3. *Фишман Л.З.* Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1830–1832.
4. *Фишман Л.З.* Критерии опасных и безопасных границ для уравнений с запаздыванием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. 3-й конф. Н. Новгород, 1993. С. 190.
5. *Фишман Л.З.* Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости уравнений с запаздыванием // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 706–713.
6. *Мышкис А.Д., Шиманов С.Н., Эльсгольд Л.З.* Устойчивость и колебания систем с запаздыванием // Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев, 1961. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, Т. 2. С. 241–267.
7. *Шиманов С.Н.* Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2. № 3. С. 467–480.
8. *Колесов Ю.С., Швитра Д.И.* Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 146 с.
9. *Hassard B.D., Kararinoff N.D., Wan Y.-H.* Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
10. *Hale J.K.* Functional Equations. Appl. Math. Sic. V. 3. N.Y.: Springer, 1971.
11. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
12. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20.X.1997

УДК 539.2:534.1

© 1999 г. **В.Б. Лисин, А.И. Потапов**

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Нелинейные уравнения динамики жидких кристаллов [1], выведенные ранее методом скобок Пуассона, выводятся из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Исследуется вариационная задача на безусловный экстремум функционала действия в лагранжевых переменных. В качестве лагранжиана используется разность между объемными плотностями кинетической и свободной энергии жидкого кристалла. Показывается, что полученные вариационные уравнения эквивалентны дифференциальным законам сохранения импульса и кинетического момента жидкого кристалла в эйлеровых переменных, а тензор напряжения Эриксена и молекулярное поле определяется через производные от свободной энергии.

Жидкий кристалл (ЖК) представляет собой текучую среду, у которой в отличие от классических жидкостей есть дополнительная гидродинамическая переменная – поле директора, описывающая ориентационные движения вытянутых частиц [2]. Уравнения нелинейной динамики ЖК были выведены [1] методом скобок Пуассона, хорошо известным в задачах сверхтекучести. Однако в теории ЖК он достаточно сложен и громоздок по сравнению с используемым ниже вариационным методом, применение которого в случае классических жидкостей известно [3, 4].

1. Кинематические и энергетические характеристики. Динамическое состояние жидкого кристалла нематического типа (НЖК) как сплошной среды описывается заданными полями скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и давления, а также полем направлений частиц среды $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ (полем директора) [5, 6]. Для вариационного вывода уравнений динамики НЖК необходимо найти выражение для лагранжиана физически бесконечно малого элемента среды. В механике сплошных сред лагранжиан имеет энергетический смысл и выбирается равным разности между плотностью кинетической энергии и плотностью внутренней или свободной энергии в зависимости от характера изучаемых процессов.

В рассматриваемом случае объемная плотность кинетической энергии равна

$$K=\rho \mathbf{v}^2/2+\rho J\omega^2/2, \quad \omega_s=(\mathbf{n}\times d\mathbf{n}/dt)_s=\epsilon_{ski}\, n_s \dot{n}_k \tag{1.1}$$

Первое слагаемое в правой части первого соотношения (1.1) описывает кинетическую энергию, связанную с поступательным движением центра масс физически малого объема, а второе слагаемое описывает энергию, связанную с вращением молекул относительно центра масс, J – геометрический момент инерции, ω – угловая скорость вращения директора, ε_{ski} – компоненты псевдотензора Леви-Чивиты. Здесь учтено также, что вектор $\mathbf{n}$ имеет единичную длину, и все изменения директора связаны с его поворотом в пространстве.

