

УДК 539.3:62–50

© 1999 г. В.Ю. Столбов, П.В. Трусков

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЕЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ МЕТАЛЛОВ**

Поставлена и решена задача оптимального управления траекторией деформации при сложном нагружении металла. В качестве определяющих соотношений пластичности используются уравнения теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина. Решение оптимальной задачи получено с помощью метода динамического программирования. Показано, что путем управления траекториями деформации возможно значительно снижать работу пластического формоизменения металла.

Экспериментальным путем установлено [1, 2], что при сложном нагружении металла усилие пластического формоизменения снижается по сравнению с простым растяжением или сжатием. Объяснить этот эффект возможно с помощью теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина [3]. Ниже показано влияние сложного нагружения на величину работы пластического формоизменения и возможность использования данного эффекта при разработке новых технологий пластической обработки металлов.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается процесс деформирования однородного образца металла, находящегося в условиях одновременного растяжения и кручения. Данный процесс удобно представлять траекторией деформации в векторном пространстве А.А. Ильюшина  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ . В этом пространстве исследуются траектории деформации заданной длины  $\bar{s}$ . Считается, что происходит активное нагружение образца по некоторому закону, при этом упругому нагружению соответствует начальный участок траектории длиной  $s_0$ . Исследуется только пластическое деформирование образца. За начало отсчета принимается точка  $O$  начала пластического деформирования (фиг. 1). Пусть в точке  $O$  вектор  $\sigma$  расположен под углом  $\vartheta_0$  к оси  $\mathcal{E}_1$ . Среди траекторий длиной  $\bar{s}$  требуется найти такую, чтобы работа пластического формоизменения была минимальна, т.е.

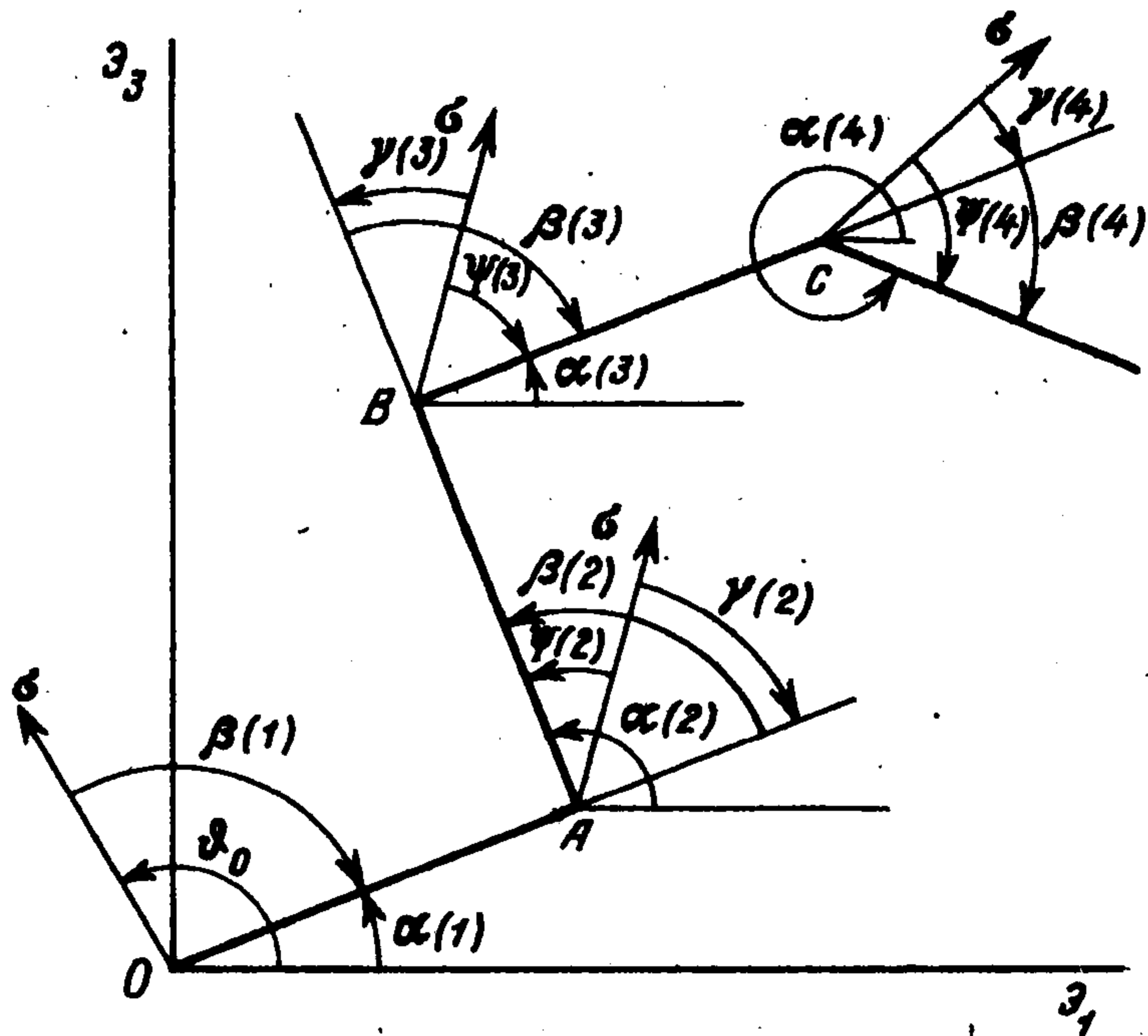
$$A = \int_{s_0}^{s_0 + \bar{s}} \sigma \cdot d\mathcal{E} = \int_{s_0}^{s_0 + \bar{s}} \sigma(s) \cos \vartheta(s) ds \rightarrow \inf$$

