выведенное здесь иным путем и приведенное в конце статьи.

Комплексные потенциалы, характеризующие напряженно-деформированное состояние бесконечной плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием, под действием сосредоточенного момента M, приложенного в произвольной точке Z_0 плоскости вне отверстия, можно представить в следующем виде [2]:

$$\varphi_1(Z)=\varphi_0^1(Z),\quad \psi_1(Z)=\frac{iM}{2\pi}\frac{1}{Z-Z_0}+\psi_0^1(Z) \tag{1}$$

где $\varphi_0^1(Z)$, $\psi_0^1(Z)$ – голоморфные функции вне отверстия.

Для решения задачи воспользуемся отображением внешности эллипса на внешность единичного круга

$$Z=\omega(\xi)=R\left(\xi+\frac{m}{\xi}\right),\quad R=\frac{a+b}{2},\quad m=\frac{a-b}{a+b} \tag{2}$$

(a, b – полуоси эллипса). Подставив выражение (2) в соотношения (1), будем иметь

$$\varphi(\xi)=\varphi_0(\xi),\quad \psi(\xi)=\frac{iM}{2\pi}\frac{A_0}{\xi-\xi_0}+\psi_0(\xi) \tag{3}$$

$$A_0=\frac{1}{\omega'(\xi_0)},\quad \omega'(\xi_0)=R\left(1-\frac{m}{\xi_0^2}\right),\quad \xi=re^{i\theta},\quad \xi_0=r_0e^{i\theta_0}$$

$$\varphi_0(\xi)=\frac{a_1}{\xi}+\frac{a_2}{\xi^2}+\ldots,\quad \psi_0(\xi)=b_0+\frac{b_1}{\xi}+\frac{b_2}{\xi^2}+\ldots$$

Условия на контуре имеют вид

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(1/\sigma)}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0 \tag{4}$$

$$\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\overline{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=0$$

$$\left(\sigma=e^{i\theta},\quad \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(1/\sigma)}=\frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2},\quad \frac{\overline{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)}=\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\right)$$

Подставляя в условия (4) соответствующие значения комплексных потенциалов (3), получим после интегрирования по единичной окружности γ

$$\varphi_0(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1^0+if_2^0}{\sigma-\xi}d\sigma \tag{5}$$

$$\psi_0(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1^0-if_2^0}{\sigma-\xi}d\sigma-\xi\frac{1+m\xi^2}{\xi^2-m}\varphi_0'(\xi)$$

$$f_1^0+if_2^0=\frac{iM}{2\pi}\frac{\overline{A}_0\sigma}{1-\overline{\xi}_0\sigma},\quad f_1^0-if_2^0=-\frac{iM}{2\pi}\frac{A_0}{\sigma-\xi_0}$$

Вычислив интегралы и подставив результаты в (3), окончательно будем иметь

$$\varphi(\xi)=\frac{iM}{2\pi}\frac{\overline{A}_0/\overline{\xi}_0}{1-\overline{\xi}_0\xi},\quad \psi(\xi)=\frac{iM}{2\pi}\left\{\frac{A_0}{\xi-\xi_0}-\frac{1+m\xi^2}{\xi^2-m}\frac{\overline{A}_0\xi}{(1-\overline{\xi}_0\xi)^2}\right\} \tag{6}$$

Для круглого отверстия ($m=0$) имеем $A_0=\bar{A}_0=1/R_0$, где R_0 – радиус отверстия. Случаю $m=1$ соответствуют выражения комплексных потенциалов для прямой щели.

Для тангенциального напряжения на контуре эллиптического отверстия по формуле Колосова – Мусхелишвили получим

$$\sigma_\theta^c=\frac{2M}{\pi R^2\Delta}\left\{r_0^2[r_0^2-m\cos 2\theta_0][r_0[r_0\sin 2(\theta-\theta_0)-2\sin(\theta-\theta_0)]+\right. \tag{7}$$

$$+m[\sin 2\theta-2r_0\sin(\theta+\theta_0)+r_0^2\sin 2\theta_0]\}-mr_0^2\sin 2\theta_0\times$$

$$\left.\times\{1-2r_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2\cos 2(\theta-\theta_0)-m[\cos 2\theta-2r_0\cos(\theta+\theta_0)+r_0^2\cos 2\theta_0]\}\right\}$$

$$\Delta = \rho^4(r_0^4 - 2mr_0^2\cos 2\theta_0 + m^2)(1 - 2m\cos 2\theta + m^2)$$
$$\rho^2 = 1 - 2r_0\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2$$

Для круглого отверстия

$$\sigma_\theta^c = 2M(\pi R_0^2)^{-1} r_0[r_0 \sin 2(\theta - \theta_0) - 2\sin(\theta - \theta_0)]/\rho^4 \tag{8}$$

Выражению (7) для случая $m = 1$ соответствует значение σ_θ^c для контура прямой щели (трещины). В этом случае определяются коэффициенты интенсивности напряжений K_I, K_II в непосредственной близости от вершины трещины [3].

В работах [4, 5], связанных с математической теорией хрупкого разрушения, показано, что в большом числе практически важных случаев разрушение происходит квазихрупким образом, т.е. так, что пластическая область хотя и существует, но имеет малые размеры и сосредоточивается в непосредственной близости поверхности трещин. Эта важная идея открыла возможность применять теорию хрупкого разрушения во многих практических задачах.

Коэффициенты интенсивности напряжений в рассматриваемом случае определяются в виде

$$K_\mathrm{I} - iK_\mathrm{II} = 2\sqrt{2}\lim_{Z\to a}[(Z-a)^{1/2}\varphi'(Z)]$$

В отображенной плоскости

$$Z = \frac{a}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$$

получим

$$K_\mathrm{I} - iK_\mathrm{II} = \frac{2}{\sqrt{a}}\varphi'(1) = \frac{iM}{\pi\sqrt{a}}\frac{\overline{A}_0}{(1-\overline{\xi}_0)^2}, \quad \overline{A}_0 = \frac{2\overline{\xi}_0}{a(\overline{\xi}_0^2 - 1)} \tag{9}$$

Для случая, когда момент действует на контуре в середине верхнего берега трещины, что соответствует $\theta_0 = \pi/2$, $\xi_0 = e^{i\pi/2} = i$, будем иметь

$$K_\mathrm{I} = M\Big/\left(2\pi a^{3/2}\right), \quad K_\mathrm{II} = 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир, 1968. С. 64–142.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение: Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.
4. *Irwin G.R.* Fracture dynamics // Fracturing of Metals. ASM. Cleveland, 1948. P. 147–166.
5. *Orowan E.O.* Fundamentals of brittle behavior of metals // Fatigue and Fracture of Metals. Wiley, 1950. P. 139–167.

Ереван

Поступила в редакцию
10.VII.1997