В простейшем случае, для НЖК свободная энергия имеет вид [2]

$$\rho F=\rho F_0(\rho)+\frac{1}{2}K_1(\operatorname{div}\mathbf{n})^2+\frac{1}{2}K_2(\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n})^2+\frac{1}{2}K_3(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n})^2-\frac{1}{8\pi}\Delta\varepsilon(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})^2-\frac{1}{2}\Delta\chi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})^2 \tag{1.2}$$

Здесь K_i – константы Франка, $\Delta\varepsilon$ и $\Delta\chi$ – диэлектрическая и диамагнитная анизотропии. В механике жидких кристаллов свободная энергия играет роль, аналогичную роли упругой энергии деформации твердого тела, и придает ей некоторые черты схожести с теорией упругости. Первое слагаемое в правой части (1.2) описывает гидродинамическую часть свободной энергии, через которую выражается давление в среде $p=\rho^2(\partial F/\partial\rho)$, второе и четвертое слагаемые связаны с градиентом поля директора, а два последних описывают взаимодействие электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей с полем директора $\mathbf{n}$. Они отвечают за изменение ориентации директора под действием электрического и магнитного полей. Входящие в (1.2) три комбинации с коэффициентами K_i независимы друг от друга, каждая из них может быть отлична от нуля при равных нулю двух других. Деформации, в которых отлична от нуля лишь одна из величин $\operatorname{div}\mathbf{n}$, $(\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n})$ или $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}$ называют соответственно поперечным изгибом, кручением или продольным изгибом. В соответствии с этим K_1 иногда называют модулем упругости поперечного изгиба, K_2 – модулем кручения, а K_3 – модулем продольного изгиба. Объемная плотность функции Лагранжа в переменных Эйлера равна

$$L(\rho,\mathbf{v},n_k,n_{k,i},\omega)=\rho\{\mathbf{v}^2/2+J\omega^2/2-F(\rho,n_k,n_{k,i},\mathbf{E},\mathbf{H})\} \tag{1.3}$$

Здесь и далее индекс после запятой означает производную по соответствующей координате (например, $n_{k,i}=\partial n_k/\partial x_i$).

2. Вариационные уравнения. К вариационному выводу уравнений динамики сплошных сред существует два эквивалентных подхода [3–5]: либо рассматривается вариационная задача на условный экстремум для функционала действия, записанного в эйлеровых переменных, либо исследуется вариационная задача на безусловный экстремум функционала действия, записанного в лагранжевых переменных.

При первом подходе необходимо знать дополнительные связи, накладываемые на полевые переменные ρ, p, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, ω, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Такие связи в случае сред с внутренней структурой, к которым относятся и жидкие кристаллы, заранее не известны.

При втором подходе, который используется в настоящей работе, все полевые переменные, входящие в (1.3), необходимо выразить через независимые переменные Лагранжа, которыми являются координаты центра масс частиц $\xi_\alpha(x_i,t)$ и их ориентация $n_\alpha(x_i,t)$, $\alpha=1,2,3$. Здесь и далее латинские индексы обозначают эйлеровы координаты, а греческие – лагранжевы.

Эйлерово поле скоростей может быть выражено через лагранжевы координаты ξ_α и их производные из условия сохранения лагранжевых координат частицы $d\xi_\alpha/dt=\partial\xi_\alpha/\partial t+$ $+\mathbf{v}_j\partial\xi_\alpha/\partial x_j=0$. Отсюда получаем, что

$$\mathbf{v}_j=-\frac{\partial x_j}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial t} \tag{2.1}$$

Из уравнения неразрывности среды в лагранжевых переменных находим

$$\rho[x_i(\xi_\alpha),\ t]=\rho_0(\xi_\alpha)\det\|\xi_{\alpha,i}\|/\det\|\xi^0_{\alpha,i}\| \tag{2.2}$$

где ρ – плотность, а ξ^0_α – лагранжевы координаты среды в начальный момент времени. Таким образом, выражая полевые величины ρ, v, ω с помощью связей (2.1) и (2.2), получим лагранжиан (1.3) как функцию независимых переменных ξ_α, n_k и их производных

$$L = L(\xi_{\alpha,j},\ \xi_{\alpha,t},\ n_k,\ \dot{n}_k,\ n_{k,j}) \tag{2.3}$$

$$(\xi_{\alpha,t} = \partial\xi_\alpha / \partial t, \quad \dot{n}_k = dn_k / dt = \partial n_k / \partial t + v_j \partial n_k / \partial x_j)$$

Индекс t после запятой означает частную производную по времени от функции при фиксированных эйлеровых координатах x_i, а точкой обозначена производная по времени при фиксированных лагранжевых координатах ξ_α.

