ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 63. Вып. 2, 1999

УДК 539.3 : 534.1

© 1999 г. И.А. Кийко

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ И ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ГАЗА С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Исследуются аэроупругие колебания пологой оболочки вращения либо цилиндрической панели, занимающих соответственно часть тонкого цилиндрического тела или тонкого профиля, обтекаемых без угла атаки потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Основное внимание уделено определению давления взаимодействия; эта задача решается в рамках закона плоских сечений и теории пограничного слоя. Получено выражение, уточняющее и дополняющее известную формулу "поршневой" теории. Приводится линеаризованная постановка задачи о панельном флаттере пологой оболочки. На примере пластины, находящейся на одной из плоскостей клина, показано, что формула "поршневой" теории дополняется слагаемым, имеющим смысл сжимающего усилия в плоскости пластины. Показано, что учет этого слагаемого приводит к снижению критической скорости потока.

Исследования по панельному флаттеру в подавляющем большинстве выполнены с использованием формулы "поршневой" теории для давления взаимодействия между колеблющейся панелью и обтекающим ее потоком газа. Недостаточность такого подхода в общем случае отмечена ранее [1] и предложено давление взаимодействия определять в рамках закона плоских сечений [2, 3] из решения задачи в возмущениях (их источник – прогибы панели) при неучете отражения возмущений от ударной волны. Окончательные соотношения получены [1] при достаточно сильных упрощениях и нуждаются в дополнительном анализе.

1. Вывод основных соотношений. Представим себе тонкое осесимметричное тело либо профиль, обтекаемые без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью; вектор скорости потока направлен по оси тела (ортогонально кромке профиля). Начало ортогональной системы координат совместим с вершиной тела (кромкой профиля), ось x направим по вектору скорости, y – по кромке профиля, z – так, чтобы система координат была правой (в случае тела направление оси y произвольно).

Предположим сначала, что деформируемая часть поверхности тела или профиля занимает область $[x_1, x_2]$, и будем вести речь об осесимметричных прогибах оболочки вращения или о цилиндрическом изгибе пологой цилиндрической оболочки. Пусть в недеформированном состоянии уравнением образующей будет

$$z_1 = kx + \varphi(x)$$

при этом $|\varphi(x)/(kx)| \ll 1$ – тело вращения мало отличается от конуса, профиль – от клина; тогда на деформируемой части будет $z = kx + \varphi(x) - \tilde{w}(x, t)$, где $\tilde{w} = w\cos(\mathbf{n}, z)$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности z_1. С той же точностью, с какой справедлив закон плоских сечений, можно положить $\tilde{w} \cong w$, поэтому окончательно

$$z = kx + \varphi(x) - w(x, t) \tag{1.1}$$

В соответствии с законом плоских сечений состояние газа в области между обтекаемым телом и ударной волной (УВ) определяется из решения задачи о неустановившемся плоском течении в плоскости $x = v_x t$, которое вызывается расширением поршня по закону

$$z(t) = kv_x t + \varphi(v_x t) - w(v_x t, t) \tag{1.2}$$

Решение этой задачи построим разложением по малому параметру – отношению плотностей газа перед УВ и за ней [4]

$$\frac{\rho^0}{\rho^*} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[1+\frac{2a_0^2}{(\gamma-1)D^2}\right] \equiv \varepsilon a(D)$$

где a_0 – скорость звука в невозмущенном потоке, D – скорость распространения УВ. Если собственно параметром разложения считать ε, то требование малости $(\rho^0/\rho^*)^2 \ll 1$ влечет за собой условие $a(D) \sim 1$, что в дальнейшем будет использовано.

Оценим значение скорости потока v_x, которое обеспечивает выписанное неравенство. Из условия $\rho/\rho^* \ll 1$ следует $a_0^2/D^2 \ll 1$; вследствие принятого условия $|(\varphi - w)/(kx)| \ll 1$ для скорости УВ справедлива оценка $D \sim \delta k v_x$, $\delta \lesssim 1$, поэтому окончательно должно быть $(\delta k M)^2 \gg 1$.

Введем лагранжевы переменные: время t и координату z, так что $dz = \rho^0 r^{\mu-1} dr$, где r – расстояние частиц от оси или плоскости симметрии в начальный момент времени, ρ^0 – начальная плотность, $\mu = 2$ для цилиндрических волн, $\mu = 1$ – для плоских. Искомые функции – расстояние частиц от оси или плоскости симметрии $\varsigma = \varsigma(t, z)$, давление $p = p(t, z)$ и плотность $\rho = \rho(t, z)$.