Материал полагается упрочняющимся, т.е.  $\sigma = \sigma(s)$ , где  $\sigma$  – модуль вектора напряжений,  $\vartheta$  – угол между  $\sigma$  и  $d\mathcal{E}$  (угол сближения).

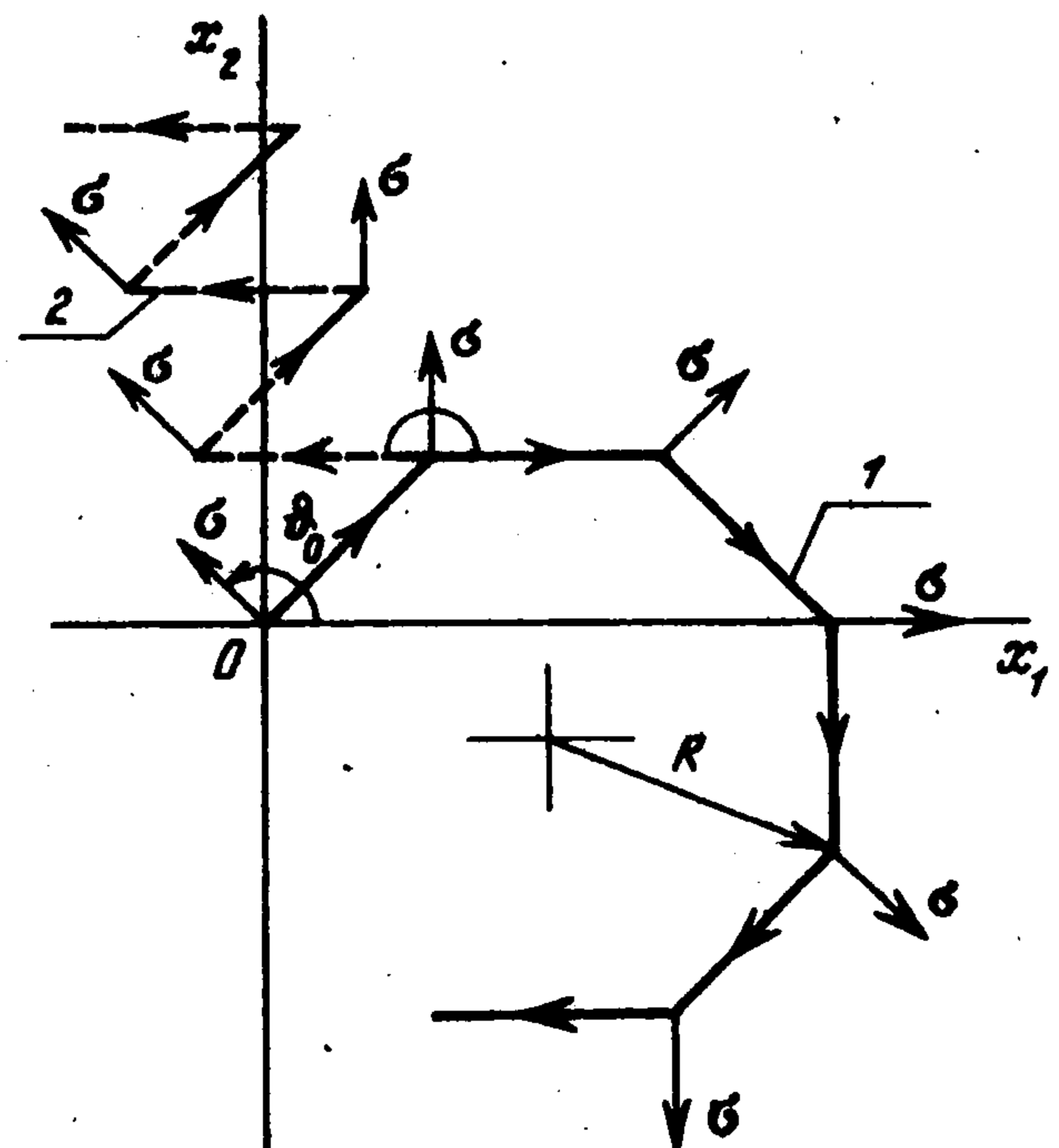
Приведем данную задачу к дискретному виду. Траекторию деформации аппроксимируем многозвенной ломаной с одинаковой длиной звена  $\Delta$ , тогда  $\bar{s} = N\Delta$ , где  $N$  – количество звеньев.

