УДК 531.36

© 1999 г. Л.З. Фишман

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ТОЧКАХ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ, В КОТОРЫХ БЕЗОПАСНЫЕ УЧАСТКИ ПЕРЕХОДЯТ В ОПАСНЫЕ

В развитие полученных ранее результатов [1–5] дается критерий устойчивости состояний равновесия систем с запаздыванием в точках границ областей устойчивости (ГОУ), в которых безопасные участки переходят в опасные.

Задачи, связанные с определением опасных и безопасных ГОУ состояний равновесия систем с запаздыванием рассматривались в [1–10]. Были даны [6–10] способы и алгоритмы исследования устойчивости систем с запаздыванием в критических случаях, основанные на сведении их к укороченным системам без запаздывания. Получены [1, 5, 9] формулы величины, подобный первой ляпуновской, для уравнений первого порядка с запаздыванием. Вместе с тем в [1–10] нет таких достаточно простых и удобных критериев устойчивости состояний равновесия систем с запаздыванием в точках ГОУ, в которых безопасные участки переходят в опасные, какие имеются для систем без запаздывания [11].

Для систем, описываемых скалярным уравнением второго порядка с запаздыванием

$$\ddot{x}=a_1x+a_2\dot{x}+b_1x(t-\tau)+b_2\dot{x}(t-\tau)+f(x,\dot{x},x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau)) \tag{1}$$

рассмотрим задачу об определении устойчивости в точках ГОУ состояний равновесия, в которых безопасные участки переходят в опасные.

Предположим, что аналитическая функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ разлагается в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ в ряд, начинающийся с членов не ниже второго порядка по (x_1, x_2, x_3, x_4) следующего вида:

$$f=\sum_{1\le i\le k\le 4} a_{ik}x_ix_k+\sum_{1\le i\le k\le p\le 4} a_{ikp}x_ix_kx_p+\sum_{1\le i\le k\le p\le s\le 4} a_{ikps}x_ix_kx_px_s+$$

$$+\sum_{1\le i\le k\le p\le s\le m\le 4} a_{ikpsm}x_ix_kx_px_sx_m+\ldots$$

где $a_{ik}, a_{ikp}, a_{ikps}, a_{ikpsm}$ – постоянные коэффициенты.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p & -1 \\ -a_1-b_1e^{-\tau p} & p-a_2-b_2e^{-p\tau}\end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

имеет простые корни $p_{1,2} = \pm i\omega$ и корни $p_j (j \geqslant 3)$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$. В этом случае устойчивость состояния равновесия $x = 0$ уравнения (1) определяется по знаку величин, подобных ляпуновским [6–10].

Предположим, что величина, подобная первой ляпуновской, для уравнения (1) равна нулю, а величина, подобная второй ляпуновской, не равна нулю.

В данной работе при сделанных предположениях исследование устойчивости состояния равновесия $x = 0$ уравнения (1) сводится к вычислению величины, подобный второй ляпуновской, и определению ее знака.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\dot{x}^*=Ax^*+Bx^*(t-\tau)+F(x^*,\ x^*(t-\tau)) \tag{3}$$

где вектор x^* имеет компоненты $x_1^* = x, x_2^* = \dot{x}$, матрицы $A = [a_{ik}^*]$, $B = [b_{ik}^*]$ $(i,k = 1,2)$ имеют элементы

$$a_{11}^* = b_{11}^* = b_{12}^* = 0,\ a_{12}^* = 1,\ a_{21}^* = a_1,\ a_{22}^* = a_2,\ b_{21}^* = b_1$$

$b_{22}^* = b_2$, вектор-функция $F(x^*, x^*(t-\tau))$ имеет компоненты

$$F_1 = 0,\quad F_2 = f(x_1^*, x_2^*, x_1^*(t-\tau), x_2^*(t-\tau)).$$

Системы второго порядка с запаздыванием рассматривались ранее [5]. Используя известные результаты [5, 7], запишем систему (3) в операторной форме

$$dx_t(\theta)/dt = Lx_t(\theta) + R(x_t(\theta)) \tag{4}$$

$$Lx_t(\theta) = \begin{cases} dx_t(\theta)/dt, & -\tau \leq \theta < 0 \\ Ax_t + Bx_t(-\tau), & \theta = 0 \end{cases}$$

$$Rx_t(\theta) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq \theta < 0 \\ F(x_t(0),\ x_t(-\tau)), & \theta = 0 \end{cases}$$

где $x_t(\theta) = x^*(t+\theta)$, $x^*(t)$ – вектор с компонентами $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, представляющий собой решение системы (3) при $t > 0$ с непрерывно-дифференцируемой начальной вектор-функцией

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta),\quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Пусть $\Delta_{ik}(p_j)$ – алгебраические дополнения элементов i-й строки и k-го столбца определителей $\Delta(p_j)$.