Уравнения движения, сохранения массы и энергии имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2} = -\varsigma^{\mu-1}\frac{\partial p}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varsigma}{\partial z} = \frac{1}{\rho \varsigma^{\mu-1}}; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{1.3}$$

Положив

$$\varsigma = \varsigma_0 + \varepsilon\varsigma_1 + \ldots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots, \quad \rho = \varepsilon^{-1}\rho_0 + \rho_1 + \ldots$$

и подставив в (1.3), получим для функции нулевого приближения систему, которая легко интегрируется:

$$\varsigma_0 = \varsigma_0(t), \ \ p_0 = P(t) - z\varsigma_0^{1-\mu}\frac{\partial^2 \varsigma_0}{\partial t^2}, \ \ \rho_0 = \frac{p_0^{1/\gamma}}{\vartheta_0(z)}$$

Здесь $\varsigma_0(t)$, $P(t)$, $\vartheta_0(z)$ – пока произвольные функции.

Для функций первого приближения имеем

$$\varsigma_1 = \frac{1}{\varsigma_0^{\mu-1}}\int_{z^*}^{z}\frac{\vartheta_0(z)}{p_0^{1/\gamma}}dz + \varsigma_1^*(t)$$

$$p_1 = (\mu-1)\frac{\partial^2 \varsigma_0}{\partial t^2}\frac{1}{\varsigma_0^{\mu}}\int_{z^*}^{z}\varsigma_1 dz - \frac{1}{\varsigma_0^{\mu-1}}\int_{z^*}^{z}\frac{\partial^2 \varsigma_1}{\partial t^2}dz + p_1^*(t) \tag{1.4}$$

$$\frac{p_1}{p_0} - \gamma\frac{\rho_1}{\rho_0} = \vartheta_1(z)$$

Здесь $\varsigma_1^*, p_1^*, \vartheta_1$ – произвольные функции, величина z^* будет определена в дальнейшем.

Примем, что $\varsigma_0(t)$ определяет закон движения УВ; тогда на ней будет $z = z^* = \rho^0\varsigma_0^\mu(t)/\mu$. Подставив принятые выше разложения в условия на УВ, придем к соотношениям: при $z = z^* = \rho^0\varsigma_0^\mu/\mu$ должно быть

$$\varsigma_0 = \varsigma_0(t), \quad p_0 = \frac{2}{\gamma+1}\rho^0\dot{\varsigma}_0^2, \quad \rho_0 = \frac{\rho^0}{a(\dot{\varsigma}_0)} \tag{1.5}$$

$$\varsigma_1 = 0, \quad p_1 = -p^0, \quad \rho_1 = 0$$

Здесь p^0 – давление в невозмущенном потоке, точка над функцией – производная по времени.

Определим из (1.5) входящие в решение произвольные функции и введем переменную τ по формуле: $z = \rho^0\varsigma_0^\mu(\tau)/\mu$; нужные для последующего рассмотрения функции примут вид:

$$p_0 = \frac{2\rho^0}{\gamma+1}\dot{\varsigma}_0^2 + \frac{1}{\mu}\rho^0\varsigma_0\ddot{\varsigma}_0 - \ddot{\varsigma}_0\varsigma_0^{1-\mu}z$$

$$\varsigma_1 = -\frac{1}{\varsigma_0^{\mu-1}}\int_\tau^t a(\dot{\varsigma}_0(\xi))\psi(t,\xi)\varsigma_0^{\mu-1}(\xi)\dot{\varsigma}_0^{1+2/\gamma}(\xi)d\xi \equiv \varsigma_1(t,\tau)$$

$$p_1 = -(\mu-1)\frac{\rho^0\ddot{\varsigma}_0}{\varsigma_0^\mu}\int_\tau^t \varsigma_1(t,\xi)\varsigma_0^{\mu-1}(\xi)\dot{\varsigma}_0(\xi)d\xi + \frac{\rho^0}{\varsigma_0^{\mu-1}}\int_\tau^t \frac{\partial^2\varsigma_1}{\partial t^2}\varsigma_0^{\mu-1}(\xi)\dot{\varsigma}_0(\xi)d\xi - p^0 \tag{1.6}$$

$$\psi(t,\tau) = \left[\dot{\varsigma}_0^2(t) + \frac{1}{\mu}\varsigma_0(t)\ddot{\varsigma}_0(t)\left(1 - \frac{\varsigma_0^\mu(\tau)}{\varsigma_0^\mu(t)}\right)\right]^{-1/\gamma}.$$