Из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского в лагранжевых переменных следует, что движение сплошной среды соответствует безусловному экстремуму функционала действия.

$$I[\xi_\alpha,\ n_k] = \int_{t_0}^{t_1} \int_V L(\xi_{\alpha,i},\ \xi_{\alpha,t},\ n_k,\ \dot{n}_k,\ n_{k,j}) dV dt \tag{2.4}$$

Интегрирование ведется по изменяющемуся во времени объему $V = V(t)$, занимаемому одними и теми же частицами среды, которые не могут пересекать его границу.

Варьируя функционал (2.4) по независимым переменным ξ_α и n_k при постоянных эйлеровых координатах x_j (см. Приложение) и пользуясь формулой Грина для разделения вариации по объему $V(t)$ и его поверхности $\Sigma = \Sigma(t)$, получаем

$$\begin{aligned}
\delta_x I[\xi_\alpha,\ n_k] = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \Bigg\{ \Bigg[&-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} n_{k,j}\right) x_{j,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} v_m n_{k,j}\right) x_{j,\alpha} + \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} n_{k,m} v_{m,j} x_{j,\alpha} \Bigg] \delta_x \xi_\alpha + \left[\frac{\partial L}{\partial n_k} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} v_{m,m} \right] \delta_x n_k \Bigg\} dV dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma(t)} \Bigg\{ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} v_j n_{k,i} x_{i,\alpha} \right) \nu_j - \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} x_{i,\alpha} n_{k,i} \right) C_\Sigma \right] \delta_x \xi_a + \\
&+ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} \right) \nu_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} C_\Sigma \right] \delta_x n_k \Bigg\} d\Sigma dt + \\
&+ \left\{ \int_V \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} x_{i,\alpha} n_{k,i} \right) \delta_x \xi_\alpha + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} \right) \delta_x n_k \right] dV \right\} \Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

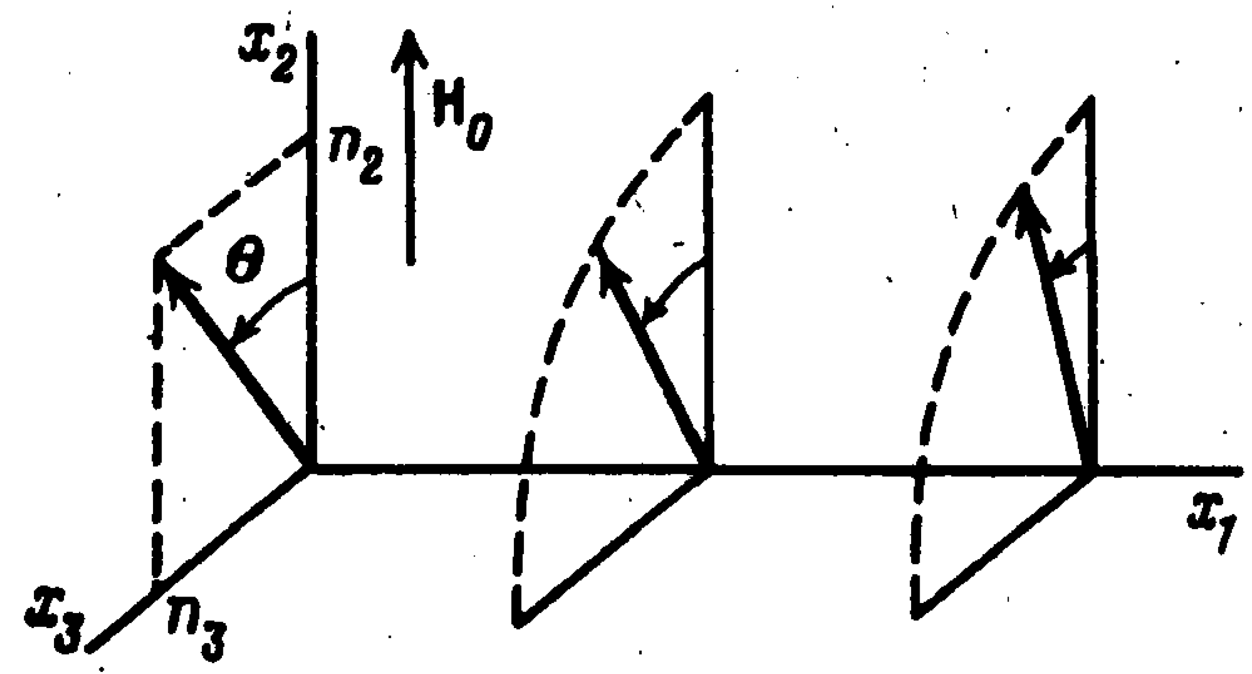
Здесь ν_j – компоненты нормали к поверхности Σ, а C_Σ – нормальная скорость точек поверхности $\Sigma(t)$.