Рассмотрим вектор-функции $\beta_j(\theta)$ с компонентами

$$\beta_j^{(k)}(\theta) = \exp(p_j\theta)\Delta_{2k}(p_j)/\Delta_j;\quad k = 1,2;\ j = 1,2$$

и величины

$$\Delta_j = d\Delta(p)/dp\,|_{p=p_j} = 2p_j + e^{-p_j\tau}(\tau b_1 + \tau p_j b_2 - b_2) - a_2$$

Рассмотрим функционалы

$$f_j[x(\theta)] = \sum_{i=1}^{2} \Delta_{i1}(p_j)\left[x_i(0) + \sum_{l=1}^{2} \int_{-\tau}^{0} e^{-p_j(\nu+\tau)} x_l(\nu) b_{il} d\nu\right]$$

где $x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ – компоненты вектора $x(\theta)$.

В системе (4) сделаем замену переменных $x_t(\theta)$ на переменные y_1, y_2, $z_t(\theta)$ по формулам

$$y_j(t) = f_j[x_t(\theta)],\quad z(\theta) = x(\theta) - \sum_{j=1}^{2} \beta_j(\theta) y_j(t)$$

Следуя известной процедуре [7], от системы в новых переменных перейдем к укороченной системе второго порядка без запаздывания. Для этого сделаем замену переменной $z_t(\theta)$ на переменную $R_t(\theta)$ по формуле

$$z_t(\theta) = R_t(\theta) + \gamma(\theta, y_1, y_2) = R_t(\theta) + \sum_{k=2}^{4} \sum_{r+q=k} d_{rq} y_1^r y_2^q$$

где γ – двумерная вектор-функция.

Коэффициенты $d_{rq}(\theta)$, представляющие собой двумерные вектор-функции, находятся из операторного уравнения

$$[J\lambda - L]d_{rq}(\theta) = B_{rq}(\theta) \tag{5}$$

где J – тождественный оператор, $B_{rq}(\theta)$ – известная функция, $\lambda = (r-q)i\omega$.

Из уравнения (5) в случае $r-q \neq \pm 1$, так как величина λ не входит в спектр оператора L, получаем, что

$$d_{rq}(\theta) = R(\lambda, J)B_{rq}(\theta) \tag{6}$$

где $R(\lambda, J)$ – резольвента оператора $[J\lambda - L]$. Из равенства (6) при $r-q \neq \pm 1$ получаем, что

$$d_{rq}(0) = \chi^{-1}(\lambda)\left(D_{rq} - \sum_{j=1}^{2} A_{rq}\alpha_j + BC_{rq}\right)$$

$$d_{rq}(-\tau) = e^{-\lambda\tau}d_{rq}(0) + C_{rq} \tag{7}$$

$$C_{rq} = A_{rq}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{p_j-\lambda}\alpha_j(e^{-p_j\tau} - e^{-\lambda\tau})$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda E - A - Be^{-\lambda\tau})$$

Двумерный вектор D_{rq} имеет компоненты $D_{rq}^{(1)} = 0$ и $D_{rq}^{(2)} = A_{rq}$, величины A_{rq} будут определены ниже, вектора α_j имеют компоненты $\alpha_{1j} = 1/\Delta_j$, $\alpha_{2j} = p_j/\Delta_j$ $(j = 1, 2)$, $\lambda = (r-q)i\omega$.

В случае, когда $r-q = \pm 1$, коэффициенты d_{rq} не могут быть найдены в виде (6), но также могут быть получены [7] из уравнения (5).

В случае, когда $r = 2$, $q = 1$, $r - q = 1$ по изложенной ранее методике [7] получаем из уравнения (5) вектор $d_{21}(\theta)$ при $\theta = 0$, $\theta = -\tau$:

$$d_{21}(0) = V - A_{21}\left[(\alpha_{11}+\alpha_{12})(1+\tau e^{-p_1\tau}b_2) - \frac{\tau^2}{2}e^{-p_1\tau}(b_1\alpha_{11}+b_2\alpha_{21}) + \frac{1}{2p_1}(\Delta_{11}\alpha_{12}+\alpha_{22}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2p_1}e^{-p_1\tau}\tau(b_1\alpha_{12}+b_2\alpha_{22})\right]\alpha_1 \tag{8}$$

$$d_{21}(-\tau) = e^{-p_1\tau}d_{21}(0) - A_{21}e^{-p_1\tau}\left[\tau\alpha_1 + \frac{1}{2p_1}(e^{2p_1\tau}-1)\alpha_2\right]$$

$$\Delta_{11} = p_1 - a_2 - b_2e^{-p_1\tau}$$

Вектор V имеет компоненты $V^{(1)} = 0$, $V^{(2)} = A_{21}(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, величина A_{21} будет определена ниже.