В качестве управления выберем угол наклона звена к оси  $\mathcal{E}_1$ :  $u(t) = \alpha(t)$  ( $t = 1, \dots, N$ ) (фиг. 1). Вводятся фазовые переменные:  $x_0(t) = s(t)$ ,  $x_1(t) = \mathcal{E}_1(t)$ ,  $x_2(t) = \mathcal{E}_3(t)$  ( $t = 0, \dots, N$ ). Скалярные свойства материала (модуль вектора  $\sigma$ ) зависят только от накопленной деформации  $s$  и на  $m$ -м участке не зависят от предыдущих управлений  $u(t)$  ( $t = 1, \dots, m - 1$ ). Векторные свойства материала (угол  $\vartheta$ ) зависят от истории нагружения. Поэтому сложность решения задачи управления заключается в необходимости учета истории деформирования.

Согласно постулату затухающей памяти [3], форму траектории деформаций необходимо помнить только на предшествующем участке длиной  $\lambda$  (след запаздывания



Фиг. 1



Фиг. 2

материала), величина которого для каждого металла определяется экспериментально. Обычно считается, что для сталей  $\lambda = (6 + 8)\epsilon_s$ , где  $\epsilon_s = \sigma_s/E$ ,  $\sigma_s$  – предел текучести материала,  $E$  – модуль упругости.

Рассмотрим постановку задачи управления с запаздыванием на один шаг [4]. В этом случае  $\Delta = \lambda/2 = \text{const}$ . Вектор  $\sigma$  в конце каждого звена остается под некоторым углом  $\gamma(t)$  ( $t = 2, \dots, N$ ) (фиг. 1). Обозначим  $\beta(t)$  ( $t = 2, \dots, N$ ) – угол излома траектории. Тогда можно определить угол наклона вектора  $\sigma$  в начале каждого звена, начиная со второго, следующим образом:

$$\psi(t) = \gamma(t) + \beta(t), \quad t = 2, \dots, N$$

Положительное направление каждого угла показано на фиг. 1. Функцию угла сближения  $\vartheta$  на  $t$ -м шаге можно задать в виде [5]

$$\vartheta(y) = \psi(t)e^{-ky}, \quad y = s(t) - s(t-1) \quad (1)$$

где  $k$  – постоянная материала.

В данном случае согласно принципу запаздывания считается, что  $\vartheta(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \lambda$ , поэтому для учета ограниченной памяти достаточно ввести две дополнительные фазовые переменные

$$x_3(t) = u(t), \quad t = 1, \dots, N; \quad x_4(t) = x_3(t-1), \quad t = 2, \dots, N$$

Тогда угол излома будет определяться следующим образом:

$$\beta(t) = (u(t) - x_3(t-1)), \quad t = 1, \dots, N$$

Угол  $\psi(t)$  можно записать в виде

$$\psi(t) = \gamma(t) + (u(t) - x_3(t-1)), \quad t = 1, \dots, N$$

$$\gamma(t) = [\gamma(t-1) + (u(t-1) - x_3(t-2))]e^{-k\Delta}, \quad t = 2, \dots, N$$

Обозначим  $x_5(t) = \gamma(t)$  ( $t = 2, \dots, N$ ) – угол сближения  $\vartheta$  в конце звена длины  $\Delta$ .