Итак, решение выражено через неизвестный пока закон движения УВ $\varsigma_0(t)$. Уравнение для его определения найдем из условия на поршне: при $\tau = 0$ ($z = 0$) должно быть выполнено равенство (если ограничиться в решении слагаемыми, линейными по ε) $\varsigma(t) = \varsigma_0(t) + \varepsilon\varsigma_1(t,0) = z(t)$, которое, обозначив $\zeta_1(t,0) = -F\{t,\xi;\zeta_0(t),\zeta_0(\xi)\}$, запишем в виде

$$\zeta_0(t) = \varepsilon F\{\ldots\} + z(t) \tag{1.7}$$

Функция $z(t)$ дается выражением (1.2).

Функционал F – существенно нелинейный, поэтому аналитическое решение уравнения (1.7) практически невозможно. Однако наличие малого параметра указывает возможность получить приближенное решение методом последовательных приближений:

$$\varsigma_0^{(0)}(t) = z(t), \quad \varsigma_0^{(n+1)}(t) = \varepsilon F\{t,\xi;\varsigma_0^{(n)}(t),\varsigma_0^{(n)}(\xi)\} + z(t) \tag{1.8}$$

Не рассматривая вопрос в общем случае, укажем лишь одно соображение в пользу возможной сходимости последовательности (1.8). В случае $\varphi = w = 0$ уравнение (1.7) имеет точное решение $\tilde{\varsigma}_0(t) = Dt$, в котором D находится из квадратного уравнения $D = \varepsilon Da(D)/\mu + u$, $u = kv_x$; последовательность (1.8) приводит к инерционному процессу определения D:

$$D(0) = u, \quad D^{(n+1)} = u + \varepsilon D^{(n)}a(D^n)/\mu$$

который сходится при $a_0/u < [(\gamma+1)(\mu+\varepsilon)/2]^{1/2}$ [5]. В частности, при $\mu = 1$ отсюда следует $k\gamma M > 1$, что согласуется с оценкой, полученной выше.

В линейной теории тонких пологих оболочек принимается

$$(\varphi/ut)^2 \ll 1, \quad (w/\varphi)^2 \ll 1$$

поэтому можно ожидать, что последовательность (1.8) будет сходиться при условии, в некотором смысле мало отличающемся от приведенного выше.

Сделаем предварительно некоторые оценки. Пусть l – характерный размер оболочки в направлении потока, тогда характерным временем процесса обтекания будет $t_1 = l/v_x$. Характерное время колебаний оболочки $t_2 = l^2/(ch)$, где $c = (E/\tilde{\rho})^{1/2}$, E, $\tilde{\rho}$ – модуль Юнга и плотность материала оболочки, h – ее толщина; отсюда

$$t_1/t_2 = ch/(v_x l^2 \lesssim 1$$

Далее

$$\dot{\varphi}/u \sim \varphi/(t_1 u) \ll 1, \quad \varsigma_0 \ddot{\varphi}/\dot{\varsigma}_0^2 \sim \varphi/(kl) \ll 1;$$

поскольку $(w/\varphi)^2 \ll 1$, тем более будут справедливыми оценки

$$\dot{w}/u \ll 1, \quad \varsigma_0 \ddot{w}/\dot{\varsigma}_0^2 \ll 1$$

Вычислим первое приближение в (1.8). Получим

$$\varsigma_0^{(1)}(t) = \varepsilon F\{t,\xi; z(t), z(\xi) + z(t) \qquad (1.9)$$

Все выражения типа $1 + (\varphi - w)/(ut)$ и аналогичные, содержащиеся в $\varsigma_1(t, \tau)$ и $F\{...\}$ в различных степенях, разложим в ряды и проведем необходимые действия. Равенство (1.9) запишем окончательно в виде, содержащем только линейные слагаемые относительно $\varphi - w = W$ и соответствующих производных

$$\varsigma_0^{(1)}(t) = ut + \varepsilon uta(u) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu} a(u)\right) W(t) - \frac{2\varepsilon}{\mu\gamma} a(u)\dot{W}(t)t - \frac{\varepsilon}{2\mu^2\gamma} a(u)\ddot{W}(t)t^2 +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{\gamma}\left(a(u) - \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{a_0^2}{u^2}\right) t^{1-\mu} \int_0^t \tau^{\mu-1}\dot{W}(\tau)d\tau \qquad (1.10)$$

Во всех формулах следует считать $\varphi(\tau) \equiv \varphi(v_x \tau)$, $w(\tau) \equiv w(v_x \tau, t)$.