Предполагая, что на поверхности объема вариации $\delta_x \xi_\alpha$ и $\delta_x n_k$ обращаются в нуль, а состояния системы в начале $t = t_0$ и в конце $t = t_1$ движения считаются известными, получаем, что второй и третий интегралы в (2.5) равны нулю, а первый интеграл приводит к вариационным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} n_{k,j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} v_m n_{k,j}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} v_{m,j} n_{k,m} \right) \frac{\partial x_j}{\partial \xi_\alpha} \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial n_k} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{n}_k} v_{m,m} \tag{2.7}$$

Первое из них описывает трансляционные движения в жидком кристалле, а второе – динамику директора.



Из вариации интеграла действия (2.5) можно получить и граничные условия на поверхности объема, занятого жидким кристаллом. Для этого необходимо предположить, что вариации $\delta_x \xi_\alpha$ и $\delta_x n_k$ не равны нулю на поверхности Σ, а уравнения (2.6), (2.7) справедливы и, кроме того, выполняются условия непроницаемости границы Σ: $v_j \nu_j - C_\Sigma = 0$. Тогда из условия обращения в нуль второго и третьего интегралов в (2.5) получаем естественные граничные условия

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}} \nu_j - \frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}} C_\Sigma \right|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}} \nu_j \right|_\Sigma = 0 \tag{2.8}$$

3. Эквивалентность вариационных уравнений локальным законам сохранения. Вернемся в уравнении (2.6) к гидродинамическим переменным ρ, v_j, p по формулам перехода (2.1) и (2.2) (см. Приложение). В результате из (2.6) получим закон сохранения импульса НЖК

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}[\rho v_i v_j - \sigma_{ij}^e] = 0, \quad \sigma_{ij}^e = -\left(p\delta_{ij} + \frac{\partial(\rho F)}{\partial n_{k,j}} n_{k,i}\right) \tag{3.1}$$

Здесь σ_{ij}^e – компоненты тензора напряжений Эриксена [2, 5], $p = \rho^2(\partial F/\partial\rho)$ – гидродинамическое давление, а $(\partial(\rho F)/\partial n_{k,j}) n_{k,i}$ – вклад микроповоротов частиц в поле напряжений жидкого кристалла. Без учета последнего слагаемого в тензоре Эриксена выражение (3.1) совпадает с законом сохранения импульса идеальной жидкости.

После аналогичной процедуры перехода к гидродинамическим переменным из (2.7) получаем дифференциальную форму уравнения баланса момента импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\rho\omega_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(J\rho\omega_i\omega_j) = \varepsilon_{ski} n_s h_k, \quad h_k = \frac{\partial \rho \mathbf{F}}{\partial n_k} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \rho \mathbf{F}}{\partial n_{k,j}}\right) \tag{3.2}$$

где h_k – так называемое молекулярное поле, характеризующее наличие моментов внутренних сил в НЖК.