Векторы $d_{12}(0)$ и $d_{12}(-\tau)$ комплексно сопряжены [7] с векторами $d_{21}(0)$ и $d_{21}(-\tau)$, и значит также находятся из формул (8).

В дальнейшем будем обозначать

$$d_{rq}^{(i)} = d_{rq}^{(i)}(0), \quad d_{rq}^{(i+2)} = d_{rq}^{(i)}(-\tau); \quad i = 1,2; \quad 2 \leqslant r+q \leqslant 4$$

Укороченная система второго порядка без запаздывания имеет вид

$$\dot{y}_j = p_jy_j + Q(y_1,y_2) = p_jy_j + \sum_{k\geqslant 2}\sum_{r+q=k}A_{rq}y_1^ry_2^q, \quad j = 1,2 \tag{9}$$

где

$$Q = f(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}a_{ik}\psi_i\psi_k + \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant p\leqslant 4}a_{ikp}\psi_i\psi_k\psi_p +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant p\leqslant s\leqslant 4}a_{ikps}\psi_i\psi_k\psi_p\psi_s + \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant p\leqslant s\leqslant m\leqslant 4}a_{ikpsm}\psi_i\psi_k\psi_p\psi_s\psi_m + \ldots$$

$$\psi_j = \alpha_{j1}y_1 + \alpha_{j2}y_2 + \gamma^{(j)}(0, y_1, y_2), \quad j = 1, 2$$

$$\psi_{j+2} = \alpha_{j+2,1}y_1 + \alpha_{j+2,2}y_2 + \gamma^{(j)}(-\tau, y_1, y_2)$$

$$\alpha_{kj} = e^{-p_j\tau}\alpha_{k-2,j}, \quad k = 3,4$$

$$\gamma^{(j)}(0,y_1,y_2)=\sum_{2\le r+q\le 5} d_{rq}^{(j)}y_1^r y_2^q,\quad \gamma^{(j)}(-\tau,y_1,y_2)=\sum_{2\le r+q\le 5} d_{rq}^{(j+2)}y_1^r y_2^q$$

A_{rq} – постоянные коэффициенты, которые входят в формулы (7), (8), определяемые по формуле

$$A_{rq}=\frac{1}{r!q!}\frac{\partial^{r+q}Q(y_1,y_2)}{\partial y_1^r\partial y_2^q}\Big|_{y_1=y_2=0} \tag{10}$$

В частности, имеем

$$A_{20}=\sum_{1\le i\le k\le 4} a_{ik}\alpha_{i1}\alpha_{k1},\quad A_{11}=\sum_{1\le i\le k\le 4} a_{ik}(\alpha_{i1}\alpha_{k2}+\alpha_{i2}\alpha_{k1})$$

$$A_{30}=\sum_{1\le i\le k\le 4} a_{ik}(\alpha_{i1}d_{20}^{(k)}+\alpha_{k1}d_{20}^{(i)})+\sum_{1\le i\le k\le p\le 4} a_{ikp}\alpha_{i1}\alpha_{k1}\alpha_{p1}$$

$$A_{21}=\sum_{1\le i\le k\le 4} a_{ik}(\alpha_{i2}d_{20}^{(k)}+\alpha_{k2}d_{20}^{(i)}+\alpha_{k1}d_{11}^{(i)}+\alpha_{i1}d_{11}^{(k)})+$$

$$+\sum_{1\le i\le k\le p\le 4} a_{ikp}[\alpha_{p1}(\alpha_{i1}\alpha_{k2}+\alpha_{i2}\alpha_{k1})+\alpha_{i1}\alpha_{k1}\alpha_{p2}] \tag{11}$$

Коэффициенты A_{02}, A_{03}, A_{12} и A_{20}, A_{30}, A_{21} комплексно сопряжены. Величины $d_{rq}^{(k)}$ при $r+q=2$ находятся из формул (7) на основе выражений для A_{20}, A_{11}, A_{02}. По коэффициентам $A_{rq}(r+q=3)$ из формул (7), (8) находятся $d_{rq}^{(i)}$ при $r+q=3$. По величинам $d_{rq}^{(i)}(r+q=3)$ из формулы (10) определяются коэффициенты A_{rq} при $r+q=4$, по которым находятся величины $d_{rq}^{(l)}(r+q=4)$ и коэффициенты A_{rq} при $r+q=5$.