Вычислим второе приближение в (1.8), удерживая только линейные слагаемые по ε типа $\varepsilon W, \varepsilon\dot{W}$ и аналогичные. Можно убедиться, что $\varsigma_0^{(2)}$ будет отличаться от $\varsigma_0^{(1)}$ только тем, что в (1.10) следует сделать замены

$$u_1 t = (u + \varepsilon ua(u)/\mu)t \to u_2 t = (u + \varepsilon u_1 a(u_1)/\mu)t, \qquad a(u) \to a(u_1)$$

Подобная структура решения сохранится, очевидно, в любом приближении. Процесс итераций для u_n, как установлено выше, сходится к D, поэтому окончательно получим

$$\varsigma_0(t) = Dt + (1 + \varepsilon a(D)/\mu)W - \frac{2\varepsilon}{\mu\gamma} a(D)\dot{W}t - \frac{\varepsilon}{2\mu^2\gamma} a(D)\ddot{W}t^2 +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{\gamma}((1-\gamma)a(D) + \gamma)t^{1-\mu} \int_0^t \tau^{\mu-1}\dot{W}(\tau)d\tau \qquad (1.11)$$

Из (1.6) определим $\varsigma_1(t, \tau)$:

$$\varsigma_1(t,\tau) = -\frac{a(D)}{\mu} Dt\left(1 - \frac{\tau^\mu}{t^\mu}\right) + \frac{2a(D)}{\mu\gamma}\dot{W}t\left(1 - \frac{\tau^\mu}{t^\mu}\right) - \frac{2}{\gamma}(1-\gamma)a(D) + \gamma)\int_\tau^t \tau^{\mu-1}\dot{W}(\tau)d\tau +$$

$$+(\mu - 1)a(D)W\left(1 - \frac{\tau^\mu}{t^\mu}\right) - a(D)\left(W(t) - W(\tau)\frac{\tau^{\mu-1}}{t^{\mu-1}}\right) + \frac{a(D)}{2\mu^2\gamma}\ddot{W}t^2\left(1 - 2\frac{\tau^\mu}{t^\mu} + \frac{\tau^{2\mu}}{t^{2\mu}}\right) \qquad (1.12)$$

Задача фактически решена, поскольку p_1 вычисляется через ς_0 и ς_1 простыми квадратурами.

2. Пологая оболочка как часть поверхности профиля. Подставив выражения (1.11), (1.12) при $\mu = 1$ в (1.6), найдем давление на поршне

$$p|_{\tau=0} \cong (p_0 + \varepsilon p_1)_{\tau=0} = \frac{2\rho^0 D^2}{\gamma+1} - \varepsilon p^0 + \frac{4\rho^0 D\dot{W}}{\gamma+1}(1+2\varepsilon - \varepsilon a(D)) +$$

$$+\rho^0 D\ddot{W}t\left[1-\varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right]+\ldots \tag{2.1}$$

Многоточием обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости в сравнении с предыдущим, поэтому в дальнейшем их опустим.

Переходя к задаче обтекания профиля в эйлеровой системе координат, связанной с неподвижным телом, как принято выше, учтем, что

$$t = x/v_x, \quad \dot{W} = \partial W/\partial t + v_x \partial W/\partial x$$

Подставив в (2.3), получим выражение для перепада давления на боковой поверхности профиля

$$\Delta p = p - p^0 = \frac{2}{\gamma+1}(\rho^0 D^2 - \gamma p^0) - \frac{4\rho^0 D}{\gamma+1}(1+2\varepsilon-\varepsilon a(D))\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v_x\frac{\partial w}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{\rho^0 Dx}{v_x}\left(1-\varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v_x\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} + v_x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) +$$

$$+\frac{4\rho^0 Dv_x}{\gamma+1}(1+2\varepsilon-\varepsilon a(D))\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \rho^0 Dv_x x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

Откажемся от предположения о цилиндрическом изгибе и будем считать, что выражение (2.2) справедливо и в общем случае $\varphi = \varphi(x, y)$, $w = w(x, y, t)$; для описания движений оболочки воспользуемся простейшим вариантом линейной теории [6]

$$D_0\Delta^2 w = \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)h\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)h\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2h\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \Delta p - \tilde{\rho}h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad \Delta^2\Phi + E\left(k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{2.3}$$

здесь k_x, k_y – главные кривизны; ν – коэффициент Пуассона материала оболочки; Φ – функция напряжений. Систему (2.3) следует дополнить соответствующими граничными условиями.