Следует отметить, что в левой части (3.2) присутствует лишь кинетический момент связанный с вращением директора $\mathbf{n}$. Слагаемое, связанное с кинетическим моментом идеальной жидкости $\rho\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, остается неизменным и в (3.2) не входит.

От законов изменения импульса и момента импульса можно перейти к уравнениям движения НЖК в эйлеровых переменных

$$\begin{gathered} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0 \\ \rho J\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{ski} n_s h_k \end{gathered} \tag{3.3}$$

замыкая их уравнением состояния жидкости (уравнением Тэта)

$$p = p_*[(\rho/\rho_0)^\Gamma - 1] \tag{3.4}$$

где p_* – внутреннее давление в жидкости, ρ_0 – плотность невозмущенной среды, а Γ – нелинейный параметр. В таком виде они известны как уравнения гидродинамики жидких кристаллов[2,6].

4. Взаимодействие гидродинамических полей с волной директора. В качестве примера выведем уравнения, описывающие распространение одномерной крутильной волны ориентации в НЖК, находящемся в постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = \{0, H_0, 0\}$.

Пусть директор зависит от одной пространственной координаты $x_1 = x$ и может вращаться в плоскости (x_2, x_3), т.е. $\mathbf{n}(x, t) = \{0, n_2(x, t), n_3(x, t)\}$ (фигура), а поле скоростей имеет вид $\mathbf{v} = \{v(x, t), 0, 0\}$. Если ввести угол $\theta(x, t)$ между направлением директора $\mathbf{n}$ и магнитным полем $\mathbf{H}_0$, то получим $n_2 = \cos\theta$, $n_3 = \sin\theta$, и угловая скорость директора имеет одну компоненту, направленную вдоль оси x: $\omega(x, t) = d\theta/dt$. Объемная плотность свободной энергии (1.2) равна

$$\rho F = \rho F_0(\rho) + \frac{K_2}{2}\left(n_3 \frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \frac{\Delta\chi}{2} H_0^2 \cos^2\theta$$

где $\rho F_0(\rho) = p_*[(\Gamma-1)(\rho/\rho_0)^\Gamma + 1]$ – гидродинамическая часть свободной энергии. Отличные от нуля компонента тензора напряжений Эриксена σ_{11}^e и компоненты молекулярного поля $h_{2,3}$ имеют вид

$$\sigma_{11}^e = p + K_2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2, \quad h_2 = \Delta\chi H_0^2 \cos\theta + K_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\theta, \quad h_3 = K_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\theta$$

Подставляя найденные выражения в (3.3), (3.4), получаем уравнения движения НЖК

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{K_2}{4\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{4.1}$$

$$J\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} - K_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \Delta\chi H_0^2 \sin\varphi = 0 \tag{4.2}$$

где обозначено $\varphi = 2\theta$. Уравнение (4.2) описывает крутильную волну директора НЖК [7] и при условии несжимаемости среды ($\rho = \rho_0$) совпадает с известным уравнением синус-Гордона. Если кинетическая энергия директора пренебрежимо мала по сравнению с его "потенциальной" энергией (т.е. $J\rho(\partial\varphi/\partial t)^2 \ll \rho(\partial\varphi/\partial x)^2$, $v = 0$), то в (4.2) можно пренебречь первым слагаемым, и оно будет описывать квазистатический процесс ориентации директора в магнитном поле, известный как переход Фредерикса [2].

5. Приложение. *Связь между вариациями в лагранжевых и эйлеровых переменных.* Величина вариации, вычисленная при постоянных эйлеровых координатах

$$\delta_x f(x,t) = (\partial f(x,\ t,\ \varepsilon)/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0, x=\mathrm{const}}\, d\varepsilon \tag{5.1}$$

связана с вариацией $\delta_\xi f(\mathbf{x}, t)$, вычисленной при постоянных лагранжевых координатах ξ_α, следующим соотношением:

$$\delta_\xi f(x,t) = (\partial f[x_i(\xi_\alpha,\ t,\ \varepsilon),\ t,\ \varepsilon]/\partial\varepsilon))_{\varepsilon=0,\xi=\mathrm{const}}\, d\varepsilon = \delta_x f + \delta_\xi x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{5.2}$$

где $\delta_\xi x_i$ – лагранжева вариация эйлеровой координаты. Из определения (5.2) вытекает тождество $\delta_\xi \xi_\alpha(x_i,\ t) = \delta_x \xi_\alpha + \delta_\xi x_i \partial\xi_\alpha/\partial x_i \equiv 0$ и равенство $\delta_\xi x_i = -\partial x_i/\partial\xi_\alpha \delta_x \xi_\alpha$.