Для системы (9) первая ляпуновская величина определяется [11, 12] по формуле

$$g_1=\operatorname{Re}A_{21}-\omega^{-1}A_{11}\operatorname{Im}(A_{20})$$

Величина g_1 для уравнения (1) является величиной, подобной первой ляпуновской [7].

Если $g_1<0$, то граница области устойчивости уравнения (1) безопасная, если $g_1>0$ – опасная. Соответственно если $g_1=0$, что и предполагается в данной работе, то устойчивость состояния равновесия $x=0$ уравнения (1) определяется по знаку второй ляпуновской величины системы (9), являющейся одновременно [7] величиной, подобной второй ляпуновской для уравнения (1).

Была получена [9] формула для второй ляпуновской величины уравнения

$$\dot z=i\omega z+\sum_{k+j\ge 2}\frac{g_{kj}}{k!j!}z^k\bar z^j \tag{12}$$

где черта означает комплексное сопряжение, g_{kj} – постоянные коэффициенты. Первое уравнение системы (9) совпадает с уравнением (12), а коэффициенты A_{kj} с коэффициентами $g_{kj}/(k!j!)$. Поэтому полученная ранее формула [9] для второй ляпуновской величины может быть использована и для системы (9).

Если $g_1=0$ и $g_2<0$, то состояние равновесия системы с запаздыванием, описываемой уравнением (1), устойчивое, а если $g_2>0$ – неустойчивое.

В случае отсутствия в функции f квадратичных членов, т.е. когда все $a_{ik}=0$, выражение для g_2 существенно упрощается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00635).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фишман Л.З.* О рождении периодического решения у систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1976. № 12. С. 96–107.
2. *Фишман Л.З.* Критерий определения опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 185–187.

3. *Фишман Л.З.* Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1830–1832.
4. *Фишман Л.З.* Критерии опасных и безопасных границ для уравнений с запаздыванием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. 3-й конф. Н. Новгород, 1993. С. 190.
5. *Фишман Л.З.* Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости уравнений с запаздыванием // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 706–713.
6. *Мышкис А.Д., Шиманов С.Н., Эльсгольд Л.З.* Устойчивость и колебания систем с запаздыванием // Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев, 1961. Киев: Изд-во АН УССР, 1963, Т. 2. С. 241–267.
7. *Шиманов С.Н.* Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2. № 3. С. 467–480.
8. *Колесов Ю.С., Швитра Д.И.* Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 146 с.
9. *Hassard B.D., Kararinoff N.D., Wan Y.-H.* Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
10. *Hale J.K.* Functional Equations. Appl. Math. Sic. V. 3. N.Y.: Springer, 1971.
11. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
12. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20.X.1997

УДК 539.2:534.1

© 1999 г. **В.Б. Лисин, А.И. Потапов**

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Нелинейные уравнения динамики жидких кристаллов [1], выведенные ранее методом скобок Пуассона, выводятся из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Исследуется вариационная задача на безусловный экстремум функционала действия в лагранжевых переменных. В качестве лагранжиана используется разность между объемными плотностями кинетической и свободной энергии жидкого кристалла. Показывается, что полученные вариационные уравнения эквивалентны дифференциальным законам сохранения импульса и кинетического момента жидкого кристалла в эйлеровых переменных, а тензор напряжения Эриксена и молекулярное поле определяется через производные от свободной энергии.

Жидкий кристалл (ЖК) представляет собой текучую среду, у которой в отличие от классических жидкостей есть дополнительная гидродинамическая переменная – поле директора, описывающая ориентационные движения вытянутых частиц [2]. Уравнения нелинейной динамики ЖК были выведены [1] методом скобок Пуассона, хорошо известным в задачах сверхтекучести. Однако в теории ЖК он достаточно сложен и громоздок по сравнению с используемым ниже вариационным методом, применение которого в случае классических жидкостей известно [3, 4].

1. Кинематические и энергетические характеристики. Динамическое состояние жидкого кристалла нематического типа (НЖК) как сплошной среды описывается заданными полями скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и давления, а также полем направлений частиц среды $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ (полем директора) [5, 6]. Для вариационного вывода уравнений динамики НЖК необходимо