Выделим в (2.3) основное (статическое) состояние $w_0(x, y)$, $\Phi_0(x, y)$ и положим $w = w_0 + w^*$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi^*$, где звездочкой обозначены "малые" возмущения основного состояния; подстановка в (2.3) дает линеаризованную систему относительно малых возмущений

$$D_0\Delta^2 w^* = h\left(k_x\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y^2} + k_y\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^2}\right) + L(w^*, \Phi_0) + L(w_0, \Phi^*) -$$

$$-\frac{4\rho^0 D}{\gamma+1}(1+2\varepsilon-\varepsilon a(D))\left(\frac{\partial w^*}{\partial t} + v_x\frac{\partial w^*}{\partial x}\right) - \frac{\rho^0 Dx}{v_x}\left(1-\varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}+2v_x\frac{\partial^2 w^*}{\partial t\partial x}+v_x^2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}\right)-\tilde{\rho}h\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}$$

$$\Delta^2\Phi^*+E\left(k_x\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}\right)=0$$

$$L(u,v)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

Слагаемое $L(w_0,\Phi^*)$ будет, скорее всего, оказывать второстепенное влияние на решение w^*, Φ^*, и им можно пренебречь; окончательное заключение может быть получено после конкретных расчетов.

Предположим теперь, что вектор скорости потока образует угол θ с положительным направлением оси x, так что

$$V=v\ \mathbf{n}^0=\{v_x,v_y\},\quad \mathbf{n}^0=\{\cos\theta,\sin\theta\}$$

Тогда выражение (2.2) преобразуется к виду

$$\Delta p=\frac{2}{\gamma+1}(\rho^0 D-\gamma p^0)-\frac{4\rho^0 D}{\gamma+1}(1+2\varepsilon-\varepsilon a(D))\left(\frac{\partial w}{\partial t}+v\,\mathbf{n}^0\cdot\operatorname{grad}w\right)-$$

$$-\left\{\frac{\rho^0 Dx}{v_x}\left[1-\varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right]\right\}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}^0\cdot\operatorname{grad}w+v_x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2v_xv_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+v_y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{4\rho^0 D\dot{v}}{\gamma+1}(1+2\varepsilon-\varepsilon a(D))\mathbf{n}^0\cdot\operatorname{grad}\varphi+\frac{\rho^0 Dx}{v_x}\left(1-\varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right)\times$$

$$\times\left(v_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2v_xv_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+v_y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)$$

В заключение приведем оценки слагаемых в правой части (2.2). "Присоединенную массу" $(\rho^0 D_x/v_x)(1-12\varepsilon a(D)/(\gamma(\gamma+1)))$ сравним с погонной массой оболочки. Поскольку второй сомножитель порядка единицы, а $x\sim l$, имеем

$$\tilde{\rho}hv_x/(\rho^0 Dl)\sim\rho hv_x/(\rho^0 v_x\operatorname{tg}\alpha l)$$

при обычных пределах изменения параметров это отношение будет иметь порядок от 10 до 10^3, т.е. в первом приближении слагаемым с "присоединенной массой" можно пренебречь. Характерное время колебаний оболочки $t_2=l^2/(\mathrm{ch})$, поэтому отношение

$$(2v_x\partial^2 w/\partial t\partial x)/(v_x^2\partial^2 w/\partial x^2)\sim\mathrm{ch}/(v_x l)$$

будет иметь порядок от 10^{-1} до 10^{-2}. Следовательно, основной вклад в "динамическую" нагрузку на оболочку внесут слагаемые

$$\Delta P_{\text{din}}=-\frac{4\rho^0 D}{\gamma+1}(1+2\varepsilon-\varepsilon a(D))\left(\frac{\partial w}{\partial t}+v_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\rho^0 Dv_x x\left(1-\varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\qquad(2.4)$$

Первое из них – это традиционное слагаемое "поршневой теории", но с коэффициентом, достаточно сложно зависящим от скорости потока; второе имеет смысл сжимающего нормального усилия в срединной поверхности оболочки и, очевидно, может оказать существенное влияние на характер колебаний и критическую скорость флаттера.