Теперь задачу дискретного оптимального управления можно сформулировать следующим образом: найти такой оптимальный процесс  $(\hat{u}, \hat{x})$ , при котором функционал

$$J(u, x) = \sum_{t=1}^N \int_{x_0(t-1)}^{x_0(t)} \sigma(y) \cos\{[u(t) - x_3(t-1) + (x_3(t-1) - x_4(t-1) + x_5(t-1))e^{-k\Delta}]e^{-ky}\} dy \quad (2)$$

достигает минимального значения, т.е.

$$J(\hat{u}, \hat{x}) = \min_u J(u, x)$$

и выполняются ограничения в виде равенств

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0(t-1) + \Delta, & x_1(t) &= x_1(t-1) + \Delta \cos u(t), & t &= 1, \dots, N \\ x_2(t) &= x_2(t-1) + \Delta \sin u(t), & x_3(t) &= u(t), & t &= 1, \dots, N \\ x_4(t) &= x_3(t-1), & x_5(t) &= [x_5(t-1) + x_3(t-1) - x_4(t-1)]e^{-k\Delta}, & t &= 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

при краевых условиях

$$x_0(0) = s_0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = \vartheta_0, \quad x_4(1) = \vartheta_0, \quad x_5(1) = 0 \quad (4)$$

и ограничения в виде неравенства

$$|u(t) - x_3(t-1) + [x_3(t-1) - x_4(t-1) + x_5(t-1)]e^{-k\Delta}| \leq \pi/2, \quad t = 1, \dots, N \quad (5)$$

Последнее условие следует из требования активного нагружения в течение всего процесса деформирования.

Поставленная задача дискретного оптимального управления (2)–(5) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности Беллмана [4], поэтому для ее решения применим метод динамического программирования.

**2. Решение задачи.** Воспользуемся следующей леммой.

*Лемма.* Минимум функции

$$f(\beta) = \int_{s_1}^{s_2} \sigma(s) \cos[\beta e^{-k(s-s_1)}] ds$$

при  $s_2 > s_1 \geq 0$ ,  $k > 0$ ,  $\sigma(s) > 0$  на отрезке  $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$  достигается при  $\beta = \pm \pi/2$ .

Доказательство леммы практически очевидно и следует из свойств функции  $\cos \beta$ .

Используя известную рекуррентную формулу динамического программирования [4] и лемму, решение задачи (2)–(5) можно записать в виде

$$\hat{u}(N-p+1) = \pm \frac{\pi}{2} + \hat{x}_3(N-p)(1 - e^{-k\Delta}) + (\hat{x}_4(N-p) - \hat{x}_5(N-p))e^{-k\Delta}, \quad p = 1, \dots, N \quad (6)$$

Используя связи (3) совместно с краевыми условиями (4), получим

$$\hat{u}(t) = \vartheta_0 \pm \frac{\pi}{2}(t - (t-1)e^{-k\Delta}), \quad t = 1, \dots, N \quad (7)$$

Углы излома в этом случае

$$\hat{\beta}(t) = \hat{u}(t) - \hat{u}(t-1) = \pm \frac{\pi}{2}(1 - e^{-k\Delta}), \quad t = 2, \dots, N \quad (8)$$

В формуле (7) и (8) знак перед  $\pi/2$  соответствует выбору знака в формуле (6). Тогда очевидно, что оптимальная траектория представляет собой ломаную, вписанную в окружность определенного радиуса  $R$  (кривая 1 на фиг. 2; стрелками показано направление движения по траектории, соответствующее знаку плюс перед  $\pi/2$  в формулах (6) и (7)).

Теперь будем чередовать знаки перед  $\pi/2$  в формуле (6) и получим следующую оптимальную функцию управления:

$$\hat{u}(t) = \vartheta_0 \pm (-1)^{t-1} \frac{\pi}{2} e^{-k\Delta}, \quad t = 1, \dots, N \quad (9)$$

и углы излома

$$\hat{\beta}(t) = (-1)^{t-1} \frac{\pi}{2}(1 + e^{-k\Delta}), \quad t = 2, \dots, N \quad (10)$$

В этом случае оптимальная траектория будет иметь зигзагообразную ломаную (кривая 2 на фиг. 2).