Эйлерова вариация δ_x перестановочна с частными производными в эйлеровых переменных $\partial/\partial x_i$ и $\partial/\partial t$, но не коммутирует с производными $\partial/\partial\xi_\alpha$ и d/dt в лагранжевой системе координат. Формулы, связывающие эйлеровы вариации производных $\delta_x \dfrac{d}{dt}$ и $\delta_x \dfrac{\partial}{\partial\xi_\alpha}$ с операторами $\dfrac{d}{dt}\delta_x$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\delta_x$, следуют из определения (5.2) и при учете приведенных тождества и равенства могут быть записаны в виде

$$\left(\delta_x \frac{d}{dt}\right) f = \left(\frac{d}{dt}\delta_x\right) f - \frac{d}{dt}\left(x_{i,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta_x \xi_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{df}{dt}\right) x_{i,\alpha}\delta_x \xi_\alpha \tag{5.3}$$

$$\left(\delta_x \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\delta_x\right) f - \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left(x_{i,\beta}\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta_x \xi_\beta\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}\right) x_{i,\beta}\delta_x \xi_\beta \tag{5.4}$$

Уравнение переноса импульса. Свернем уравнение (2.6) с компонентами невырожденной матрицы $\xi_{\alpha,i}=(\partial\xi_\alpha/\partial x_i)$ и далее прибавим и вычтем из полученного выражения величину

$$\frac{\partial L}{\partial n_k}n_{k,i}+\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}\frac{\partial}{\partial x_i}(n_{k,j})+\frac{\partial L}{\partial \dot n_k}\frac{\partial}{\partial x_i}(\dot n_k)$$

После группировки слагаемых имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_{\alpha,j})+\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_{\alpha,t})+\frac{\partial L}{\partial n_k}\frac{\partial}{\partial x_i}(n_k)+\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}\frac{\partial}{\partial x_i}(n_{k,j})+$$

$$+\frac{\partial L}{\partial \dot n_k}\frac{\partial}{\partial x_i}(\dot n_k)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}}\xi_{\alpha,i}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}}\xi_{\alpha,i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}n_{k,i}\right)-$$

$$-\left[\frac{\partial L}{\partial n_k}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot n_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot n_k}\mathrm{v}_{m,m}\right]n_{k,i}=0 \tag{5.5}$$

Первые пять слагаемых образуют частную производную по координате x_i от лагранжиана $L=L[\xi_{\alpha,i}(x_i,t),\ \xi_{\alpha,t},\ n_k(x_i,\ t),\ \dot n_k,\ n_{k,j}]$, а выражение в квадратных скобках, согласно (2.7), тождественно равно нулю, поэтому из (5.5) получаем дивергентную форму закона сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}}\xi_{\alpha,t}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}}\xi_{\alpha,i}+\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}n_{k,i}-L\delta_{ij}\right)=0 \tag{5.6}$$

Используя выражение для лагранжиана (1.3), а также соотношения (2.1) и (2.2), связывающие поля скорости и плотности с производными от лагранжевых переменных, находим, что

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,t}}\xi_{\alpha,i}=-\rho \mathrm{v}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_{\alpha,j}}\xi_{\alpha,i}+\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}n_{k,i}-L\delta_{ij}=-\rho\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j-\rho^2\frac{\partial F}{\partial\rho}\delta_{ij}-\frac{\partial(\rho F)}{\partial n_{k,j}}n_{k,i}$$

Подстановка этих неравенств в (5.6) приводит к закону сохранения импульса (3.1).