3. Флаттер пластины. Рассмотрим задачу о флаттере пластины, которая в плоскости (x, y) занимает область G с кусочно-гладким контуром Г. Вследствие линейности задачи колебания пластины будут описываться уравнением

$$D_0\Delta^2 w = \Delta P_{\text{din}} - \tilde{\rho}h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

и граничными условиями

$$x, y \in \Gamma : w = 0, \quad M(w) = 0 \tag{3.2}$$

где M – известный в теории пластин оператор.

Пусть l – характерный размер области G, $t_0 = l^2\sqrt{\tilde{\rho}h / D_0}$. Введем безразмерные координаты x/l, y/l и время t/t_0, оставив за ними прежние обозначения, затем сделаем подстановку $w = \psi(x, y)e^{\omega t}$. Тогда задачу (3.1) при учете (3.2) и выражения (2.4) приводим к задаче на собственные значения

$$\Delta^2\psi + A_2M^2x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + A_1M^2\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\psi, \quad \lambda = -\omega^2 - A_0M\omega \tag{3.3}$$

$$xy \in \Gamma, \quad \psi = 0, \quad M(\psi) = 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$A_0 = \frac{8\gamma\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\gamma+1}\frac{p^0cl^2}{Ea_0h^2}\operatorname{tg}\beta(1 + 2\varepsilon - \varepsilon a^*(\operatorname{tg}\beta))$$

$$A_1 = \frac{48\gamma(1-\nu^2)}{\gamma+1}\frac{p^0l^3}{Eh^3}\operatorname{tg}\beta(1 + 2\varepsilon - \varepsilon a^*(\operatorname{tg}\beta))$$

$$A_2 = 12\gamma(1-\nu^2)\frac{p^0l^3}{Eh^3}\operatorname{tg}\beta\left(1 - \varepsilon\frac{12a^*(\operatorname{tg}\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\right)$$

$$a^*(\operatorname{tg}\beta) = 1 + 2/[(\gamma-1)M^2\operatorname{tg}^2\beta]$$

"Наклон ударной волны" $\operatorname{tg}\beta$ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + \varepsilon a^*(\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\beta$$

В комплексной плоскости λ область устойчивых колебаний находится внутри параболы

$$A_0^2M^2\operatorname{Re}\lambda = (\operatorname{Im}\lambda)^2$$

Следовательно, задача состоит в том, чтобы определить собственное число, которое первым попадет на параболу устойчивости; соответствующая этому скорость будет критической скоростью флаттера.

Решение уравнения (3.3) как уравнения с переменными коэффициентами возможно приближенными или численными методами; в числе последних отметим численно-аналитический алгоритм без насыщения [7], специально разработанный для решения задач такого рода.

Замечание. В традиционной постановке, когда $A_2 = 0$, необходимое условие устойчивых движений $\operatorname{Re}\lambda > 0$ всегда выполнено [8]; в рассматриваемом случае, вследствие определенной отрицательности оператора $x\partial^2\psi/\partial x^2$, это условие должно быть обеспечено дополнительными ограничениями, налагаемыми на параметры задачи.

На простом примере прямоугольной шарнирно закрепленной пластины получим некоторые результаты качественного характера. Пусть одна из сторон пластины параллельна кромке клина и находится на расстоянии x_0 (безразмерном) от нее; область $G\{0 \leqslant x \leqslant 1/\beta_0, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. В выбранной системе координат задача (3.3), (3.4) запишется в виде

$$
\Delta^2\psi + A_2 M^2 (x_0 + x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + A_1 M^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\psi
$$

$$
x = 0,\ \ x = \frac{1}{\beta_0}:\ \ \psi = 0,\ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \tag{3.5}
$$

$$
y = 0,\ \ y = 1:\ \ \psi = 0,\ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0
$$