Аналогичные выкладки можно проделать при меньшей длине звена  $\Delta = \lambda/3, \lambda/4, \dots$ , вводя дополнительные фазовые переменные. Вид решений (7)–(10) при этом не изменится. Однако в фазовой плоскости  $x_1 - x_2$  форма оптимальной траектории претерпевает изменения. Например, если рассмотреть решение (7), (8), то можно заметить, что с уменьшением длины звена  $\Delta$  радиус окружности, в которую вписана равнозвенная ломаная, также уменьшается; значение функционала (2) при этом снижается.

Найдем радиус окружности  $\hat{R}$ , который соответствует оптимальной траектории при  $\Delta \rightarrow 0$ . Известно, что при малых центральных углах  $\varphi_n$  имеет место соотношение

$$\varphi_n = R_n^{-1} \lambda / n$$

где  $R_n$  – радиус описанной окружности,  $n$  – число звеньев ломаной. В данном случае угол  $\varphi_n$  равен углу излома траектории  $\beta(n)$ . Тогда

$$\hat{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{2\lambda}{\pi n(1 - e^{-k\lambda/n})} = \frac{2}{\pi k}$$

Видно, что минимум функционала (2) равняется нулю и достигается на окружности радиуса  $\hat{R}$ . Однако этот вывод противоречит постулату пластичности А.А. Ильюшина [6]. Полученное противоречие, по-видимому, связано с тем, что при малой длине звена ( $\Delta \rightarrow 0$ ) формула (1) дает существенную погрешность в определении угла  $\vartheta$ . Поэтому необходимо с осторожностью относиться к выбору аппроксимирующих функций угла  $\vartheta$  и знать границы их применимости. Это, например, относится к известной формуле Дао-Зуй-Бика [7], описывающей изменение угла сближения  $\vartheta$  на траектории постоянной кривизны  $\chi_0$

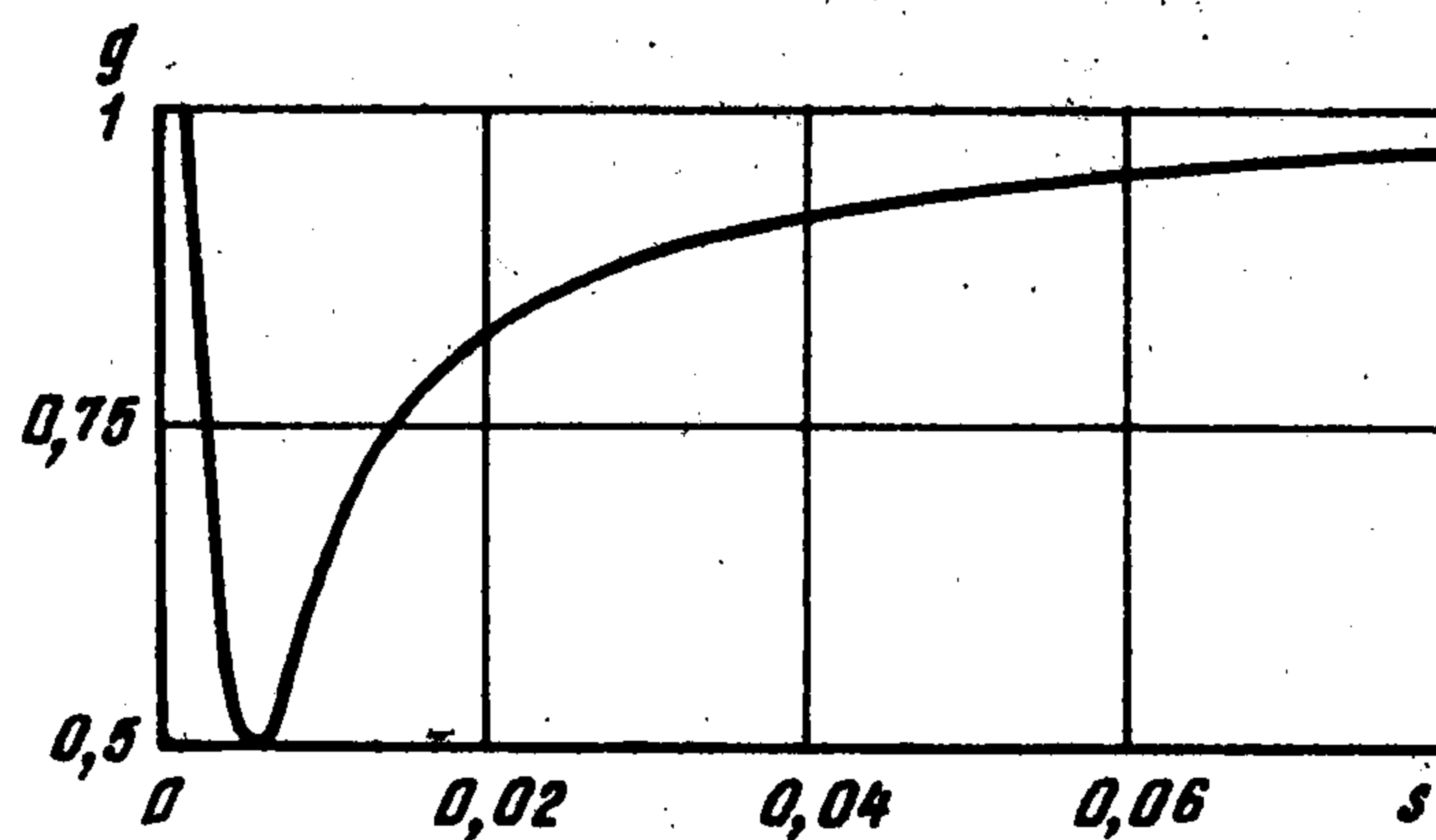
$$\vartheta(s_0, s) = \frac{s_0}{s} \left[ \vartheta_0 - \frac{\chi_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{ks_0} \right) \right] e^{-k(s-s_0)} + \frac{\chi_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{ks} \right), \quad s \in [s_0, \bar{s}]$$