Уравнение баланса кинетического момента. Свернем уравнение (2.7) с невырожденной матрицей $\varepsilon_{ski}n_s$ и далее с помощью соотношений (2.1), (2.2) и (1.3) перейдем к эйлеровым переменным в следующих выражениях:

$$\frac{\partial L}{\partial n_k}\in_{ski}n_s=\frac{\partial(\rho F)}{\partial n_k}\in_{ski}n_s,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot n_k}\mathrm{v}_{m,m}\in_{ski}n_s=\rho J\omega_i\mathrm{v}_{m,m}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial n_{k,j}}\right)\varepsilon_{ski}n_s=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(\rho F)}{\partial n_{k,j}}\right)\varepsilon_{ski}n_s$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot n_k}\right)\in_{ski}n_s=\rho J\dot\omega_i+\dot\rho J\omega_i$$

Здесь учтено, что $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})$ и $\dot\omega_i=\varepsilon_{ski}n_s\ddot n_k$. После этого полученное выражение представляет собой уравнение баланса (3.2).

Авторы благодарят Э.Л. Аэро за информацию по гидромеханике жидких кристаллов и Ж.А. Можена, обратившего их внимание на теорию ориентированных упругих тел и любезно предоставившего оттиска статей [8]. Работа выполнена при частичной поддержке международного научного фонда и Российского Правительства (R9B300), Российского фонда фундаментальных исследований (95-02-05360) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (96-2370).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кац Е.И., Лебедев В.В.* Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 142 с.
2. *Сонин А.С.* Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1983. 319 с.
3. *Seliger R.L., Whitham G.B.* Variational principles in continuum mechanics // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 305. № 1480. P. 1–25. = Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1969. № 5. С. 99–123.
4. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
5. *Lisin V.B., Potapov A.I.* Variational principle in the mechanics of liquid crystals. // Intern. J. Non-Linear Mech. 1997. 32. № 1. P. 55–62.
6. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н.* Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Гидродинамика. М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 7. С. 106–213.
7. *Каменский В.Г.* Нелинейная динамика директора нематиков в магнитном поле. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. № 4. С. 1262–1276.
8. *Pouget J., Maugin G.A.* Nonlinear dynamics of oriented elastic solids. I. Basic equations. // J. Elasticity. 1989. V. 22. № 2/3. P. 135–155.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20.IV.1998

УДК 539.3

© 1999 г. М.Н. Степанян

СОСРЕДОТОЧЕННЫЙ МОМЕНТ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Получены выражения для комплексных потенциалов, характеризующих напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с эллиптическим отверстием при действии сосредоточенного момента в произвольной ее точке. Вычислены значения тангенциальных напряжений вдоль края эллиптического отверстия. Определены коэффициенты интенсивности напряжений для предельного случая эллиптического отверстия – прямой щели (трещины).

Ранее [1] были получены выражения коэффициентов интенсивности напряжений при действии сосредоточенного момента в произвольной точке плоскости на основании решения задачи о действии сосредоточенной силы на контур трещины. Если в этот результат вместо сопряженной комплексной координаты точки приложения сосредоточенного момента подставить значение отображающей функции для трещины и умножить выражения коэффициентов интенсивности напряжений на $\pi^{-1/2}$ (так компоненты напряжений определялись по другим формулам [1]), то получается выражение, выведенное здесь иным путем и приведенное в конце статьи.

Комплексные потенциалы, характеризующие напряженно-деформированное состояние бесконечной плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием, под действием сосредоточенного момента M, приложенного в произвольной точке Z_0 плоскости вне отверстия, можно представить в следующем виде [2]:

$$\varphi_1(Z) = \varphi_0^1(Z), \quad \psi_1(Z) = \frac{iM}{2\pi}\frac{1}{Z - Z_0} + \psi_0^1(Z) \tag{1}$$

где $\varphi_0^1(Z)$, $\psi_0^1(Z)$ – голоморфные функции вне отверстия.