Известно [7, 9], что при $\beta_0 \sim 1$ двучленное приближение метода Бубнова – Галеркина в этой простейшей постановке задачи при $A_2 = 0$ для критической скорости флаттера доставляет результат приемлемой точности. Воспользуемся им и положим

$$
C = (C_1 \sin\beta_0\pi x + C_2 \sin 2\beta_0\pi x)\sin\pi y
$$

После обычной процедуры на основании (3.5) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, корни характеристического уравнения которой представим в виде

$$
\lambda_{1,2} = \lambda' \pm i\lambda'' \tag{3.6}
$$

$$
\lambda' = \pi^4\left(1 + 5\beta_0^2 + \frac{17}{2}\beta_0^4\right) - \frac{5}{2}\pi^2\beta_0^2 A_2 M^2\left(x_0 + \frac{1}{2\beta_0}\right)
$$

$$
\lambda'' = \left(-\left[3\pi^4\beta_0^2(2 + 5\beta_0^2) - 3\pi^2\beta_0^2 A_2 M^2\left(x_0 + \frac{1}{2\beta_0}\right)\right]^2 + \left(\frac{16\beta_0}{3}\right)^2 B_1 B_2 A_1^2 M^4\right)^{1/2}
$$

$$
B_1 = 1 - 8A_2/(3A_1),\ \ B_2 = 1 + 2A_2/(3A_1)
$$

Отсюда получаем уравнение для определения критического значения числа M

$$
A_0 M^2\lambda' - \lambda^{2''} = 0 \tag{3.7}
$$

Определим M_0 из условия $\lambda'' = 0$, что соответствует критической скорости флаттера без учета аэродинамического демпфирования ($A_0 = 0$); из (3.6) имеем

$$
\left[\sqrt{B_1 B_2} + \frac{9}{16}\beta_0\pi^2\left(x_0 + \frac{1}{2\beta_0}\right)\frac{A_2}{A_1}\right]A_1 M_0^2 = \frac{9}{16}\pi^4\beta_0(2 + 5\beta_0^2) \tag{3.8}
$$

Простые оценки показывают, что при $a^* \sim 1$ выражение в квадратных скобках больше единицы; в случае "поршневой теории" $A_2 = 0, B_1 = B_2 = 1$, и из (3.8) следует

$$
M_0^* = \tfrac{3}{4}\pi^2[\beta(2 + 5\beta_0^2)/A_1]^{1/2} > M_0
$$

Таким образом, "поршневая теория" дает завышение оценки критической скорости флаттера по приближенному критерию $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$. Качественный анализ (при $\beta_0 = 1$ и $x_0 = 0$) показывает, что и точный критерий (3.7) приводит к неравенству $M_{cr} < M_{cr}^*$, где M_{cr}^* отвечает случаю $A_2 = 0$.

Роль последнего слагаемого в выражении (2.5) для ΔP_{din} возрастает для пластин, удлиненных в направлении потока. В этом случае следует воспользоваться одним из вариантов геометрически нелинейной теории пластин, например, уравнениями Кармана [6]. Пусть w_0 – безразмерный (отнесенный к $D_0/(Eh^2)$) прогиб, Φ_0 – безразмерная (отнесенная к D_0/h) функция напряжений, получаемые из системы Кармана при "статической" нагрузке

$$\Delta P_{st} = \frac{2}{\gamma+1}(\rho^0 D - \gamma p^0) - \frac{4\rho^0 D v_x}{\gamma+1}(1+2\varepsilon - \varepsilon a(D))\frac{\partial w_0}{\partial x} - \rho^0 D v_x x\left(1 - \varepsilon\frac{12a(D)}{\gamma(\gamma+1)}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

и положим $w = w_0 + w^*$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi^*$.

В системе для "малых" возмущений w^*, Φ^* уравнение

$$\Delta^2\Phi^* = -L(w_0, w^*)/2$$

отбросим, а в оставшемся не будем учитывать влияние Φ^* на w^*. Тогда при учете выражения (2.3) получим максимально упрощенную линеаризованную постановку задачи, положив в которой $w^* = \psi(x, y)e\omega t$, придем к задаче на собственные значения

$$\Delta^2\psi + A_2 M^2 x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + A_1 M^2\frac{\partial\psi}{\partial x} - L(\Phi_0, \psi) = \lambda\psi$$

$$x, y \in \Gamma: \psi = 0, \quad M(\psi) = 0$$

решение которой возможно численно-аналитическим алгоритмом без насыщения.

Автор благодарит Г.Г. Черного за обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00923).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 138–142.
2. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
4. *Черный Г.Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
5. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2, М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
6. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
7. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 171–174.
8. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 170–176.
9. *Новичков Ю.Н.* Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 11. С. 67–122.

Москва

Поступила в редакцию
19.II.1998