При  $\vartheta_0 = \pi/2$ ,  $\chi_0 = 1/\hat{R} = \pi k/2$  получим

$$\vartheta(s_0, s) \doteq \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{ks} (1 - e^{-k(s-s_0)}) \right] = \frac{\pi}{2} g(s), \quad s \in [s_0, \bar{s}]$$

Можно показать, что значения функции  $g(s)$  на отрезке  $[s_0, \bar{s}]$  при  $\bar{s} \gg s_0$  близки к единице. Например, при  $k = 300$ ,  $s_0 = \varepsilon_s = 10^{-3}$  вид функции  $g(s)$ , приведенный на фиг. 3, подтверждает, что значение функционала (2) при  $\bar{s} \gg s_0$  близко к нулю на траекториях деформации в виде окружности радиуса  $\hat{R} = 2/(\pi k)$ .

Таким образом, решение дискретной задачи оптимального управления траекторией деформации показало, что теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина описывает эффект снижения работы пластического формоизменения металла при сложном нагружении. Данный результат можно использовать при оптимизации реальных технологических процессов обработки металлов давлением. Хотя в реальных процессах обычно требуется достичь заданной точки в пространстве деформаций, что обуславливает необходимость решения задачи оптимального управления с закрепленным правым концом, качественный вид решения при этом сохраняется. Например,



Фиг. 3

были исследованы траектории деформации в процессе изготовления стального полого цилиндра методом обратного выдавливания [8] и показано, что в случае применения схемы с "активным трением" траектории деформации частиц металла искривляются (становятся зигзагообразными) и наблюдается значительное снижение усилия выдавливания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Корякин Н.А., Лебедев В.Н.* Штамповка обкатыванием. М: ЦНИИ информации, 1987. 204 с.
2. *Sadok L., Urbanski S.* Theoretical and practical aspects of tube sinking by a rotary die // *Steel Res.* 1989. V. 60. № 6. P. 263–268.
3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 446 с.
5. *Васин Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // *Упругость и неупругость.* Вып. 1. М.: Изд-во МГУ, 1971. С. 59–127.
6. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
7. *Дао-Зуй-Бик.* О гипотезе локальной определенности в теории пластичности // *Вестн. МГУ.* Сер. 4. Математика, механика. 1965. № 2. С. 67–75.
8. *Столбов В.Ю.* Управление траекториями деформирования при обратном выдавливании цилиндра // *Актуальные проблемы теории пластичности и устойчивости.* Тверь: Тверск. политехн. ин-т, 1991. С. 93–100.

Пермь

Поступила в редакцию  
10.VII.1997